

Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя

---

Кафедра автоматизації  
технологічних процесів  
і виробництв

Лабораторна робота № 5  
з курсу  
*”Цифрова обробка сигналів та  
зображень”*

Кореляційний аналіз сигналів

Тернопіль 2023

Методичні вказівки до лабораторної роботи № 5 "Кореляційний аналіз сигналів" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". Пісьціо В.П., Медвідь В.Р., Микулик П.М. Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 15 с.

Для студентів напряму: 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Автори: Пісьціо В.П., Медвідь В.Р., Микулик П.М.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 1 від 30.08.2023 року)

## Лабораторна робота №5

### Тема роботи

Кореляційний аналіз сигналів.

### Мета роботи

Ознайомитись із кореляційним аналізом сигналів.

### Енергетичні спектри сигналів. Принципи кореляційного аналізу

Подання сигналів за допомогою їх спектральних щільностей дозволяє значно спростити обчислення енергії сигналів, а також створити ряд нових представлень.

### Взаємна спектральна щільність сигналів. енергетичний спектр

Як відомо, скалярний добуток двох дійсних сигналів, що можна визначити за формулою

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt \quad (1)$$

пропорційний так званій взаємній енергії цих сигналів. Якщо сигнали співпадають, то скалярний добуток стає рівним енергії

$$E_u = (u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \quad (2)$$

Скалярний добуток дійсних сигналів  $u(t)$  і  $v(t)$  можна записати через їх спектральні щільності  $U(\omega)$  і  $V(\omega)$  за допомогою узагальненої формули Релея:

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) d\omega. \quad (3)$$

Одночасно вірна і рівність

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\omega) V(\omega) d\omega \quad (4)$$

оскільки скалярний добуток дійсних сигналів є дійсним числом. Назвемо взаємним енергетичним спектром дійсних сигналів  $u(t)$  і  $v(t)$  функцію:  $W_{uv}(\omega) = U(\omega) V^*(\omega)$ ,

таку, що  $(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{uv}(\omega) d\omega$ , причому  $W_{vu}(\omega) = W_{uv}^*(\omega)$ .

Представивши спектральні щільності сигналів  $u(t)$  та  $v(t)$  у вигляді суми дійсних і уявних частин:

$$U(\omega) = A_U(\omega) + j B_U(\omega),$$

$$V(\omega) = A_V(\omega) + j B_V(\omega),$$

звідки, взаємний енергетичний спектр  $W_{uv}$  — функція, що приймає, комплексні значення:

$$W_{UV}(\omega) = A_U A_V + B_U B_V + j(B_U A_V + A_U B_V),$$

Так як у дійсних сигналів дійсна частини спектральної щільності є парними функціями, а уявні - непарними то уявна частина взаємного енергетичного спектру є функцією непарною, а дійсна частина - парною функцією частоти.

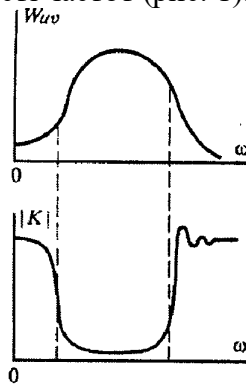
З іншого боку, межі інтегрування є симетричними відносно нульової частоти, отже вклад у енергетичну щільність дає лише дійсна частина:

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re } W_{uv}(\omega) d\omega.$$

Остання формула дає змогу проаналізувати «тонку структуру» взаємозв'язку сигналів. Як легко побачити, найбільший вклад в взаємну енергію дають ті частотні області, в котрих є «перекриття» спектрів сигналів.

Більш того, узагальнена формула Релея, представлена у вигляді (3), вказує на принциповий шлях, що дозволяє зменшити ступінь зв'язку між двома сигналами, добившись в межі їх ортогональності. Для цього один із сигналів необхідно обробити в особливій фізичній системі, званої частотним ортогоналізуючим фільтром. До цього фільтру ставиться вимога: не пропускати на вихід спектральні складові, що знаходяться в межах частотного інтервалу, де дійсна частина взаємного енергетичного спектру велика. Частотна залежність коефіцієнта передачі такого ортогоналізуючого фільтра буде мати різко вираженим

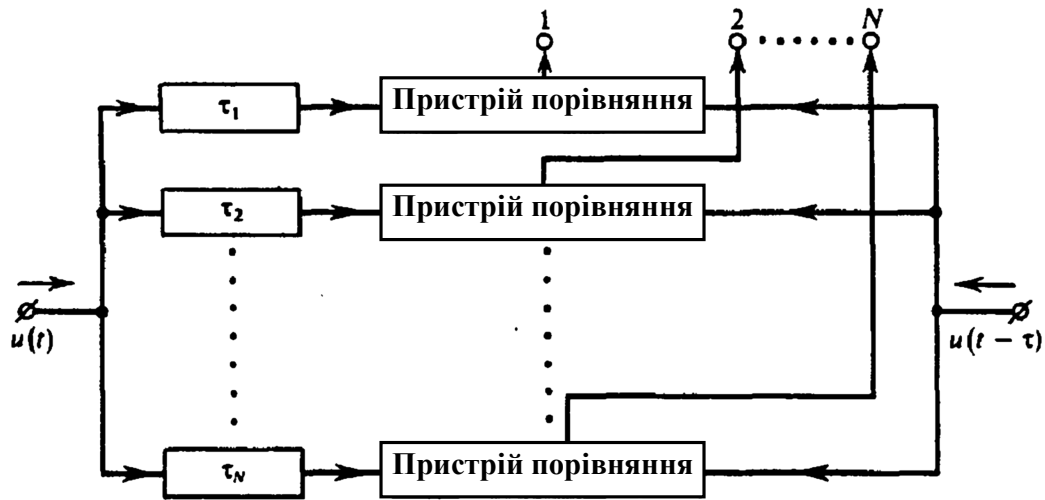
мінімумом в межах зазначеної області частот (рис. 1).



**Рис. 1 Частотна залежність коефіцієнта передачі ортогоналізуючого фільтра  
Кореляційний аналіз сигналів. Порівняння сигналів, зсунутих у часі**

Звернемося до спрощеної ідеї роботи імпульсного сонару, призначеного для вимірювання дальності. Тут інформація про об'єкт вимірювання закладена в величині  $\tau$  - затримках між зондуємим і прийнятим сигналами. Форми зондуємого  $u(t)$  і прийнятого  $u(t-\tau)$  сигналів однакові при будь-яких затримках.

Структурна схема пристрою обробки таких сигналів, призначеного для вимірювання дальності, може виглядати так, як це зображено на наступному рисунку.



**Рис. 2. Пристрій для вимірювання часу затримки сигналів**

Система складається з набору елементів, які здійснюють затримку «еталонного» сигналу, що передається, на деякі фіксовані відрізки часу  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ . Затримані сигнали разом з прийнятим сигналом подаються на пристрої порівняння, які діють відповідно до принципу: сигнал на виході з'являється лише за умови, що обидва вхідних коливання є «копіями» один одного. Знаючи номер каналу, в якому відбувається вказану подію, можна виміряти затримку, а тому і відстань. Подібний пристрій буде працювати тим точніше, чим більшою мірою різняться один від одного сигнал і його «копія», зміщена в часі. Таким чином, отримали якісне уявлення про те, які сигнали можна вважати «добрими» для такого застосування.

Перейдемо до точного математичного формулювання поставленої проблеми і покажемо, що це коло питань має безпосереднє відношення до теорії спектрів сигналів. Якщо відмінність невелика, то можна очікувати, наприклад, неоднозначного відліку, коли сигнали будуть з'являтися одночасно на виході декількох сусідніх пристроїв порівняння.

#### Автокореляційна функція сигналу

Для кількісного визначення ступеня відмінності сигналу  $u(t)$  і його зміщеною в часі копії  $u(t-\tau)$  прийнято вводити автокореляційну функцію (АКФ) сигналу  $u(t)$ , що визначається через скалярний добуток сигналу і його копії, зсунутої у часі:

$$B_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u(t-\tau) dt. \quad (5)$$

Будемо припускати, що досліджуваний сигнал має локалізований у часі імпульсний характер, так що інтеграл виду (5) існує. Безпосередньо видно, що при  $\tau = 0$  автокореляційна функція стає рівною енергії сигналу.

$$B_u(0) = E_u \quad (6)$$

До числа найпростіших властивостей АКФ можна віднести її парність:  $B(\tau) = B(-\tau)$ . Дійсно, якщо у інтегралі (5) зробити заміну змінних  $x = t - \tau$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) u(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(x + \tau) u(x) dx \quad (7)$$

Також, важлива властивість автокореляційної функції є у тому, що: при будь-якому значенні часового зсуву  $\tau$  модуль АКФ не перевищує енергії сигналу:

$$|B_u(\tau)| \leq B_u(0) = E_u.$$

Цей факт безпосередньо випливає із нерівності Коши — Буняковського:

$$|(u, u_\tau)| \leq \|u\| \cdot \|u_\tau\| = E_u$$

Отже, АКФ представляється симетричною кривою з центральним максимумом, який завжди позитивний. При цьому в залежності від виду сигналу  $u(t)$  автокореляційна функція може, бути як монотонно спадаючою так і мати коливний характер.

### АКФ прямокутного відеоімпульсу



Рис. 3. Знаходження АКФ прямокутного відеоімпульсу

На рис. 3 а зображено прямокутний відео імпульс з амплітудою  $U$  і тривалістю  $\tau_n$ . Тут же представлена його «копія», зсунута в часі в бік запізнювання на  $\tau$ . Інтеграл (5) обчислюється в даному випадку елементарно на підставі графічного побудови. Дійсно, добуток  $u(t) u(t - \tau)$  відмінний від нуля лише в межах інтервалу часу, коли спостерігається накладення сигналів. З рис. 3 а видно, що цей часовий інтервал дорівнює  $\tau_n - |\tau|$ , якщо зсув не перевищує тривалості імпульсу. Таким чином, для розглянутого сигналу

$$B_u(\tau) = \begin{cases} U^2 \tau_n \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n}\right), & |\tau| \leq \tau_n \\ 0, & |\tau| > \tau_n \end{cases} \quad (8)$$

Графік такої функції - трикутник, зображений на рис. 3 б. Ширина трикутника в два рази більше тривалості імпульсу.

### АКФ прямокутного радіо імпульсу

Розглянемо радіосигнал виду

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau_n/2, \\ U \cos \omega_0 t, & -\tau_n/2 \leq t \leq \tau_n/2, \\ 0, & t > \tau_n/2. \end{cases} \quad (9)$$

Знаючи, що АКФ парна, обчислимо інтеграл (5), вважаючи  $0 \leq \tau \leq \tau_n$ . При цьому

$$B_u(\tau) = U^2 \int_{-\tau_n/2 + \tau}^{\tau_n/2} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t - \tau) dt = \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 \tau \cdot (\tau_n - \tau) + \frac{U^2}{2} \int_{-\tau_n/2 + \tau}^{\tau_n/2} \cos 2\omega_0 \left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt$$

звідки отримаємо

$$B_u(\tau) = \frac{U^2}{2} (\tau_n - |\tau|) \left[ \cos \omega_0 \tau + \frac{\sin 2\omega_0 (\tau_n - |\tau|)}{2\omega_0 (\tau_n - |\tau|)} \right] \quad (10)$$

При  $\tau = 0$  величина  $B_u(0)$  стає рівною енергії імпульсу. Формула (10) описує АКФ прямокутного радіоімпульсу при всіх зсувах  $\tau$ , у межах  $\tau_n < \tau < \tau_n$ . Якщо абсолютне значення

зсуву перевищує тривалість імпульсу, то автокореляційна функція буде тотожно перетворюватись у нуль.

### АКФ послідовності прямокутних відео імпульсів

При вимірюванні відстані широко використовуються сигнали, що представляють собою пачки з однакових за формою імпульсів, що слідуєть один за одним через однаковий інтервал часу. Для виявлення такої пачки, а також для вимірювання її параметрів, наприклад положення в часі, створюють пристрої, які апаратурним чином реалізують алгоритми обчислення АКФ.

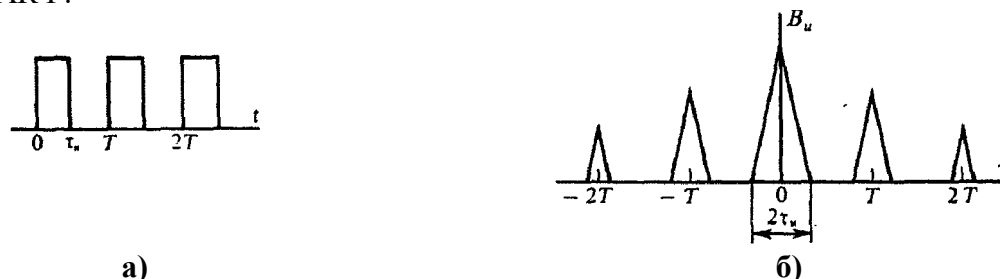


Рис. 4. АКФ пачки з трьох однакових відеоімпульсів: а - пачка імпульсів; б - графік АКФ

На рис. 4 а зображена пачка, з трьох однакових відеоімпульсів прямокутної форми. Тут же представлена її автокореляційна функція, обчислена за формулою (5) (рис. 4,б).

Добре видно, що максимум АКФ досягається при  $\tau = 0$ . Однак якщо затримка  $\tau$  виявляється кратною періоду послідовності (при  $\tau = \pm T; \pm 2T$ ), спостерігаються побічні пелюстки АКФ, які можна порівняти за висотою з головним пелюсткою. Тому можна говорити про відомого недосконалість кореляційної структури даного сигналу.

### Автокореляційна функція необмежено протяжного сигналу.

Якщо потрібно розглядати необмежено протяжні в часі періодичні послідовності, то підхід до вивчення кореляційних властивостей сигналів повинен бути видозмінений.

Будемо вважати, що така послідовність виходить з деякого локалізованого в часі, тобто імпульсного, сигналу, коли тривалість  $\tau_i$  останнього прямує до нескінченності. Для того щоб уникнути розходження одержуваних виразів, визначимо нову АКФ як середнє значення скалярного добутку сигналу і його копії:

$$\tilde{B}_u(\tau) = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} u(t) u(t - \tau) dt. \quad (11)$$

При такому підході автокореляційна функція  $B_u$  стає рівною середній взаємній потужності двох сигналів. Наприклад, бажаючи знайти АКФ для необмеженої в часі косинусоїди  $u(t) = U \cos \omega_0 t$ ,  $-\infty < t < \infty$ , можна скористатися формулою (10), отриманої для радіоімпульсу тривалістю  $\tau_i$ , а потім перейти до межі при  $\tau_i \rightarrow \infty$ , враховуючи визначення (11). В результаті отримаємо

$$\tilde{B}_u(\tau) = \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (12)$$

Величина  $U^2/2$  є середньою потужністю, яку даний сигнал виділяє на активному навантаженні в 1 Ом. Як видно АКФ є періодичною функцією; її значення при  $\tau = 0$  дорівнює  $U^2/2$ .

### Зв'язок між спектром сигналу і його автокореляційної функцією

Легко показати, що існує тісний зв'язок між АКФ і енергетичним спектром сигналу.

Дійсно, відповідно до формули (5) АКФ є скалярний добуток:

$$B_u(\tau) = (u, u_\tau).$$

Символом  $u_\tau$  позначена зміщена в часі копія сигналу  $u(t - \tau)$ .

Звернувшись до узагальненої формулою Релея (2), можна записати рівність:

$$(u, u_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) U_\tau^*(\omega) d\omega \quad (13)$$

Спектральна щільність зміщеного в часі сигналу  $U_\tau(\omega) = U(\omega) \exp(-j\omega\tau)$ , звідки  $U_\tau^*(\omega) = U^*(\omega) \exp(j\omega\tau)$ . Таким чином, приходимо до результату:

$$B_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (14)$$

Квадрат модуля спектральної щільності, як відомо, являє собою енергетичний спектр сигналу. Отже, енергетичний спектр і автокореляційна функція пов'язані перетворенням Фур'є:

$$B_u(\tau) \leftrightarrow |U(\omega)|^2 = W_u(\omega) \quad (15)$$

Також можна показати, що:

$$|U(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (16)$$

Отже по-перше, виявляється можливим оцінювати кореляційні властивості сигналів, виходячи з розподілу їх енергії за спектром: чим ширше смуга частот сигналу, тим більш вузький основний пелюсток автокореляційної функції і тим більш досконалий сигнал з точки зору можливості точного вимірювання моменту його початку.

По-друге, формули (14) і (16) вказують шлях експериментального визначення енергетичного спектру. Часто зручніше спочатку отримати автокореляційну функцію, а потім, використовуючи перетворення Фур'є, знайти енергетичний спектр сигналу. Такий прийом отримав поширення при дослідженні властивостей сигналів за допомогою швидкодіючих ЕОМ в реальному масштабі часу.

### АКФ сигналу з рівномірним та обмеженим за частотою енергетичним спектром

Нехай сигнал  $u(t)$  має енергетичний спектр виду

$$W_u(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_B, \\ W_0, & -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B, \\ 0, & \omega > \omega_B, \end{cases} \quad (17)$$

де  $\omega_B$  — верхня гранична частота спектра. По формулі (14) знаходимо його автокореляційну функцію

$$B_u(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\omega_B} \cos \omega\tau d\omega = \frac{W_0\omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B\tau}{\omega_B\tau} \quad (18)$$

Таким чином, даний сигнал має АКФ пелюсткової виду. Часто вводять зручний числовий параметр - інтервал кореляції  $\tau_k$ , що представляє собою оцінку ширини основної пелюстки автокореляційної функції. Легко бачити, що в даному випадку величина  $\tau_k$  пов'язана з параметром  $\omega_B$  співвідношенням  $\omega_B\tau_k = \pi$ . Звідси випливає, що інтервал кореляції  $\tau_k = \pi/\omega_B = 1/(2f_B)$  виявляється тим менше, чим вище верхня гранична частота спектру сигналу.

### Обмеження на вид автокореляційної функції сигналу

Знайдена зв'язок між автокореляційною функцією і енергетичним спектром дає можливість встановити цікавий і на перший погляд неочевидний критерій існування сигналу з заданими кореляційними властивостями. Справа в тому, що енергетичний спектр будь-якого сигналу, за визначенням, має бути позитивним. Дана умова буде виконуватися далеко не при будь-якому виборі АКФ. Наприклад, якщо взяти

$$B_u(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\tau_k, \\ A, & -\tau_k \leq \tau \leq \tau_k, \\ 0, & \tau > \tau_k \end{cases} \quad (19)$$

і обчислити відповідне перетворення Фур'є, то

$$|U(\omega)|^2 = 2A \int_0^{\tau_k} \cos \omega\tau d\tau = 2A\tau_k \frac{\sin \omega\tau_k}{\omega\tau_k}. \quad (20)$$

Ця знакозмінна функція не може являти собою енергетичний спектр будь-якого сигналу.

### Автокореляційна функція дискретного сигналу

Розглядаючи АКФ пачки прямокутних відеоімпульсів, можна побачити, що відповідний графік мав специфічний пелюстковий вид. З практичної точки зору, маючи на увазі використання АКФ для вирішення завдання виявлення такого сигналу або

вимірювання його параметрів, абсолютно несуттєво, що окремі пелюстки мають трикутну форму. Важливий лише їх відносний рівень у порівнянні з центральним максимумом при  $\tau = 0$ .

Отже перше завдання - змінити визначення автокореляційної функції таким чином, щоб можна було витягувати з неї корисну інформацію, абстрагуючись від другорядних подробиць. Основою для цього служить ідея математичної моделі дискретного, сигналу.

### Опис складних сигналів з дискретною структурою.

Пачка однакових прямокутних відеоімпульсів - найпростіший представник класу складних сигналів, побудованих у відповідності з наступним принципом. Весь інтервал часу існування сигналу розділений на ціле число  $M > 1$  рівних проміжків, званих позиціями. На кожній з позицій сигнал може перебувати в одному з двох станів, яким відповідають числа  $+1$  і  $-1$ .

Наступний рисунок пояснює деякі способи формування багато позиційного складного сигналу. Для визначеності тут  $M = 3$ . Видно, що фізичний вигляд дискретного сигналу може бути різним.

У випадку а символу  $+1$  відповідає позитивне значення  $U_0$  висоти відеоімпульсу, переданого на відповідній позиції; а символу  $-1$  - від'ємне значення  $-U_0$ .

Отже при цьому реалізовано амплітудне кодування складного сигналу. У випадку б відбувається фазове кодування. Для передачі символу  $+1$  на відповідній позиції генерується відрізок гармонічного сигналу з нульовою початковою фазою. Щоб відобразити символ  $-1$ , використовується відрізок синусоїди такої ж тривалості і з тією ж частотою, але його фаза отримує додатковий зсув на  $180^\circ$ .



Рис. 5. Багатопозиційний складний сигнал. а) - амплітудне, б) - фазове кодування

Незважаючи на відмінність графіків цих двох сигналів, між ними можна встановити повну тотожність з точки зору їх математичних моделей. Дійсно, модель будь-якого такого сигналу - це послідовність чисел  $\{u_1, u_2, \dots, u_{M-1}, u_M\}$  в якій кожен символ  $u_i$ , приймає одне з двох можливих значень  $\pm 1$ .

А сама послідовність імпульсів може бути описана у вигляді:

$$s(t) = \sum_{m=1}^M u_m s_1(t - T \cdot m)$$

де  $s_1(t)$  - окремий імпульс, такий що його тривалість менше ніж період повторення імпульсів  $T$ ,  $u_m$  - описана вище послідовність імпульсів. Доповнимо послідовність імпульсів імпульсами з нульовими значеннями амплітуди - це завжди можна зробити поклавши, що  $u_m = 0$  при  $m < 1$  та при  $m > M$ . У такому випадку послідовність може бути записана у вигляді:

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m s_1(t - T \cdot m)$$

Обчислимо для сигналу  $s(t)$  автокореляційну функцію

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_n u_m s_1(t - Tn) s_1(t - Tm + \tau) dt$$

Введемо заміну  $n = m - i$  та переставимо місцями інтегрування та сумування. (Це завжди можна зробити так як за умовою автокореляційна функція існує).

$$B_s(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_{m-i} u_m \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - T \cdot m + T \cdot i) s_1(t - T \cdot m + \tau) dt$$

Тепер перейдемо до розгляду імпульсів у моменти часу  $\tau_k = T \cdot k$ . Враховуючі, що імпульси  $s_1(t)$  не перекриваються, тобто  $B_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - T \cdot i) s_1(t - T \cdot m) dt$  не рівна нулю



лише коли  $i = m$  і у цьому випадку приймає значення  $\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_1(t)dt$  маємо

$$B_s(\tau_k) = \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{m-k} u_k \right) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_1(t)dt$$

Для зручності домовимося доповнювати таку послідовність нулями на «порожніх» позиціях, де сигнал не визначений. При цьому, наприклад, розгорнута форма запису дискретного сигналу  $\{1, 1, -1, 1\}$  матиме вигляд

.... 0 0 0 1 1 -1 1 0 0....

Отже задача визначення АКФ пачки імпульсів звелась до задачі визначення АКФ окремого імпульсу і визначення так званої "дискретної автокореляційної функції" котра дозволяє абстрагуватись від форми окремого імпульсу.

Сама дискретна автокореляційна функція запишеться у вигляді

$$\hat{B}_u(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j u_{j-n}. \quad (21)$$

Дана функція представляє собою скалярний добуток дискретного сигналу и його копії.

Ця функція цілочисельного аргументу  $n$ , володіє багатьма вже відомими властивостями звичайної автокореляційної функції. Так, легко бачити, що дискретна АКФ парна:

$$\hat{B}_u(n) = \hat{B}_u(-n). \quad (22)$$

При нульовому зсуві ця АКФ визначає енергію дискретного сигналу:

$$\hat{B}_u(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^2 = E_u \quad (23)$$

Для ілюстрації обчислимо дискретну АКФ трьох позиційного сигналу із однаковими значеннями на кожній позиції:  $u = \{1, 1, 1\}$ . Обчислимо цей сигнал разом із його копіями, зсунутими на 1, 2 та 3 позиції:

... 0 0 0 1 1 1 0 0 0 ...  
 ... 0 0 0 0 1 1 1 0 0 ...  
 ... 0 0 0 0 0 1 1 1 0 ...  
 ... 0 0 0 0 0 0 1 1 1 ...

Видно, що вже при  $n = 3$  сигнал і копія перестають накладатись один на одного, так що добутки, що входять у формулу (21), стають рівними 0. Обчислюючи суми отримаємо

$$B_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$B_u(1) = 1 + 1 = 2,$$

$$B_u(2) = 1.$$

Бокові пелюстки автокореляційної функції лінійно спадають із ростом  $n$ , подібно до того як у випадку автокореляційної функції трьох аналогових відеоімпульсів. Розглянемо тепер трьох позиційний сигнал з математичною моделлю  $u = \{1, 1, -1\}$ . Його автокореляційна функція :

$$U(0) = 1 + 1 + 1 = 3;$$

$$U(1) = 1 - 1 = 0,$$

$$U(2) = -1.$$

Отже останній сигнал найбільш досконалий з точки зору кореляційних властивостей, оскільки має найменший рівень бокових пелюсток автокореляційної функції.

### Сигнали Баркера

Дискретні сигнали з найкращою структурою автокореляційної функції з'явились у 50—60-е роки об'єктом інтенсивних досліджень. Були знайдені класи ортогональних сигналів із заданими кореляційними властивостями. Серед них найбільш відомими отримали сигнали (коди) Баркера. Вони володіють властивістю: автокореляційна функція при неспівпадинні сигналу із його копією не перевищує за модулем -1. В той же час енергія сигналів, тобто величина  $B_u(0)$ , чисельно рівна довжині коду  $M$ .

Сигнали Баркера легко реалізувати лише при числі позицій  $M = 2, 3, 4, 5, 7, 11$  та  $13$ .

Випадок  $M = 2$  є тривіальним. Сигнал Баркера при  $M = 3$  був розглянутий раніше. Математичні моделі сигналів Баркера та їх автокореляційні функції наведені у наступній таблиці.

Дослідження показали, що не існує сигналів Баркера із непарним числом позицій, більшим 13. Однак невідомо, чи можливо побудувати сигнал Баркера с парним числом позицій  $M > 4$ .

Таблиця 1. Моделі сигналів Баркера

№	Модель сигналу	АКФ
3	1, 1, -1	3, 0, -1
4	1, 1, 1, -1	4, 1, 0, -1
5	1, 1, -1, 1	4, -1, 0, 1
5	1, 1, 1, -1, 1	5, 0, 1, 0, 1
7	1, 1, 1, -1, -1, 1, -1	7, 0, -1, 0, -1, 0, -1
11	1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1	11, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1
13	1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1	13, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1

Для ілюстрації на наступному рисунку наведений вигляд найбільш часто застосовного 13-позиційного сигналу Баркера при двох способах кодування, а також графічне представлення його АКФ.

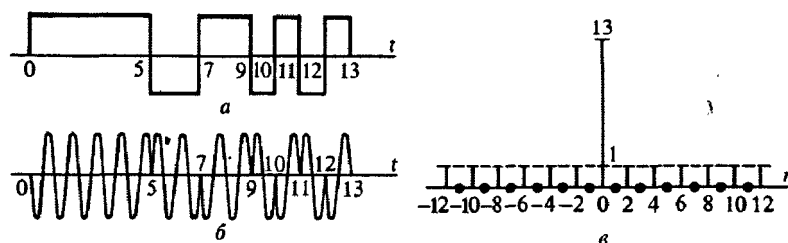


Рис. 6. Сигнал Баркера при  $M = 13$ : а — амплітудне кодування; б — фазове кодування, в — автокореляційна функція  
**Взаємкореляційна функція двох сигналів**

В багатьох теоретичних і прикладних розділах теорії сигналів зручно ввести особливу характеристику сукупності двох сигналів — їх взаємну кореляційну функцію (ВКФ), котра і описує як близькість сигналів між собою так і взаємне розміщення сигналів у часі.

Узагальнюючі формулу (5), назвемо взаємною кореляційною функцією двох дієх сигналів  $u(t)$  та  $v(t)$  інтеграл вигляду

$$B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t - \tau) dt \quad (24)$$

Доцільність подібної інтегральної характеристики сигналів видно з такого прикладу. Нехай сигнали  $u(t)$  і  $v(t)$  в початковому стані ортогональні, так що

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt = 0 \quad (25)$$

При проходженні цих сигналів через різні пристрої можливо, що сигнал  $v(t)$  буде зміщений відносно сигналу  $u(t)$  на деякий час  $\tau$ . Ясно, що ВКФ служить мірою «стійкості» ортогонального стану при зсувах сигналів в часі.

#### Деякі властивості взаємкореляційної функції

Якщо у формулі (24) замінити змінну інтегрування, ввівши  $x = t - \tau$ , так що  $dt = dx$ , то, можливий такий запис:

$$B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x + \tau) v(x) dx \quad (26)$$

Тому

$$B_{uv}(\tau) = B_{vu}(-\tau). \quad (27)$$

На відміну від автокореляційної функції одиночного сигналу, ВКФ, що описує властивості системи двох неоднакових сигналів, не є парною функцією аргументу  $\tau$ :

$$B_{uv}(\tau) \neq B_{uv}(-\tau).$$

Якщо розглянуті сигнали мають кінцеві енергії, то їх взаємкореляційна функція

обмежена. Це твердження випливає з нерівності Коші - Буняковського:

$$|B_{uv}(\tau)| = |(u, v_\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v_\tau\|; \text{ звідки } |B_{uv}(\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

так як зсув сигналу в часі не впливає на значення його норми. Слід звернути увагу на те, що при  $\tau = 0$  значення ВКФ не повинні досягати максимуму.

Наприклад обчислимо функцію  $B_{uv}(\tau)$  для випадку, коли сигнал  $u(t)$  - прямокутний, а  $v(t)$  - трикутний відеоімпульс. Їх амплітуди  $U$  і тривалості  $T$  однакові; в початковому стані (за відсутності затримки) сигнали існують на загальному відрізку часу  $[0, T]$ .

При  $0 < t < T$  розглянуті сигнали описуються так:

$$u(t) = U, v(t) = Ut/T.$$

Якщо  $\tau > 0$ , тобто сигнал  $u(t)$  затриманий у часі відносно  $v(t)$ , то

$$B_{uv}(\tau) = \frac{U^2}{T} \int_{\tau}^T (t - \tau) dt.$$

Визначимо безрозмірний параметр  $\eta = \tau/T$  і провівши викладки отримаємо:

$$B_{uv}(\eta) = (U^2 T/2) (1 - 2\eta + \eta^2). \quad (28)$$

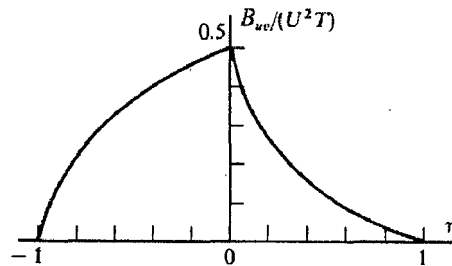
Якщо ж  $\tau < 0$ , тобто трикутний сигнал випереджує прямокутний, то

$$B_{uv}(\tau) = \frac{U^2}{T} \int_0^{T-|\tau|} (t - |\tau|) dt \quad (29)$$

звідки

$$B_{uv}(\eta) = (U^2 T/2) (1 - \eta^2) \quad (30)$$

Функція, обчислена за формулами (28) та (29), зображена на рис. 7. Асиметрія графіку викликана тим, що площа «перекриття» імпульсів змінюється по-різному в залежності від напрямку зсуву



**Рис. 7. Графік взаємнокореляційної функції прямокутного і трикутного відеоімпульсів  
Зв'язок ВКФ з взаємною спектральною щільністю.**

Визначимо ВКФ двох сигналів через їх спектральні характеристики. Методика міркувань повністю повторює ту, яка застосовувалася раніше при спектральному поданні автокореляційної функції одиночного сигналу. На підставі узагальненої формули Релея

$$B_{uv}(\tau) = (u, v_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V_\tau^*(\omega) d\omega$$

а оскільки спектр зміщеного у часі сигналу  $V_\tau(\omega) = K(\omega) \exp(-j\omega\tau)$ , то

$$B_{uv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (30)$$

Так як величина  $W_{uv}(\omega) = U(\omega) V^*(\omega)$  взаємний енергетичний спектр сигналів  $u(t)$  та  $v(t)$ , визначена у нескінченному інтервалі частот  $-\infty < \omega < \infty$ , приходимо до висновку: взаємна кореляційна функція і взаємний енергетичний спектр двох сигналів зв'язані перетворенням Фур'є.

#### Узагальнення на випадок дискретних сигналів

Нехай сигнали  $u(t)$  і  $v(t)$  задані в дискретній формі як сукупності відліків:

$$u = \{\dots, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots\}$$

$$v = \{\dots, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots\}$$

що слідує у часі з однаковими інтервалами  $T$ . За аналогією з автокореляційною функцією одиночного сигналу визначимо ВКФ двох дискретних сигналів за формулою:

$$\hat{B}_{uv}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j v_{j-n}, \quad (31)$$

де  $n$  — ціле число, додатне, позитивне, негативне або нуль.

Продемонструємо обчислення цієї функції на прикладі двох чотирьох позиційних сигналів Баркера:

$$u = \{1, 1, 1, -1\}, v = \{1, 1, -1, 1\}.$$

Якщо  $n > 0$ , то сигнал  $v$  запізнюється щодо сигналу  $u$ . Подібно до того як це робилося в попередньому взаємкореляційна функція дискретних сигналів, складемо таблицю, яка містить сигнал  $u$  та послідовність зсунутих копій  $v$ :

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

Обчислюючи за формулою (31), отримуємо  $B_{uv}(0) = 0, B_{uv}(1) = 3, B_{uv}(2) = 0, B_{uv}(3) = -$

1.

Аналогічно будуємо таблицю, яка відображатиме зсуви сигналу  $v$  в бік випередження:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

і знаходимо

$$B_{uv}(-1) = 1, B_{uv}(-2) = 0, B_{uv}(-3) = 1.$$

Діаграма, що представляє ВКФ цих двох сигналів, має несиметричний вигляд: максимум функції досягається при зсуві сигналу  $v$  на одну позицію.

### Коефіцієнт кореляції двох сигналів

Теорія розвинута вище проте не дає повною мірою відповідь на питання наскільки сильно ідентичні між собою сигнали без врахування можливого їх послаблення чи підсилення. так як у значення кореляційної функції залежить від амплітуди сигналу. Дійсно, якщо у формулі (24) сигнал  $v(t)$  стане у 2 рази більшим кореляційна функція теж зросте у 2 рази, хоч і форма сигналу не змінилась.

У тих випадках коли це важливо вводять у розгляд коефіцієнт кореляції, що обчислюється за формулою:

$$R_{uv}(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t+\tau)dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} v(t)^2 dt}} = \frac{(u(t); v(t+\tau))}{\|u(t)\| \|v(t)\|} \quad (32)$$

Виходячи із нерівності Коші-Буняковського можна показати, що коефіцієнт кореляції є дійсною величиною у межах від -1 до 1.

### Кореляція періодичних сигналів

Розвинута вище теорія легко переноситься на розгляд скінчених інтервалів. Не знижую узагальненості завжди можна сигнал періодично продовжити у нескінченність, і розглядати інтервал  $[0, T]$ . Тоді за аналогією, використовуючи скалярний добуток на скінченому інтервалі:

$$(u(t); v(t)) = \frac{1}{T} \int_0^T u(\tau) \cdot \overline{v(\tau)} d\tau \quad (33)$$

можна ввести згортку:

$$u(t) * v(t) = (u(\tau); \overline{v(t-\tau)}) = \frac{1}{T} \int_0^T u(\tau) \cdot v(t-\tau) d\tau \quad (34)$$

Запишемо тепер явні вирази для скалярного добутку двох сигналів на основі ряду Фур'є. Обидві функції тепер періодичні, отже їх можна розкласти у Фур'є:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \exp(j n \omega t), \quad v(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \cdot \exp(j m \omega t) \quad (35)$$

Підставимо у вираз представлення функцій:

$$u(t) * v(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(j n \omega \tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \exp(j m \omega (t - \tau)) d\tau \quad (36)$$

Змінимо порядок інтегрування і сумування:

$$u(t) * v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n b_m \exp(j m \omega t) \frac{1}{T} \int_0^T \exp(j(n - m)\omega \tau) d\tau \quad (37)$$

$$\text{Так як } \frac{1}{T} \int_0^T \exp(j(n - m)\omega \tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases} \text{ то}$$

$$u(t) * v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n \exp(j n \omega t). \quad (38)$$

Кореляційну функцію можна ввести на основі скалярного добутку у такий спосіб:

$$B_{u,v}(t) = (u(\tau); v(\tau - t)) = \frac{1}{T} \int_0^T u(\tau) \overline{v(\tau - t)} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(j n \omega \tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{b_m} \exp(j m \omega (t - \tau)) d\tau$$

Знову змінимо порядок інтегрування і сумування:

$$B_{u,v}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \overline{b_m} \cdot \exp(j m \omega t) \frac{1}{T} \int_0^T \exp(j n \omega \tau) \exp(-j m \omega \tau) d\tau. \quad (39)$$

$$\text{Так як } \frac{1}{T} \int_0^T \exp(j(n - m)\omega \tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

$$B_{u,v}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \overline{b_n} \cdot \exp(j n \omega t) \quad (40)$$

Отже як легко побачити скалярний добуток і кореляційна функція у випадку скінченного інтервалу також відрізняються виключно комплексно спряженістю одного із множників.

### Порядок виконання роботи

1. Створити масиви даних із використанням сигналу виду  $u(x) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $v(x) = A \cdot \cos(\omega t)$ . Задати частоту (Гц)  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ , фаза (град)  $\varphi = [N \text{ залікової}]$ , амплітуда  $A = 1$ , кількість вибірок = 128, інтервал дискретизації = 0.3 с. Аналогічно створити сигнали з кількістю вибірок 1024.

2. Створити випадкові сигнали з нормальним розподілом. Для цього спочатку створити сигнал із рівномірним розподілом випадкової величини  $\{r(t_i)\}$  у діапазоні  $[0..1)$  і перетворити отриманий сигнал у сигнал із нормальним розподілом  $z_i$  за допомогою перетворення Бокса — Мюллера:

$$p_i = \sigma \cos(2\pi r_{i+1}) \sqrt{-2 \ln(r_i)} \quad p_{i+1} = \sigma \cdot \sin(2\pi r_{i+1}) \sqrt{-2 \ln(r_i)}$$

де  $\sigma$  - стандартне відхилення = 2.

3. Додати отримані у п. 1 та п.2 сигнали із відповідною кількістю точок, отримавши сигнали  $u' = u(t) + \{p\}$ ,  $v' = v(t) + \{p\}$ . Переглянути отримані графіки.

4. Виконати спектральний аналіз початкових гармонійних і зашумлених процесів. Зобразити і проаналізувати спектри амплітуд сигналів.

5. Побудувати АКФ сигналів  $u'$  та  $v'$  за допомогою прямого перетворення (лише масиви у 128 елементів).

6. Виконати автокореляційний аналіз за допомогою отриманих у п.4. спектрів, користуючись перетворенням Фур'є.

7. Виконати кореляційний еталонного сигналу  $u$  та зашумлених сигналів  $u'$  та  $v'$ .

8. Виконати генерацію "зашумлювання" і знаходження періодичного прямокутного сигналу із коловою частотою  $\omega$  за освоєною методикою.

9. Виконати генерацію "зашумлювання" і знаходження сигналу Баркера за освоєною методикою.

10. Порівняти отримані результати і зробити висновки.

### Контрольні питання.

1. Що таке автокореляційна функція?
2. Яке співвідношення між автокореляційною функцією і енергетичним спектром сигналу?
3. Що таке взаємна кореляційна функція?
4. Яке співвідношення між кореляційною функцією і взаємним енергетичним спектром?
5. Для чого призначена автокореляційна функція?

### Література

1. Бабак В. П. Обробка сигналів: підручник для вузів / В. П. Бабак, А. І. Хандецький, Е. Шрюфер – Київ: Либідь, 1996. – 390 с.
2. Ваврук Є. Я. Цифрове опрацювання сигналів та зображень, алгоритми та реалізація: навчальний посібник / Є. Я. Ваврук, Р. Б. Попович – Національний університет "Львівська політехніка", 2008. – 147 с.
3. Яцимирський М. М. Швидкі алгоритми ортогональних тригонометричних перетворень / М. М. Яцимирський // – Львів: Академічний Експрес, 1997. – 219 с.
4. Ваврук Є. Я. Моделі контролю і діагностики систем опрацювання сигналів / Є. Я. Ваврук, В. А. Коваль // Збірник наукових праць "Моделювання та інформаційні технології". – Інститут проблем моделювання в енергетиці НАНУ, 2006 – Випуск 35. – С. 131–139.
5. Ваврук Є. Я. Організація контролю та діагностики ШПФ-схем у режимі реального часу в системах опрацювання сигналів / Є. Я. Ваврук // Вісник НУ "Львівська політехніка", комп'ютерні системи та мережі. – 2004. – № 523. – С 24–29.
6. Наконечний А. Й. Цифрова обробка сигналів: Навчальний посібник / А. Й. Наконечний, Р. А. Наконечний, В. А. Павлиш. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2010. – 368 с.
7. Дробик О. В. Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник / О. В. Дробик, В. В. Кідалов, В. В. Коваль, Б. Я. Костік, В. С. Лазебний, Г. М. Розорінов, Г. О. Сукач. – К.: Наукова думка, 2008. – 144 с.
8. Бондарев В. Н. Цифрова обробка сигналів, методи і засоби: підручник для вузів / В. Н. Бондарев, Г. Трестер, В. С. Чернега. – Харків: Конус, 2001. – 398 с.
9. Рибальченко М.О. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник / М. О. Рибальченко, О. П. Єгоров, В. Б. Зворикін. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
10. Пісьціо В.П. Методичні вказівки до лабораторної роботи №4 "Дискретне перетворення Фур'є" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". В.П. Пісьціо, В.Р. Медвідь, П.М. Микулик, Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 17 с.
11. Пісьціо В.П. Методичні вказівки до лабораторної роботи № 9 "Основи цифрового представлення зображень та їх обробки" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". В.П. Пісьціо, В.Р. Медвідь, П.М. Микулик, Тернопіль: ТНТУ, 2023 - 22 с.
12. Gales M. The Application of Hidden Markov Models in Speech Recognition / M. Gales, S. Young // Foundations and Trends in Signal Processing. – 2007. – Vol. 1, No. 3. – P. 195–304.
13. Rabiner L. Fundamental of Speech Recognition / L. Rabiner, B. H. Juang, B. Yegnanarayana – New Delhi, India: Pearson Education Inc., 2009. – 497 p.
14. Shapiro J. M. Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients / J. M. Shapiro // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1993. – Vol. 41, No. 12. – P. 3445–3462.

## Зміст

Лабораторна робота №5 .....	3
Тема роботи .....	3
Мета роботи .....	3
Енергетичні спектри сигналів. Принципи кореляційного аналізу .....	3
Взаємна спектральна щільність сигналів. енергетичний спектр .....	3
Кореляційний аналіз сигналів. Порівняння сигналів, зсунутих у часі .....	4
Автокореляційна функція сигналу.....	4
АКФ прямокутного відеоімпульсу.....	5
АКФ послідовності прямокутних відео імпульсів .....	6
Автокореляційна функція необмежено протяжного сигналу. ....	6
Зв'язок між спектром сигналу і його автокореляційної функцією.....	6
АКФ сигналу з рівномірним та обмеженим за частотою енергетичним спектром	7
Обмеження на вид автокореляційної функції сигналу.....	7
Автокореляційна функція дискретного сигналу.....	7
Опис складних сигналів з дискретною структурою.....	8
Сигнали Баркера .....	9
Взаємокореляційна функція двох сигналів.....	10
Деякі властивості взаємокореляційної функції .....	10
Зв'язок ВКФ з взаємної спектральної щільністю.....	11
Узагальнення на випадок дискретних сигналів.....	11
Коефіцієнт кореляції двох сигналів .....	12
Кореляція періодичних сигналів.....	12
Порядок виконання роботи .....	13
Контрольні питання.....	14
Література .....	14
Зміст .....	15