

Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

Кафедра автоматизації
технологічних процесів
і виробництв

Лабораторна робота № 6
з курсу
*”Цифрова обробка сигналів та
зображень”*

Дослідження нестационарних
сигналів спектральними
методами

Тернопіль 2023

Методичні вказівки до лабораторної роботи № 6 "Дослідження нестационарних сигналів спектральними методами" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". Пісьціо В.П., Медвідь В.Р., Микулик П.М. Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 8 с.

Для студентів напряму: 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Автори: Пісьціо В.П., Медвідь В.Р., Микулик П.М.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 1 від 30.08.2023 року)

Лабораторна робота №6

Тема роботи

Дослідження нестационарних сигналів спектральними методами.

Мета роботи

Ознайомитись із поняттям поточного спектру і методами спектрального аналізу нестационарних сигналів.

Теоретичні відомості

За основним визначенням спектральна щільність виражається формулою

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1)$$

Таким чином, для знаходження спектра необхідно виконати інтегрування за часом в нескінченних межах. Це можливо, якщо функція $f(t)$ задана і відома на всьому протязі осі часу. Але якщо функція $f(t)$ є відображенням деякого реального фізичного процесу, і якщо весь хід цього процесу не може бути в точності передбачений на підставі теоретичних міркувань, то відомості про функції $f(t)$, отримуються лише в результаті спостережень. Тому ми можемо виконати інтегрування не в нескінченних межах, як цього вимагає визначення (1), а лише до поточного моменту. Минулі часи, у принципі, можуть бути відомі, так що інтегрування може бути виконано в межах від $-\infty$ до поточного часу t . Змінена таким чином визначення спектру набуває вигляду:

$$S(\omega, t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau \quad (2)$$

Величина $S(\omega, t)$, є функцією частоти і часу, носить назву поточного спектра. Крім того спостереження процесу (або самий процес) фактично може починатися в певний момент t_0 , що знаходиться в минулому на кінцевому відстані від поточного моменту t . У цьому випадку момент t_0 може бути прийнятий за початок відліку часу, і ми можемо визначити спектр наступним чином:

$$S(\omega, t) = \int_{t_0}^t f(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau \quad (3)$$

Виникає питання чи можна взагалі спрямувати до t_0 до t і визначити вклад у спектр окремого відліку сигналу. Для цього побудуємо поточний спектр синусоїди при збільшенні t . Застосовуючи визначення (3) і підставляючи в нього $f(t) = \sin \Omega t$ і $t_0 = 0$ знайдемо:

$$S(\omega, t) = \int_0^t \sin(\Omega \tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau = \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} (\Omega - \exp(-j\omega t) (\Omega \cdot \cos(\Omega t) + j\omega \sin(\Omega t))) \quad (4)$$

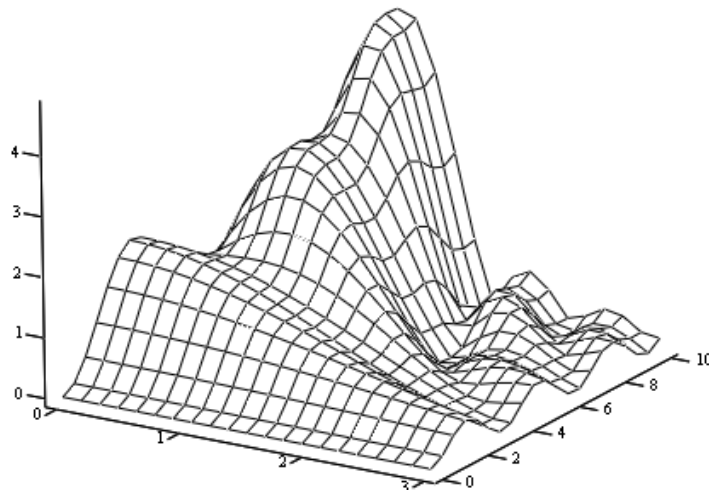


Рис. 1. Зміна поточного спектру при збільшенні інтервалу часу

Поточний спектр синусоїди, обчислений за формулою (5), представлений на рисунку у

вигляді рельєфу.

По горизонтальній осі, що лежить в площині креслення, відкладена відношення частот ω/Ω , по горизонтальній осі, спрямованій від глядача - час по осі ординат - модуль спектральної щільності. Рисунок показує, що спочатку спектр виходить однорідним; лише поступово формується максимум на частоті Ω ; він стає все більш і більш гострим, але лише в межі при $t \rightarrow \infty$ фігура перетвориться в дискретну спектральну лінію. Отже неможливо визначити спектр для окремого відліку сигналу.

Проте при аналізі нестационарних процесів часто виникає задача знаходження моментів появи та зміни частот необхідно знайти появу чи зникнення окремих гармонійних складових. Цю задачу можна визначити якщо узагальнити введене вище поняття поточного спектру.

Звичайне визначення спектру (1) дає функцію частоти: залежність від часу випадає, так як спектр відображає процес в цілому. Визначення поточного спектра (2) відображає всю попередню історію процесу. Але має, очевидно, сенс і поняття про спектр, що "змінюється в часі", і що відбиває властивості процесу в даний момент. Найпростіше визначення миттєвого спектра може бути, дано в наступному вигляді::

$$S(\omega, t) = \int_{t-T}^t f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (5)$$

тобто миттєвий спектр визначено, як спектр відрізка процесу тривалістю T , що безпосередньо передує даному моменту t . У цьому визначенні інтервал інтегрування має постійну довжину, але переміщається по осі часу - розташування інтервалу незмінно щодо поточного часу t . Можна і ще більш узагальнити визначення миттєвого спектра, за допомогою ковзаючої віконної функції $w(\tau-t)$, у такому випадку визначення набирає вигляду:

$$S(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) w(\tau - t) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (6)$$

Легко бачити, що визначення (5) - окремий випадок (6), якщо взяти вагову функцію у вигляді

$$w(x) = \sigma(x + T) - \sigma(x)$$

$$\text{де } \sigma(x) - \text{функція включення } \sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Також широко розповсюджена віконна функція [7] у вигляді:

$$w(x) = \exp(\alpha x) \cdot \sigma(-x)$$

Ця функція враховує все минуле процесу, але з вагою, що спадає у міру віддалення від біжучого моменту. Підставою для такого вибору вагової функції є те що вона виражає фактичний результат спектрального аналізу за допомогою неперервних фільтрів, що характеризуються сталою часу $1/\alpha$. Проте, звичайно, минуле процесу для від'ємних часів не відомо, тому нижню межу інтегрування доводиться встановлювати рівною 0, а для того, щоб значення спектру постійного сигналу $s(t) = 1$ при нульовій частоті не змінювались у часі доводиться у вагову функцію вводити нормуючий множник $b(t)$.

Отже остаточний вираз для визначення миттєвого спектру набуде виду:

$$S(\omega, t) = b(t) \int_0^t f(\tau) \exp(\alpha(\tau - t)) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

Для того, щоб значення спектру постійного сигналу при нульовій частоті не змінювались у часі необхідно, щоб

$$S(0, t) = b(t) \int_0^t \exp(\alpha(\tau - t)) d\tau = \text{const} = b(t) \exp(-\alpha t) \int_0^t \exp(\alpha\tau) d\tau =$$

$$S(0, t) = b(t) \exp(-\alpha t) \frac{\exp(\alpha t) - 1}{\alpha} = b(t) \frac{1 - \exp(-\alpha t)}{\alpha} = \text{const}$$

Якщо взяти $S(0, t) = 1$, тоді

$$b(t) = \frac{\alpha}{1 - \exp(-\alpha t)}$$

Отже отримуємо остаточно формулу для поточного спектру:

$$S(\omega, t) = \frac{\alpha}{1 - \exp(-\alpha t)} \int_0^t f(\tau) \exp(\alpha(\tau - t)) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

Тимчасово введемо заміну

$$S(\omega, t) = \frac{\alpha \cdot Q(\omega, t)}{1 - \exp(-\alpha t)}$$

Проведемо елементарні перетворення, отримаємо:

$$Q(\omega, t) = \exp(-\alpha t) \int_0^t f(\tau) \exp((\alpha - j\omega)\tau) d\tau$$

Перейдемо тепер до дискретного часу $t_n = \Delta t \cdot n$

$$Q(\omega, t_n) = \exp(-\alpha t_n) \int_0^{t_n} f(\tau) \exp((\alpha - j\omega)\tau) d\tau$$

Для подальшого розгляду буде необхідно визначити значення інтеграла через $Q(\omega, t_{n-1})$. Його легко отримати із наведеної вище формули:

$$\int_0^{t_{n-1}} f(\tau) \exp((\alpha - j\omega)\tau) d\tau = \frac{1}{\exp(-\alpha t_{n-1})} \cdot Q(\omega, t_{n-1})$$

Визначимо тепер $Q(\omega, t_n)$ через $Q(\omega, t_{n-1})$ у попередній момент часу:

$$Q(\omega, t_n) = \exp(-\alpha t_n) \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau) \exp((\alpha - j\omega)\tau) d\tau + \int_0^{t_{n-1}} f(\tau) \exp((\alpha - j\omega)\tau) d\tau \right)$$

Підставимо у формулу отриманий вище інтеграл і розкриємо дужки:

$$Q(\omega, t_n) = \exp(-\alpha t_n) \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau) \exp((\alpha - j\omega)\tau) d\tau + \frac{1}{\exp(-\alpha t_{n-1})} \cdot Q(\omega, t_{n-1}) \right)$$

$$Q(\omega, t_n) = \exp(-\alpha t_n) \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau) \exp((\alpha - j\omega)\tau) d\tau + \exp(-\alpha \Delta t) \cdot Q(\omega, t_{n-1})$$

Користуючись формулою трапецій наближено обчислимо інтеграл

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau) \exp((\alpha - j\omega)\tau) d\tau = \frac{1}{2} f(t_n) \exp((\alpha - j\omega)t_n) \Delta t + \frac{1}{2} f(t_{n-1}) \exp((\alpha - j\omega)t_{n-1}) \Delta t$$

Тоді

$$Q(\omega, t_n) = \frac{1}{2} f(t_n) \exp(-j\omega t_n) \Delta t + \frac{1}{2} f(t_{n-1}) \exp(-j\omega t_{n-1}) \Delta t \exp(-\alpha \Delta t) + \exp(-\alpha \Delta t) Q(\omega, t_{n-1})$$

$$Q(\omega, t_n) = \frac{1}{2} f(t_n) \exp(-j\omega t_n) \Delta t + \left(\frac{1}{2} f(t_{n-1}) \exp(-j\omega t_{n-1}) \Delta t + Q(\omega, t_{n-1}) \right) \exp(-\alpha \Delta t)$$

Недоліком отриманого виразу є необхідність формувати на кожному кроці нове значення $\exp(-j\omega t_n)$, котре залежить від n . Якщо не має потреби у визначенні фазового спектру, то можна перейти до зміщеного спектру

$$F(\omega, t_n) = \exp(j\omega t_n) S(\omega, t_n), \quad P(\omega, t_n) = \exp(j\omega t_n) Q(\omega, t_n)$$

$$P(\omega, t_n) = \frac{1}{2} f(t_n) \Delta t + \left(\frac{1}{2} f(t_{n-1}) \exp(j\omega \Delta t) \Delta t + Q(\omega, t_{n-1}) \exp(j\omega t_{n-1}) \right) \exp(-\alpha \Delta t)$$

$$P(\omega, t_n) = \frac{1}{2} f(t_n) \Delta t + \left(\frac{1}{2} f(t_{n-1}) \exp(j\omega \Delta t) \Delta t + \exp(j\omega \Delta t) P(\omega, t_{n-1}) \right) \exp(-\alpha \Delta t)$$

$$P(\omega, t_n) = \frac{1}{2} f(t_n) \Delta t + \left(\frac{1}{2} f(t_{n-1}) \Delta t + P(\omega, t_{n-1}) \right) \exp(-\alpha \Delta t + j\omega \Delta t)$$

Отже отримана рекурентна формула для обчислення $P(\omega, t_n)$ на основі біжучої вибірки та попереднього значення $P(\omega, t_n)$, а амплітудне значення спектральної щільності у такому випадку визначається за формулою

$$S(\omega, t_n) = \exp(j\omega t_n) \frac{\alpha \cdot P(\omega, t_n)}{1 - \exp(-\alpha t_n)}$$

Побудуємо схему пристрою, що може реалізувати таке співвідношення (рис. 2). Знак

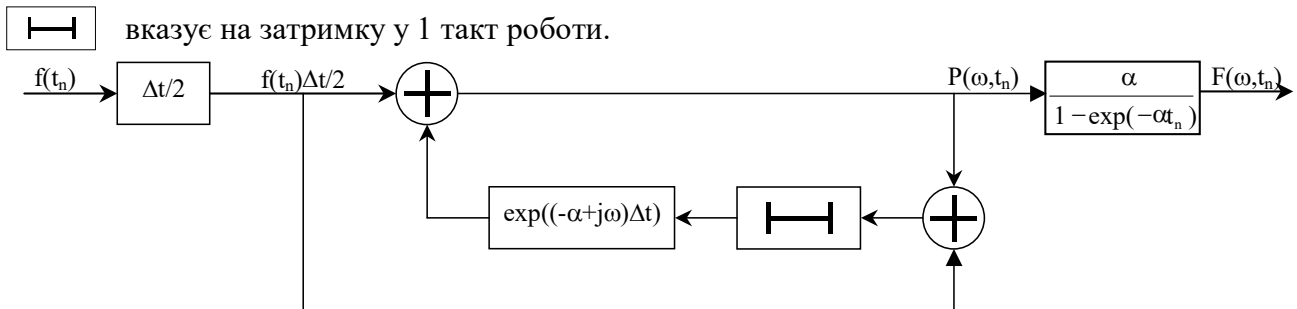


Рис. 2. Структурна схема пристрою для виявлення біжучої частоти.

Із схеми видно, що для формування кожного наступного відліку спектра для кожної частоти необхідно проводити два множення: одне на дійсну константу, а друге - на комплексну і два сумування. Також необхідно зберігати одне проміжне значення на протязі одного такту.

При обчисленнях на простих апаратних засобах можна врахувати, що $\exp(-\alpha t_n)$ наближено рівна 0 для часів $t_n > 3/\alpha$.

Зрозуміло, що при великій кількості частот і наявності готових масивів даних така схема не буде мати переваг над швидким перетворенням Фур'є, проте при роботі у реальному часі і при наявності лише невеликого переліку частот, наявність котрих необхідно визначити дана схема обчислень має деякі переваги.

Існують і інші визначення поточного спектру. Наприклад можна вказати, що

$$S(\omega, t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) w(\tau - t) d\tau$$

де $w(\tau - t)$ наприклад, віконна функція Хемінга, проте використання такої функції потребує значно складнішого алгоритму обчислень. Частково виправити ситуацію може дозволити використання вагової функції виду

$$w(x) = \alpha x \exp(-\alpha x) \exp(-1) \cdot \sigma(-x)$$

Проте використання такого методу виходить далеко за межі лабораторної роботи.

Хід роботи

1) Провести стаціонарний Фур'є аналіз сигналу

$$y(t) = \begin{cases} a \cos(\omega_1 t) + b \cos(\omega_2 t) & \text{при } t > t_0 \\ a \cos(\omega_1 t) & \text{при } t < t_0 \end{cases}$$

із параметрами вказаними викладачем.

2) Використовуючи наведений вище алгоритм провести аналіз наведеного вище сигналу

3) Розбивши діапазон зміни часу на піддіапазони з кроком 1 с провести Фур'є аналіз на кожному інтервалі

4) Порівняти результати аналізу.

Контрольні запитання

1. Чи дозволяє звичайний спектральний аналіз визначити прояву окремої складової?
2. Чи можна визначити спектр сигналу за окремим відліком? А за двома відліками?
3. Що таке спектрограма сигналу?

Література

1. Бабак В. П. Обробка сигналів: підручник для вузів / В. П. Бабак, А. І. Хандецький, Е. Шрюфер – Київ: Либідь, 1996. – 390 с.
2. Ваврук Є. Я. Цифрове опрацювання сигналів та зображень, алгоритми та реалізація: навчальний посібник / Є. Я. Ваврук, Р. Б. Попович – Національний університет “Львівська політехніка”, 2008. – 147 с.
3. Яцимірський М. М. Швидкі алгоритми ортогональних тригонометричних перетворень / М. М. Яцимірський // – Львів: Академічний Експрес, 1997. – 219 с.
4. Ваврук Є. Я. Моделі контролю і діагностики систем опрацювання сигналів / Є. Я. Ваврук, В. А. Коваль // Збірник наукових праць “Моделювання та інформаційні технології”. – Інститут проблем моделювання в енергетиці НАНУ, 2006 – Випуск 35. – С. 131–139.
5. Ваврук Є. Я. Організація контролю та діагностики ШПФ-схем у режимі реального часу в системах опрацювання сигналів / Є. Я. Ваврук // Вісник НУ “Львівська політехніка”, комп’ютерні системи та мережі. – 2004. – № 523. – С 24–29.
6. Наконечний А. Й. Цифрова обробка сигналів: Навчальний посібник / А. Й. Наконечний, Р. А. Наконечний, В. А. Павлиш. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2010. – 368 с.
7. Дробик О. В. Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник / О. В. Дробик, В. В. Кідалов, В. В. Коваль, Б. Я. Костік, В. С. Лазебний, Г. М. Розорінов, Г. О. Сукач. – К.: Наукова думка, 2008. – 144 с.
8. Бондарев В. Н. Цифрова обробка сигналів, методи і засоби: підручник для вузів / В. Н. Бондарев, Г. Трестер, В. С. Чернега. – Харків: Конус, 2001. – 398 с.
9. Рибальченко М.О. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник / М. О. Рибальченко, О. П. Єгоров, В. Б. Зворикін. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
10. Пісьціо В.П. Методичні вказівки до лабораторної роботи № 5 "Кореляційний аналіз сигналів" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". В.П. Пісьціо, В.Р. Медвідь, П.М. Микулик. Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 15 с.
11. Gales M. The Application of Hidden Markov Models in Speech Recognition / M. Gales, S. Young // Foundations and Trends in Signal Processing. – 2007. – Vol. 1, No. 3. – P. 195–304.
12. Hudson G. JPEG-1 standard 25 years: past, present, and future reasons for a success / G. Hudson, A. Léger, B. Niss, I. Sebestyén, J. Vaaben // Journal of Electronic Imaging. – 2018. – Vol. 27, No. 4. – 040901.
13. Rabiner L. Fundamental of Speech Recognition / L. Rabiner, B. H. Juang, B. Yegnanarayana – New Delhi, India: Pearson Education Inc., 2009. – 497 p.
14. Shapiro J. M. Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients / J. M. Shapiro // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1993. – Vol. 41, No. 12. – P. 3445–3462.
15. Xiong Z. The Essential Guide to Image Processing / Z. Xiong, K. Ramchandran (Ed. A. C. Bovik) – NY: Academic Press, 2009. – P. 463–493, Ch. 18: Wavelet Image Compression.

Зміст

Лабораторна робота №6	3
Тема роботи	3
Мета роботи	3
Теоретичні відомості	3
Хід роботи	6
Контрольні запитання	6
Література	7
Зміст	8