УДК 539.3

М. Михайлишин, канд.фіз.-мат.наук, Г. Семенишин
Тернопільський національний технічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМО – ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ З ВРАХУВАННЯМ РОЗВАНТАЖЕННЯ

M.Mykhailyshyn, Ph.D., Assoc. Prof. G.Semenyshyn.

MATHEMATICAL MODELING OF THERMOELASTOPLASTIC DEFORMATION TAKING INTO ACCOUNT UNLOADING

На етапі початкового деформування з недеформованого і ненапруженого стану основні співвідношення деформаційної теорії термопластичності можна представити у вигляді [1,2]

$$e_{ij} = e_{ij}^{e} + e_{ij}^{p} \tag{1}$$

$$s_{ij} = \frac{2G}{\psi} e_{ij}, \quad \psi = 3G(T)\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}, \tag{2}$$

де s_{ij}, e_{ij}–компоненти девіаторів напружень та деформацій; $\sigma_i = \sqrt{3/2\, s_{ij}s_{ij}}$, $\varepsilon_i = \sqrt{2/3\, e_{ij}e_{ij}}$ – інтенсивності напружень і деформацій, ψ – параметр пластичності, $G -$ модуль зсуву. Компоненти пластичної деформації співпадають з компонентами девіатора $\varepsilon_{ij}^{p} = e_{ij}^{p}$. Так як пружні компоненти силової деформації зв'язані з напруженнями узагальненим законом Гука $e_{ij}^{e} = \frac{s_{ij}}{2G}$, для пластичних деформацій на основі (1) знайдемо

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{\psi - 1}{2G} s_{ij}. \tag{3}$$

Можна також показати, що на цьому етапі деформування має місце формула

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{p} + \varepsilon_i^{e}, \tag{4}$$

де ε_i^{e} і ε_i^{p} – інтенсивності пружних і пластичних деформацій.

Інтенсивність напружень є визначена функція температури і інтенсивності деформацій $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i, T)$, вигляд якої не залежить від характеру напруженого стану і може бути визначений експериментально при простому розтягу циліндричних зразків при різних температурах [1, 2]. На пружній ділянці для ізотропних тіл ця функція має вигляд

$$\sigma_i = 3G(T)\varepsilon_i, \ \sigma_i \le \sigma_s(T), \tag{5}$$

в якій $\sigma_s(T)$ – залежна від температури границя плинності матеріалу. Отже в області пружних деформацій параметр пластичності $\psi = 1$ і фізичні співвідношення (1) приймають вигляд узагальненого закону Гука

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}. \tag{6}$$

Для більшості реальних матеріалів функцію $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i, T)$ можна апроксимувати залежністю

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i, T) = \begin{cases} \sigma_S(T)\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_S(T)}, \varepsilon_i \le \varepsilon_S = \frac{\sigma_S(T)}{3G(T)}; \\ \sigma_S(T)\left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_S(T)}\right)^{\gamma(T)}, \varepsilon_i > \varepsilon_S(T). \end{cases} \tag{7}$$

де $\gamma(T)$ – конкретна функція для кожного матеріалу, яка визначається експериментально.

Криві (7) можна побудувати на основі відповідних кривих, знайдених за експериментами при одновісному розтягу [1].

При пружному розвантаженні направляючі тензори напружень і пружних деформацій співпадають. Фізичні співвідношення тоді приймають вигляд

$$s_{ij} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i^{(e)}} e_{ij}^{(e)}, \tag{8}$$

причому $\sigma_i = 3G\varepsilon_i^{(e)}$. Пластичні деформації при пружному розвантаженні не змінюються і залишаються рівними тим значенням, які були досягнуті на момент початку розвантаження. Тоді, враховуючи (1), фізичні співвідношення запишуться так

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{p1}), \tag{9}$$

де ε_{ij}^{p1} – пластичні деформації, які досягнуті в даному елементі тіла на момент початку розвантаження. Фізичні залежності (9) можна представити також таким чином

$$\tilde{s}_{ij} = 2G\tilde{e}_{ij}. \tag{10}$$

Тут $\tilde{s}_{ij} = \frac{G}{G_1} s_{ij}^{(1)} - s_{ij}$, $\tilde{e}_{ij} = e_{ij}^{(1)} - e_{ij}$, $G_1 = G(T_1)$, T_1 – зафіксована в елементі тіла температура в момент початку розвантаження, s_{ij}^1, $e_{ij}^1 -$ компоненти девіаторів напружень і повних деформацій в момент початку розвантаження.

Фізичні співвідношення (10) можна записати так $\tilde{\sigma_i} = 3G\tilde{\varepsilon}_i$, де хвильками позначені інтенсивності відповідних величин з хвильками. Співвідношення (10) залишаються справедливими до тих пір, поки в даному елементі тіла знову не виникають пластичні деформації. Якщо при пружному розвантаженні використовуються залежності (10), то логічно припустити, що повторне пластичне деформування описується співвідношеннями

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{2G}{\tilde{\psi}(\sigma_i, T)} \tilde{e}_{ij}. \tag{11}$$

Легко переконатися, що тоді має місце залежність $\tilde{\sigma_i} = \frac{3G}{\tilde{\psi}} \tilde{\varepsilon}_i$, яка може бути використана для знаходження параметра пластичності $\tilde{\psi}$, якщо відома функція $\tilde{\sigma_i} = \widetilde{\Phi}(\tilde{\varepsilon}_i, \varepsilon_i^1, T)$. Якщо на етапі початкового деформування використовується залежність (7), то ця функція має вигляд

$$\tilde{\sigma_i} = \begin{cases} \sigma_S(T) \dfrac{\tilde{\varepsilon}_i}{\varepsilon_S(T)}, \tilde{\varepsilon}_i \le \tilde{\varepsilon}_s = 2\varepsilon_S(T), \\ 2\sigma_S(T) \left(\dfrac{\tilde{\varepsilon}_i}{2\varepsilon_S}\right)^{\gamma(T)}, \tilde{\varepsilon}_i > \tilde{\varepsilon}_S. \end{cases} \tag{12}$$

Якщо в (11) перейти до компонент тензорів напружень σ_{ij} і деформацій ε_{ij}, то ці залежності приймуть вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma_0\right) + \delta_{ij}\varepsilon^T + \varepsilon_{ij}^p, \tag{13}$$

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{p*} + \frac{\psi_* - 1}{\psi_*}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{p*} - \delta_{ij}\varepsilon_0). \tag{14}$$

Співвідношення (27) відрізняються від закону Гука додатковими пластичними деформаціями в правій частині, які обчислюються за формулами (14). Таке представлення фізичних залежностей дозволяє легко узагальнити їх на використання методу додаткових деформацій для лінеаризації фізичної нелінійності.

Література

1. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. К.:Наукова думка, 1970.-287с.

2. Михайлишин М. Узагальнення принципу Мазінга на випадок неізотермічних процесів навантаження. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. Тернопіль. № 2, 2006. С 12-20.