

Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя

---

Кафедра автоматизації  
технологічних процесів  
і виробництв

Лабораторна робота № 8  
з курсу  
*”Цифрова обробка сигналів та  
зображень”*

Оптимальна та адаптивна  
фільтрація сигналів

Тернопіль 2023

Методичні вказівки до лабораторної роботи № 8 "Оптимальна та адаптивна фільтрація сигналів" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". Пісціо В.П., Медвідь В.Р., Микулик П.М. Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 14 с.

Для студентів напряму: 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Автори: Пісціо В.П., Медвідь В.Р., Микулик П.М.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 1 від 30.08.2023 року)

## Лабораторна робота №8

### Тема роботи

Оптимальна та адаптивна фільтрація сигналів.

### Мета роботи

Ознайомитись із методами оптимальної фільтрації сигналів.

### Задача оптимальної фільтрації сигналів

Боротьба з шумами та завадами є основним завданням у багатьох областях цифрової обробки сигналів. Забезпечити високу стійкість систем передачі інформації можна різними шляхами. Наприклад, створюють такі пристрої для обробки, які деяким найкращим чином виділяють сигнал, спотворений присутністю перешкоди. Інший шлях полягає в удосконаленні структури переданих сигналів, використанні завадостійких способів кодування і модуляції.

У традиційних методах обробки даних інформація витягується з вхідних сигналів лінійними системами з постійними параметрами алгоритмів перетворення даних. Системи можуть мати як скінчену, так і нескінченну імпульсну характеристику, але передатна функція систем не залежить від параметрів вхідних сигналів і їх зміни в часі.

Щоб виділити корисний сигнал, спотворений наявністю шуму, можна використати частотну фільтрацію. Нехай передавальна функція  $W(j\omega)$  лінійного стаціонарного фільтра обрана так, що значення АЧХ великі в області частот, де сконцентрована основна частка енергії сигналу, і малі там, де велика спектральна щільність потужності шуму. Слід очікувати, що, подавши на вхід такого фільтра суму сигналу і шуму, на виході можна отримати помітне збільшення відносної частки

### Відношення сигнал-шум

Нехай на вході лінійного фільтра присутній вхідний сигнал:

$$u_{\text{вх}}(t) = s_{\text{вх}}(t) + n_{\text{вх}}(t) \quad (1)$$

що є сумою корисного сигналу  $s_{\text{вх}}(t)$  та шуму  $n_{\text{вх}}(t)$ . Тут і надалі передбачається, що обидва ці сигнали є вузько смуговими з однаковими центральними частотами  $\omega_0$ . Будемо вважати, що сигнал і шум наявні лише на протязі скінченного інтервалу часу  $T$ , центрованого відносно  $t = 0$ , а потім спрямуємо  $T$  до нескінченності.

Визначимо співвідношення сигнал/шум на вході і виході фільтра

$$Q_{\text{вх}} = \frac{\|s_{\text{вх}}\|^2}{\|n_{\text{вх}}\|^2} \quad Q_{\text{вих}} = \frac{\|s_{\text{вих}}\|^2}{\|n_{\text{вих}}\|^2} \quad (2)$$

де норма розуміється у сенсі скалярного добутку сигналів. Нехай корисний сигнал на вході фільтра тривалістю  $T$  має спектральну щільність  $s_{\text{вх}}(\omega, T)$ , а шум  $n_{\text{вх}}(\omega, T)$ , і нехай вони прямують до деяких границь  $S_{\text{вх}}(\omega)$  і  $N_{\text{вх}}(\omega)$ , відповідно при  $T \rightarrow \infty$ . Можна також допустити, що до сталої величини прямують відношення  $S_{\text{вх}}(\omega)/T$  і  $N_{\text{вх}}(\omega)/T$ .

Спектральна щільність вхідного сигналу буде у такому випадку визначатись за формулою

$$U_{\text{вх}}(\omega, T) = s_{\text{вх}}(\omega, T) + n_{\text{вх}}(\omega, T)$$

А спектральна щільність вихідного сигналу фільтра буде визначатись за формулою:

$$U_{\text{вих}}(\omega, T) = W(\omega) (s_{\text{вх}}(\omega, T) + n_{\text{вх}}(\omega, T))$$

де  $W(\omega)$  - передавальна функція фільтра.

Отже спектральна щільність корисного вихідного сигналу:

$$s_{\text{вих}}(\omega, T) = W(\omega) s_{\text{вх}}(\omega, T),$$

а спектральна щільність шуму на виході:

$$n_{\text{вих}}(\omega, T) = W(\omega) n_{\text{вх}}(\omega, T)$$

Враховуючі, визначення норми сигналу  $v$ :

$$\|v\|_T^2 = (v; v)_T = \int_{-T/2}^{T/2} v(t)v(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega, T)\overline{V(\omega, T)}d\omega \quad (3)$$

де  $V(\omega, T)$  - спектральна щільність сигналу  $v(t)$ , обмеженого у часі на інтервалі

$[-T/2..T/2]$  маємо:

$$Q_{\text{вих}} = \frac{\|s_{\text{вих}}\|^2}{\|n_{\text{вих}}\|^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вих}}(\omega, T) \overline{s_{\text{вих}}(\omega, T)} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} n_{\text{вих}}(\omega, T) \overline{n_{\text{вих}}(\omega, T)} d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \overline{W(\omega)} s_{\text{BX}}(\omega, T) \overline{s_{\text{BX}}(\omega, T)} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \overline{W(\omega)} n_{\text{BX}}(\omega, T) \overline{n_{\text{BX}}(\omega, T)} d\omega}$$

враховуючі визначення модуля отримаємо

$$Q_{\text{вих}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 |n_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega} \quad (4)$$

Величина  $|n_{\text{BX}}(\omega, T)|^2$  носить назву спектральної густини енергії шуму і позначається через  $F(\omega, T)$ , тоді можна записати

$$Q_{\text{вих}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 F(\omega, T) d\omega} \quad (5)$$

У випадку коли шум розподілений рівномірно від частоти  $-\omega_{\text{ш}}$  до  $\omega_{\text{ш}}$  із питомою енергією  $f$

$$F(\omega) = \begin{cases} f & |\omega| \leq \omega_{\text{ш}} \\ 0 & |\omega| > \omega_{\text{ш}} \end{cases} \quad (6)$$

відношення сигнал/шум набуває вигляду

$$Q_{\text{вих}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2 |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega}{f \int_{-\omega_{\text{ш}}}^{\omega_{\text{ш}}} |W(\omega)|^2 d\omega} \quad (7)$$

Якщо корисний сигнал сконцентрований у діапазонах частот  $[-\omega_1; -\omega_0]$  та  $[\omega_0; \omega_1]$ , а фільтр має на цих частотах коефіцієнт передачі рівний  $K$ , а на інших частотах його коефіцієнт передачі тотожно рівний  $0$ , то.

$$Q_{\text{вих}} = \frac{K^2 \left( \int_{-\omega_1}^{-\omega_0} |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1} |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega \right)}{f \int_{-\omega_1}^{-\omega_0} |W(\omega)|^2 d\omega + f \int_{\omega_0}^{\omega_1} |W(\omega)|^2 d\omega} = \frac{K^2 \int_{-\omega_1}^{-\omega_0} |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1} |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega}{K^2 (f(-\omega_0 + \omega_1) + f(\omega_1 - \omega_0))}$$

$$Q_{\text{вих}} = \frac{\int_{-\omega_1}^{-\omega_0} |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1} |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega}{2f(\omega_1 - \omega_0)} \quad (8)$$

При тих самих умовах відношення сигнал/шум для вхідного сигналу буде визначатись за формулою

$$Q_{\text{BX}} = \frac{\|s_{\text{BX}}\|^2}{\|n_{\text{BX}}\|^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{BX}}(\omega, T) \overline{s_{\text{BX}}(\omega, T)} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} n_{\text{BX}}(\omega, T) \overline{n_{\text{BX}}(\omega, T)} d\omega} = \frac{\int_{-\omega_1}^{-\omega_0} |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1} |s_{\text{BX}}(\omega, T)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega} \quad (9)$$

Отже виграш у співвідношенні сигнал-шум при використанні фільтра визначається за формулою

$$M = \frac{Q_{\text{вих}}}{Q_{\text{вх}}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega}{2f(\omega_1 - \omega_0)} = \frac{2f\omega_{\text{ш}}}{2f(\omega_1 - \omega_0)} = \frac{\omega_{\text{ш}}}{\omega_1 - \omega_0} \quad (10)$$

І тим він більший чим менша полоса корисних частот де сконцентрований корисний сигнал і менше смуга перепускання фільтра. Проте зниження полоси перепускання фільтра менше смуги частот корисного сигналу призводить до спотворення останнього, тому полосу перепускання фільтра не можна зробити меншою ніж полоса частот корисного сигналу. Крім того фільтр завжди має деяку перехідну полосу частот де його модуль коефіцієнта передачі зменшується до 0. Тому виграш вказаний вище можливий лише у випадку ідеальних елементів, проте із збільшенням порядку фільтра виграш від його використання буде зростати.

### Оптимальна фільтрація сигналів відомої форми

Частотно-вибірну систему, що виконує обробку суми сигналу і шуму деяким найкращим чином, називають оптимальним лінійним фільтром. Проблема оптимальної обробки суми відомого за формою сигналу і шуму виникає, наприклад, в радіолокації. Тут прийнятий корисний сигнал  $s_{\text{пр}}(f)$  є точна масштабна копія переданого сигналу  $s_{\text{пер}}(t)$ , тобто

$$s(t) = A s_{\text{пер}}(t-\tau) \quad (11)$$

причому постійне число  $A \ll 1$

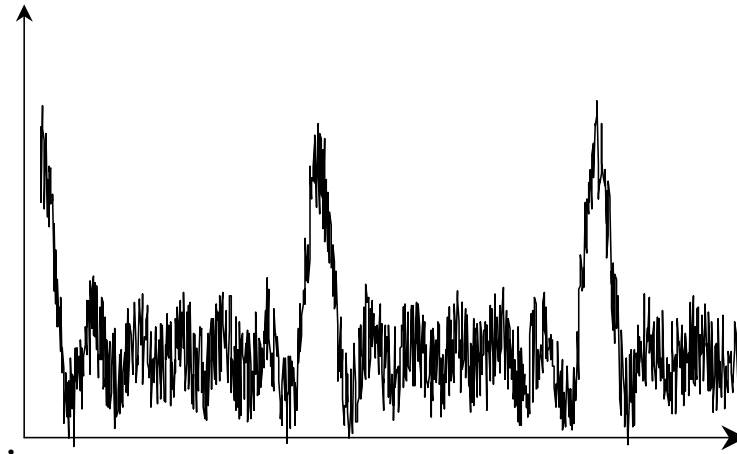


Рис. 1. Типовий сигнал із шумом

Амплітуда прийнятого сигналу може виявитися дуже малою і порівнянною з ефективною напругою шуму, що діє на вході приймача. Приймач радіолокатора виконує наступні операції:

а) виявляє сигнал, т. е. встановлює сам факт присутності відбитого сигналу в прийнятому коливанні;

б) вимірює час затримки  $\tau$ , пропорційний відстані.

При роботі радіолокаційної системи не потрібно зберігати форму корисного сигналу. Більш того, в процесі обробки бажано трансформувати корисний сигнал таким чином, щоб подача його на вхід фільтра приводила в певний момент часу до значного збільшення миттєвих значень вихідного колювання. Шумовий сигнал, будучи, як правило, гаусовим, характеризується малою вірогідністю великих викидів. Тому якщо вихідний сигнал в деякі моменти часу істотно перевершує напругу шуму, то це з великою ймовірністю свідчить про присутність корисного сигналу на вході приймача.

### Узгоджений лінійний фільтр

Нехай системою, що здійснює обробку суми сигналу і шуму, є стаціонарний лінійний фільтр з імпульсною перехідною функцією  $h(t)$ . Детермінований корисний сигнал  $s_{\text{вх}}(t)$  створює на виході фільтра відгук

$$s_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (12)$$

Зафіксуємо деякий, поки довільний момент часу  $t_0$  і постараємося так вибрати функцію  $h(t)$ , щоб величина  $|s_{\text{вих}}(t_0)|$  досягала максимально можливого значення. Якщо, така функція дійсно існує, то відповідний фільтр із такою імпульсною перехідною функцією називають фільтром, узгодженим із заданим вхідним сигналом або узгодженим фільтром.

$$s_{\text{вих}}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau \quad (13)$$

Цей сигнал будемо максимізувати за модулем. На підставі нерівності Коші - Буняковського

$$|s_{\text{вих}}(t_0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}^2(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t_0 - \tau)d\tau \quad (14)$$

Можна довести, що знак рівності має місце тоді, коли співмножники в підінтегрального виразі пропорційні один одному:

$$h(t_0 - \tau) = k s_{\text{вх}}(\tau) \quad (15)$$

де  $k$  — довільний коефіцієнт.

Виконавши формальну заміну змінної  $t = t_0 - \tau$ , отримуємо

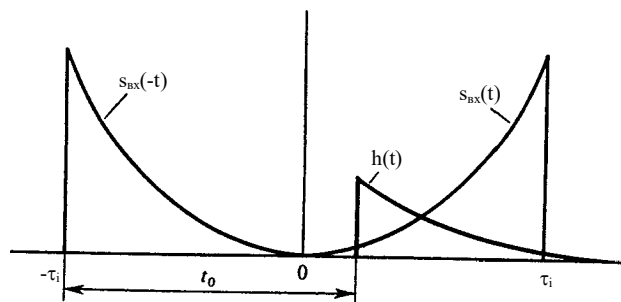
$$h(t) = k s_{\text{вх}}(t_0 - t) \quad (16)$$

Таким чином, імпульсна перехідна функція узгодженого фільтра є масштабною копією вхідного сигналу, що має детектувати фільтр, перернута відносно деякого початкового часу. Крім цього імпульсна характеристика узгодженого фільтра зміщена відносно сигналу  $s_{\text{вх}}(-t)$  на час  $t_0$ .

Наступний рисунок ілюструє принцип побудови імпульсної перехідної функції узгодженого фільтра відносно деякого сигналу  $s_{\text{вх}}(t)$  тривалістю  $\tau_i$ , що виникає при  $t = 0$ .

Аналізуючи рис. 2., можна сформулювати необхідну (але не достатню) умову фізичної реалізованості узгодженого фільтра: проміжок часу  $t_0$  між початком імпульсу на вході і моментом виникнення максимальної вихідної реакції повинен бути не менше тривалості імпульсу. В іншому випадку імпульсна характеристика системи буде відмінною від нуля при  $t < 0$ , тобто до моменту появи вхідного сигналу, що не можливо.

З іншого боку, для створення максимально можливого миттєвого значення сигналу на виході узгодженого фільтра він повинен попередньо провести обробку всього вхідного сигналу.



**Рис. 2. Побудова імпульсної характеристики узгодженого фільтра**  
**Передавальна функція узгодженого фільтра**

Оскільки імпульсна характеристика і передавальна функція лінійної стаціонарної системи зв'язані між собою перетворенням Фур'є, на підставі попередньої формули можна записати

$$W(j\omega) = k \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t_0 - t) \exp(-j\omega t) dt \quad (17)$$

Ввівши нову змінну інтегрування  $\xi = t_0 - t$  отримуємо:

$$W(j\omega) = k \exp(-j\omega t_0) \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\xi) \exp(j\omega \xi) d\xi \quad (18)$$

Якщо вхідний сигнал має спектральну щільність  $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\xi) \exp(-j\omega \xi) d\xi$ , то за

властивостями спектральної щільності

$$\overline{S(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\xi) \overline{\exp(-j\omega \xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\xi) \exp(j\omega \xi) d\xi$$

Отже

$$W(j\omega) = k \exp(-j\omega t_0) \overline{S(\omega)} \quad (19)$$

Передавальна функція узгодженого фільтра виражається через спектральну щільність корисного сигналу, для виділення якого цей фільтр призначений. Множник пропорційності в формулі (19) визначає рівень підсилення, внесеного фільтром. Значення моментів часу  $t_0$  входить лише у вираз фазової характеристики фільтра. При цьому співмножник  $\exp(-j\omega t_0)$  описує зсув вихідного відгуку фільтра по осі часу на величину  $t_0$ , котра має бути не меншою тривалості імпульсу.

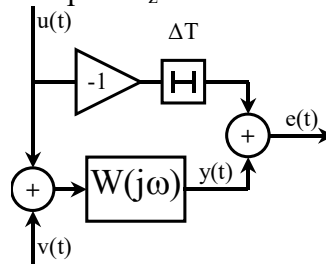
### Оптимальна фільтрація сигналів певного класу

На практиці точна форма корисного сигналу часто невідома. Тому реальний сигнал, що надходить можна розглядати як типову реалізацію зі деякого стаціонарного статистичного ансамблю, що характеризується заданим середнім енергетичним спектром. В радіоканалі, крім випадкових корисних сигналів, є завади. Як правило, спектри потужності корисних сигналів і завад в тій чи іншій мірі розрізняються перш за все своїм розташуванням на частотній осі. Це дозволяє знайти стаціонарний лінійний фільтр, який виділяє випадковий корисний сигнал деяким "найкращим чином".

Припустимо, що на вхід фільтра з передавальною функцією  $W(j\omega)$  одночасно подані два випадкових сигнали: корисний сигнал  $u(t)$ , та завада  $v(t)$ . Будемо вважати, що математичне сподівання  $M$  взаємного енергетичного спектра двох сигналів рівне 0. Тобто "у середньому" корисний сигнал та завада непов'язані між собою.

$$M(U(\omega)\overline{V(\omega)}) = 0$$

Для виділення сигналу помилки розглянемо уявний пристрій, що зображений на наступному рисунку. Так як фільтр обов'язково вносить деяку затримку у часі, будемо враховувати запізнення сигналу за допомогою лінії затримки на час  $\Delta T$ . Позначимо передавальну функцію лінії затримки через  $W_z$



**Рис. 3. Принцип отримання сигналу помилки**

Вихідний сигнал фільтра  $y(t)$  не є точною копією корисного сигналу  $u(t)$ , а відрізняється від нього на величину випадкового сигналу помилки.

$$e(t) = y(t) - u(t) \quad (20)$$

Перейшовши до спектральних щільностей можна записати спектральну щільність помилки

$$E(\omega) = Y(\omega) - W_z U(\omega) = (W - W_z) U(\omega) + W V(\omega) \quad (21)$$

Розглянемо тепер енергетичний спектр помилки сигналу

$$W_e(\omega) = |E(\omega)|^2 = E(\omega)\overline{E(\omega)}$$

$$W_e(\omega) = ((W - W_z)U(\omega) + WV(\omega))\overline{((W - W_z)U(\omega) + WV(\omega))} =$$

$$= (W - W_z)\overline{(W - W_z)}U(\omega)\overline{U(\omega)} + W\overline{W}V(\omega)\overline{V(\omega)} +$$

$$+ (W - W_z)\overline{W(j\omega)}U(\omega)\overline{V(\omega)} + (W)\overline{(W - W_z)}U(\omega)\overline{V(\omega)}$$

Враховуючі визначення енергетичного спектру сигналу отримаємо:

$$W_e(\omega) = |W - W_z|^2 |U(\omega)|^2 + |W|^2 |V(\omega)|^2 + (W - W_z)\overline{(W)}U(\omega)\overline{V(\omega)} +$$

$$+ (W)\overline{(W - W_z)}U(\omega)\overline{V(\omega)}$$

Математичне сподівання енергетичного спектру похибки дорівнює

$$M(W_e(\omega)) = M(|W - W_z|^2 |U(\omega)|^2) + M(|W|^2 |V(\omega)|^2) +$$

$$+ M((W - W_z)\overline{(W)}U(\omega)\overline{V(\omega)}) + M((W)\overline{(W - W_z)}U(\omega)\overline{V(\omega)})$$

Так як передавальна функція фільтра і лінії затримки не є випадковою величиною, то їх можна винести за оператор взяття математичного сподівання. Також позначимо математичне сподівання енергетичного спектру корисного сигналу через  $W_u(\omega)$ , а похибки через  $W_v(\omega)$

$$W_u(\omega) = M(|U(\omega)|^2) \quad W_v(\omega) = M(|V(\omega)|^2) \quad (22)$$

У нових позначеннях враховуючі, що  $M(U(\omega)\overline{V(\omega)}) = 0$  маємо

$$M(W_e(\omega)) = |W - W_z|^2 W_u(\omega) + |W|^2 W_v(\omega) \quad (23)$$

Запишемо передавальну функцію фільтра і лінії затримки у показниковій формі:

$$W = |W| \exp(j\Psi) \quad W_z = |W_z| \exp(j\Psi_z) \quad (24)$$

і розглянемо вираз  $|W - W_z|^2$ . Вочевидь

$$|W - W_z|^2 = (W - W_z)(\overline{W - W_z}) = W\overline{W} - W\overline{W_z} - \overline{W}W_z + W_z\overline{W_z}$$

$$|W - W_z|^2 = |W|^2 - |W||W_z| \exp(j\Psi) \exp(-j\Psi_z) - |W||W_z| \exp(-j\Psi) \exp(j\Psi_z) + |W_z|^2$$

$$|W - W_z|^2 = |W|^2 + |W_z|^2 - |W||W_z|(\exp(j(\Psi - \Psi_z)) + \exp(-j(\Psi - \Psi_z)))$$

$$|W - W_z|^2 = |W|^2 + |W_z|^2 - 2|W||W_z| \cos(\Psi - \Psi_z)$$

Дана величина буде мінімальною, якщо  $\cos(\Psi - \Psi_z) = 1$ , звідки випливає, що лінія затримки має давати такий самий фазовий зсув як і оптимальний фільтр. При такій умові:

$$|W - W_z|^2 = |W|^2 + |W_z|^2 - 2|W||W_z| = (|W| - |W_z|)^2 \quad (25)$$

Враховуючі, що модуль передавальної функції лінії затримки рівний 1 маємо

$$|W - W_z|^2 = (|W| - 1)^2$$

Тоді мінімальне значення математичного сподівання енергії помилки буде визначатись за формулою

$$M(W_e(\omega)) = (|W| - |W_z|)^2 M(|U(\omega)|^2) + M(|W|^2 |V(\omega)|^2) \quad (26)$$

$$M(W_e(\omega)) = (|W| - 1)^2 W_u + |W|^2 W_v \quad (27)$$

Легко перевірити, що мат. сподівання досягне мінімуму при

$$|W| = \frac{W_u}{W_u + W_v} \quad (28)$$

$$\text{Причому } M(W_e(\omega)) = \frac{W_u W_v}{W_u + W_v}$$

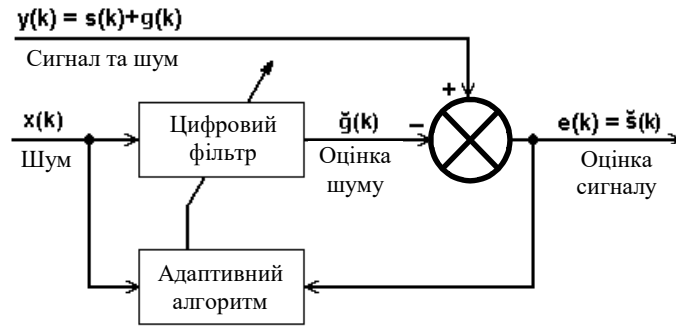
На фазочастотну характеристику накладається умова, що фільтр має давати таку саму затримку як і лінія затримки.

Отже модуль передавальної функції оптимального фільтра, що мінімізує середньоквадратичну помилку, повинен бути значним на тих частотах, де зосереджена основна частка потужності корисного сигналу. Там, де велика спектральна щільність потужності перешкоди, коефіцієнт передачі оптимального фільтра повинен зменшуватися.

### Адаптивні фільтри

Адаптивні пристрою обробки даних відрізняються наявністю певної зв'язку параметрів передавальної функції з параметрами вхідних, вихідних, очікуваних, передбачуваних та інших додаткових сигналів або з параметрами їхніх статистичних співвідношень, що дозволяє налаштуватися на оптимальну обробку сигналів. В найпростішому випадку, адаптивний пристрій містить програмований фільтр обробки даних і блок (алгоритм) адаптації, який на підставі певної програми аналізу вхідних, вихідних та інших додаткових даних виробляє сигнал управління параметрами програмованого фільтра. Імпульсна характеристика адаптивних систем також може мати як скінчений, так і нескінченний характер. При побудові алгоритмів адаптації широко застосовують різні евристичні підходи.





**Рис. 4. Адаптивний фільтр**

Як правило, адаптивні пристрої виконуються вузькоспеціалізованого функціонального призначення під певні типи сигналів. Внутрішня структура адаптивних систем і алгоритм адаптації практично повністю регламентуються функціональним призначенням і певним мінімальним об'ємом вихідної апріорної інформації про характер вхідних даних та їх статистичних та інформаційних параметрах. Це породжує різноманіття підходів при розробці систем, істотно утруднює їх класифікацію і розробку загальних теоретичних положень. Але можна відзначити, що найбільше застосування при розробці систем для адаптивної обробки сигналів знаходять два підходи: на основі схеми найменших квадратів (РНК) і рекурсивної схеми найменших квадратів (РСНК).

При використанні схеми найменших квадратів визначення (кажуть також "оцінка") параметрів фільтра здійснюється на основі деякої тестової вибірки даних, і далі фільтр більше не змінює свої параметри. Серед адаптивних фільтрів із нерекурсивною схемою найменших квадратів найбільше застосування знайшли фільтри Вінера.

При використанні рекурсивної схеми найменших квадратів визначення параметрів фільтра здійснюється у реальному часі на основі даних, що отримуються і підлаштування фільтра здійснюється на кожному етапі його роботи. Серед адаптивних фільтрів із рекурсивною схемою найменших квадратів найбільше застосування знайшли фільтри Калмана.

#### **Фільтр Калмана**

Прикладом найпростішого адаптивного фільтра є фільтр Калмана. Розглянемо його роботу на прикладі найпростішого випадку із одною ступеню свободи. Так як структура фільтра і базові рівняння фільтра змінюються при переході від неперервного до дискретного часу розглянемо роботу дискретного варіанта фільтра Калмана. Нехай необхідно визначити величину сигналу  $x$ , що змінюється за певним законом

$$x_k = x_{k-1} + u_k \quad (29)$$

залежно від наближено відомого попереднього значення  $x_{k-1}$  та деякої зміни  $u_k$ . За рахунок випадкових флуктуацій до сигналу додається деяка випадкова складова  $\xi_k$

$$x_k = x_{k-1} + \xi_k \quad (30)$$

При вимірюванні сигналу  $x$ , також виникає похибка  $\eta_k$ , що теж є випадковою величиною. У результаті з давача отримується сигнал  $z$ :

$$z_k = x_k + \eta_k$$

Задача калмановської фільтрації заключається у пошуку оптимального наближення  $u_k$  початкового неспотвореного сигналу  $x_k$  на основі даних давача  $z_k$ .

Для визначеності вводять такі гіпотези:

- $u_k$  - відома величина, що контролює еволюцію системи.
- помилка моделі  $\xi_k$  та помилка давача  $\eta_k$  — випадкові величини, котрі мають закони розподілу, що не залежать від часу (тобто від  $k$ ).
- математичні сподівання помилок  $M(\xi_k) = M(\eta_k) = 0$  і  $M(\eta_{k+1}\xi_k) = 0$ .
- Закон розподілу випадкових величин можливо не відомий, але відомі дисперсії  $\sigma^2(\xi)$  та  $\sigma^2(\eta)$  і відомо, що вони не залежать від часу
- вважається, що всі випадкові величини незалежні одна від одної і від часу.

#### **Алгоритм роботи**

Нехай на  $k-1$ -му кроці вже знайдено відфільтроване значення з давача  $x_{k-1}^{opt} = u_k$ , котре наближає істину координату системи  $x_k$ . Тоді за рівнянням, що контролює невідому координату

х можна знайти оцінку нового значення координати:

$$x_{k+1} = x_k + \xi_{k+1}$$

тому, не отримуючі значення з давача, можна вважати, що на  $k+1$  кроці сигнал на система еволюціонує згідно наведеному вище закону і давач покаже значення із математичним сподіванням  $y_k + u_k$ . З іншого боку у момент  $k+1$  давач визначить показ  $z_{k+1}$ . Ідея фільтрації полягає у тому, щоб використовуючи обидва отриманих значення обрати деяке зважене середнє між ними :

$$y_{k+1} = K_{k+1}z_{k+1} + (1 - K_{k+1})(y_k + u_k) \quad (31)$$

у формулі коефіцієнт  $K_{k+1}$  називається коефіцієнтом Калмана. На відміну від стаціонарних фільтрів, у фільтрі Калмана  $K_{k+1}$  залежить від номеру ітерації. Для розрахунку наступного значення необхідно обрати значення  $K_{k+1}$ , таким чином, щоб отримати значення сигналу  $y_{k+1}$  максимально близьке до реального  $x_{k+1}$ .

Розглянемо помилку наближення, що визначається таким чином:

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= x_{k+1} - y_{k+1} = (x_k + u_k + \xi_k) - (K_{k+1}z_{k+1} - (1 - K_{k+1})(y_k + u_k)) = \\ &= x_k + u_k + \xi_k - K_{k+1}(x_k + u_k + \xi_k + \eta_{k+1}) - (1 - K_{k+1})(y_k + u_k) = \\ &= (1 - K_{k+1})(x_k - y_k + \xi_k) - K_{k+1}\eta_{k+1} = (1 - K_{k+1})(e_k - \xi_k) - K_{k+1}\eta_{k+1} \end{aligned} \quad (32)$$

Отже помилка визначається через рекурентне співвідношення

$$e_{k+1} = (1 - K_{k+1})(e_k - \xi_k) - K_{k+1}\eta_{k+1} \quad (33)$$

Визначимо вираз для квадрата похибки

$$\begin{aligned} e_{k+1}^2 &= ((1 - K_{k+1})(e_k - \xi_k))^2 - 2(K_{k+1}\eta_{k+1})(1 - K_{k+1})(e_k - \xi_k) + (K_{k+1}\eta_{k+1})^2 = \\ &= ((1 - K_{k+1})^2(e_k^2 - 2e_k\xi_k + \xi_k^2)) - 2K_{k+1}\eta_{k+1}e_k(1 - K_{k+1}) + 2K_{k+1}\eta_{k+1}\xi_k(1 - K_{k+1}) + K_{k+1}^2\eta_{k+1}^2 \end{aligned}$$

Запишемо математичне сподівання квадрату похибки, одночасно враховуємо, що математичне сподівання невідповідних величин рівно самій величині.

$$\begin{aligned} M(e_{k+1}^2) &= (1 - K_{k+1})^2(M(e_k^2) - 2M(e_k\xi_k) + M(\xi_k^2)) - 2K_{k+1}M(\eta_{k+1})e_k(1 - K_{k+1}) + \\ &+ 2K_{k+1}M(\eta_{k+1}\xi_k)(1 - K_{k+1}) + K_{k+1}^2M(\eta_{k+1}^2) \end{aligned}$$

Так як середні значення випадкових величин  $\xi$  та  $\eta$  рівні 0, ( $M(\xi_k) = 0$ ,  $M(\eta_{k+1}) = 0$ ), а величини  $M(\eta_{k+1}\xi_k) = 0$  останній вираз значно спроститься:

$$M(e_{k+1}^2) = (1 - K_{k+1})^2(M(e_k^2) + M(\xi_k^2)) + K_{k+1}^2M(\eta_{k+1}^2) \quad (34)$$

Знайдемо умову мінімуму математичного сподівання похибки. Для цього знайдемо похідну

$$\frac{\partial M(e_{k+1}^2)}{\partial K_{k+1}} = -2(1 - K_{k+1})(M(e_k^2) + M(\xi_k^2)) + 2K_{k+1}M(\eta_{k+1}^2) \quad (35)$$

Похибка буде мінімальною якщо

$$-2(1 - K_{k+1})(M(e_k^2) + M(\xi_k^2)) + 2K_{k+1}M(\eta_{k+1}^2) = 0 \quad (36)$$

отже значення коефіцієнта  $K_{k+1}$

$$K_{k+1} = \frac{M(e_k^2) + M(\xi_k^2)}{M(e_k^2) + M(\xi_k^2) + M(\eta_k^2)} \quad (37)$$

Перепишемо вираз математичного сподівання квадрату випадкової величини через дисперсію, отримаємо:

$$K_{k+1} = \frac{M(e_k^2) + \sigma^2(\xi)}{M(e_k^2) + \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)} \quad (38)$$

Підставляючи у вираз для середньо квадратичної похибки  $M(e_{k+1}^2)$ , коефіцієнт Калмана  $K_{k+1}$  отримаємо:

$$M(e_{k+1}^2) = \frac{\sigma^2(\eta)(M(e_k^2) + \sigma^2(\xi))}{M(e_k^2) + \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)} \quad (39)$$

Отже отримано ітераційні формули, для обчислення коефіцієнта Калмана. У якості початкових значень приймають:

$$y_0 = z_0, M(e_0^2) = E(\eta_0^2) = \sigma^2(\eta) \quad (40)$$

Алгоритм обчислень для фільтра Калмана наведений нижче:

1. Задатись значеннями  $y_0 = z_0$ ,  $M(e_0^2) = E(\eta_0^2) = \sigma^2(\eta)$ ,  $k = 1$

2. Обчислити коефіцієнт підсилення Калмана

$$K_{k+1} = \frac{M(e_k^2) + \sigma^2(\xi)}{M(e_k^2) + \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)}$$

3. Визначити значення з давача  $z_k$

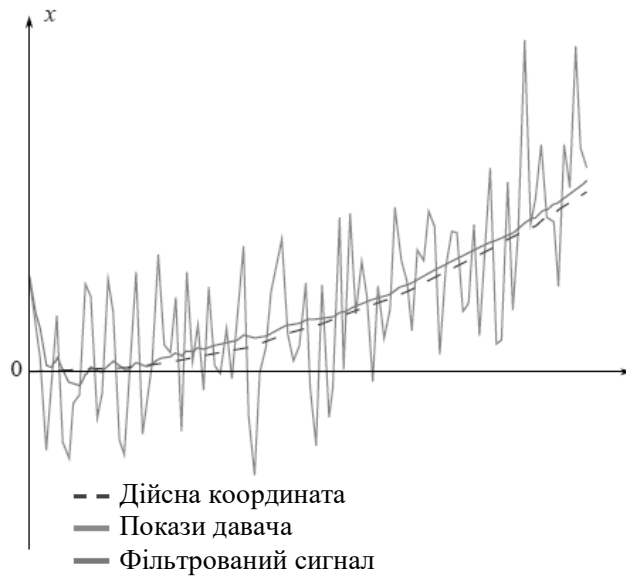
4. Обчислити значення  $y_{k+1} = K_{k+1}z_{k+1} + (1 - K_{k+1})(y_k + u_k)$

5. Обчислити значення дисперсії помилки

$$M(e_{k+1}^2) = \frac{\sigma^2(\eta)(M(e_k^2) + \sigma^2(\xi))}{M(e_k^2) + \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)}$$

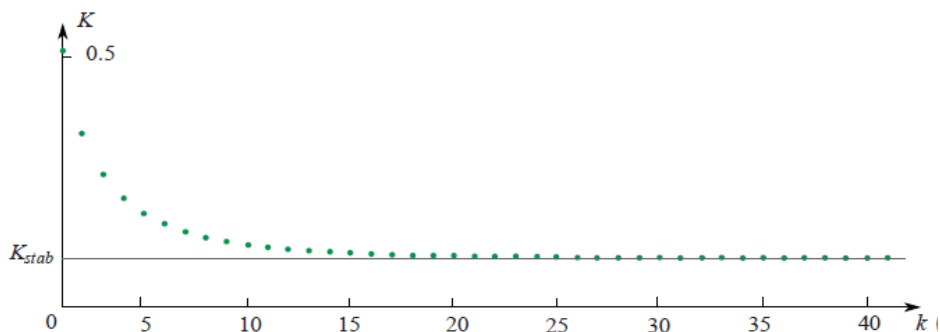
6. Повернутись на п.2.

Робота фільтра Калмана показана на наступному рисунку



**Рис. 5. Робота фільтра Калмана**

Якщо прослідкувати як веде себе коефіцієнт Калмана, то  $K_k$ , то можна показати, що він завжди стабілізується до деякого визначеного значення  $K_k$ . Наприклад якщо середньоквадратичні похибки давача і моделі відносяться як 10 до 1 то графік коефіцієнта Калмана виглядає так як показано на наступному рисунку.



**Рис. 6. Зміна коефіцієнта підсилення Калмана**

### Завдання до лабораторної роботи

1. Синтезувати оптимальний фільтр, коли на сигнал накладається білий шум з заданою дисперсією. Тривалість сигналу 2. Крок за часом  $10^{-2}$  с. На вхід фільтра буде подаватись низькочастотний сигнал заданий згідно варіанту.

Фільтр зробити трансверсальним

Варіант	Сигнал	Дисперсія шуму	Варіант	Сигнал	Дисперсія шуму
1	$\sin(t)$	0.2	6	$\cos(t)$	0.2
2	$1 - \exp(-t)$	0.2	7	$1 - \cos(-t)$	0.2
3	$1 - \exp(-t) \sin(2t)$	0.2	8	$1 - \sin(2t)$	0.2
4	$1 - \exp(-2t)$	0.2	9	$1 - \cos(-2t)\exp(t)$	0.2
5	$1 - \exp(-t)$	0.2	10	$1 - \exp(-t)$	0.2

2. Синтезувати фільтр Калмана для сигналу із дисперсією похибки давача 0.2 та дисперсією похибки моделі 0.1. Пропустити заданий у варіанті сигнал через фільтр і побудувати графік вихідного сигналу.

3. Порівняти отримані результати та зробити висновки.

### Контрольні запитання

1. Що таке відношення сигнал-шум?
2. Запишіть рекурсивну формулу калмановської оцінки першого порядку випадкового сигналу.
3. Наведіть вираз для середньоквадратичної похибки калмановської оцінки.
4. Опишіть алгоритм рекурсивного адаптивного оцінювання першого порядку.
5. Зобразіть структурну схему скалярного фільтра Калмана.
6. Що таке оптимальний фільтр?
7. Чи зберігає форму сигналу узгоджений лінійний фільтр?

## Література

1. Бабак В. П. Обробка сигналів: підручник для вузів / В. П. Бабак, А. І. Хандецький, Е. Шрюфер – Київ: Либідь, 1996. – 390 с.
2. Ваврук Є. Я. Цифрове опрацювання сигналів та зображень, алгоритми та реалізація: навчальний посібник / Є. Я. Ваврук, Р. Б. Попович – Національний університет “Львівська політехніка”, 2008. – 147 с.
3. Яцимірський М. М. Швидкі алгоритми ортогональних тригонометричних перетворень / М. М. Яцимірський // – Львів: Академічний Експрес, 1997. – 219 с.
4. Ваврук Є. Я. Моделі контролю і діагностики систем опрацювання сигналів / Є. Я. Ваврук, В. А. Коваль // Збірник наукових праць “Моделювання та інформаційні технології”. – Інститут проблем моделювання в енергетиці НАНУ, 2006 – Випуск 35. – С. 131–139.
5. Наконечний А. Й. Цифрова обробка сигналів: Навчальний посібник / А. Й. Наконечний, Р. А. Наконечний, В. А. Павлиш. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2010. – 368 с.
6. Дробик О. В. Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник / О. В. Дробик, В. В. Кідалов, В. В. Коваль, Б. Я. Костік, В. С. Лазебний, Г. М. Розорінов, Г. О. Сукач. – К.: Наукова думка, 2008. – 144 с.
7. Бондарев В. Н. Цифрова обробка сигналів, методи і засоби: підручник для вузів / В. Н. Бондарев, Г. Трестер, В. С. Чернега. – Харків: Конус, 2001. – 398 с.
8. Рибальченко М.О. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник / М. О. Рибальченко, О. П. Єгоров, В. Б. Зворикін. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
9. Пісьціо В.П. Методичні вказівки до лабораторної роботи № 7 "Цифрові фільтри" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". В.П. Пісьціо, В.Р. Медвідь, П.М. Микулик. – Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 18 с.
10. Пісьціо В.П. Методичні вказівки до лабораторної роботи №2 "Дослідження шумів аналого-цифрового перетворювача та способи їх зменшення" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". В.П. Пісьціо, В.Р. Медвідь, П.М. Микулик. – Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 13 с.
11. Gales M. The Application of Hidden Markov Models in Speech Recognition / M. Gales, S. Young // Foundations and Trends in Signal Processing. – 2007. – Vol. 1, No. 3. – P. 195–304.
12. Hudson G. JPEG-1 standard 25 years: past, present, and future reasons for a success / G. Hudson, A. Léger, B. Niss, I. Sebestyén, J. Vaaben // Journal of Electronic Imaging. – 2018. – Vol. 27, No. 4. – 040901.
13. Rabiner L. Fundamental of Speech Recognition / L. Rabiner, B. H. Juang, B. Yegnanarayana – New Delhi, India: Pearson Education Inc., 2009. – 497 p.
14. Shapiro J. M. Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients / J. M. Shapiro // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1993. – Vol. 41, No. 12. – P. 3445–3462.
15. Xiong Z. The Essential Guide to Image Processing / Z. Xiong, K. Ramchandran (Ed. A. C. Bovik) – NY: Academic Press, 2009. – P. 463–493, Ch. 18: Wavelet Image Compression.

## Зміст

Лабораторна робота №8 .....	3
Тема роботи .....	3
Мета роботи.....	3
Задача оптимальної фільтрації сигналів.....	3
Відношення сигнал-шум .....	3
Оптимальна фільтрація сигналів відомої форми .....	5
Узгоджений лінійний фільтр.....	5
Передавальна функція узгодженого фільтра.....	6
Оптимальна фільтрація сигналів певного класу .....	7
Адаптивні фільтри.....	8
Фільтр Калмана .....	9
Алгоритм роботи .....	9
Завдання до лабораторної роботи.....	12
Література .....	13
Зміст .....	14