

УДК 621.382

Р.Столярчук

Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури, м.Львів

АПРОКСИМАЦІЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРТЯ КОВЗАННЯ В ЧЕРВ'ЯЧНИХ ПЕРЕДАЧАХ

У статті розглянуто алгоритм апроксимації експериментальних табличних даних деяким нелінійним виразом, що описує монотонний та неперервний на заданому інтервалі характер зміни величини кута тертя черв'ячних передач у функції відносної швидкості ковзання. Для визначення коефіцієнтів запропонованого виразу використовується метод найменших квадратів та розв'язання системи нелінійних рівнянь модифікованим ітераційним методом Ньютона, який дає задовільну збіжність та приведену похибку наближення. Подано приклади конкретних результатів.

При математичному моделюванні задач динамічного аналізу машинних агрегатів з черв'ячною передачею (ЧП) виникає потреба апроксимації нелінійних характеристик тертя ковзання в ЧП з метою уточнення параметрів перебігу перехідного процесу.

Нестаціонарною характеристикою тертя ковзання в ЧП служить приведений кут тертя ρ . Цей параметр одержують експериментально при конкретних фізико-механічних властивостях матеріалів пар фрикційного контакту та подають як набір скінченої послідовності табличних значень $(V_{si}, \rho_i), i = \overline{1, n}$, де n - кількість знятих експериментальних точок, V_s - відносна швидкість ковзання в ЧП, що є незалежним параметром, причому $(V_{s1} < V_{s2} < \dots < V_{sn})$, ρ - залежний параметр від V_s [1]. Для ЧП відносна швидкість ковзання V_s як універсальний кінематичний параметр, розраховують через співвідношення [2]

$$V_s = \frac{V_1}{\cos \gamma} = \frac{V_2}{\sin \gamma}, \quad (1)$$

де V_1 і V_2 - лінійні швидкості обертання відповідно валів черв'яка і черв'ячного колеса, γ - конструктивно заданий кут підйому гвинтової лінії черв'яка.

При апроксимації таблично заданої експериментальної залежності

$$\rho_i = f(V_{si}), i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

що реально відображає нелінійно-спадний характер зміни кута тертя ρ при зростанні швидкості V_s , використовуватимемо вираз $S(X, V_s)$, що є монотонним та неперервним на заданому інтервалі незалежних параметрів $[V_{s1}, V_{sn}]$, а X - вектор постійних параметрів. Такий вираз описує аналітично нестаціонарну характеристику тертя ковзання $\rho^*(V_s) = S(X, V_s)$, де індекс "*" - вказує на наближене (емпіричне) значення кута тертя. На основі [3] задамо аналітичний вираз у такому вигляді

$$S(X, V_s) = (aV_s^b + c)^{-1}, \quad (3)$$

де $X = (a, b, c)$ - невідомий вектор постійних параметрів (коефіцієнтів) емпіричного виразу, що підлягає визначенню.

Використовуючи метод найменших квадратів [4] для обчислення $X = (a, b, c)$, запишемо рівняння оптимального наближення виразу (3) до таблично заданої залежності (2) за критерієм мінімуму середньоквадратичного відхилення

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (S(X, V_{si}) - \rho(V_{si}))^2 = \sum_{i=1}^n ((aV_{si}^b + c)^{-1} - \rho_i)^2 = \min_{a, b, c}, \quad (4)$$

де n - кількість точок (V_{si}, ρ_i) за якими виконується наближення.

Застосування такого підходу передбачає використання необхідної умови екстремуму функції $F(a, b, c)$ (4) при варіації параметрів a, b, c , що приводить до системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\partial F(a, b, c)}{\partial a} = 0, \\ f_2 = \frac{\partial F(a, b, c)}{\partial b} = 0, \\ f_3 = \frac{\partial F(a, b, c)}{\partial c} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

У розгорнутому вигляді одержуємо

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{i=1}^n \frac{V_{si}^b (1 - \rho_i (aV_{si}^b + c))}{(aV_{si}^b + c)^3} = 0, \\ f_2 = \sum_{i=1}^n \frac{V_{si}^b \ln V_{si} (1 - \rho_i (aV_{si}^b + c))}{(aV_{si}^b + c)^3} = 0, \\ f_3 = \sum_{i=1}^n \frac{(1 - \rho_i (aV_{si}^b + c))}{(aV_{si}^b + c)^3} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язок такої системи нелінійних рівнянь відносно a, b, c , виконаємо за допомогою ітераційного методу Ньютона [4], який необхідно модифікувати додатковими умовами мінімізації функції (4). Це вимагає вироблення спеціального алгоритму та його подальшої програмної реалізації.

З цією метою перепишемо вихідну систему рівнянь (5) у векторній формі

$$\vec{f}(X) = 0, \quad (7)$$

$$\text{де } \vec{f}(X) = (f_1, f_2, f_3)^T, X = (a, b, c) \quad (7a)$$

Розкриємо послідовність основних процедур алгоритму ітераційного процесу.

Ітераційний процес має зміст при заданому початковому значенні вектора $X_0 = (a_0, b_0, c_0)$, який називають нульовим наближенням і приймають довільно. Ітераційний процес розв'язку згідно з методом Ньютона виконуватимемо послідовними наближеннями за формулою

$$X_{m+1} = X_m - \frac{\vec{f}(X_m)}{W(\vec{X}_m)}, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

де X_m - наближення вектора X на m -му кроці ітераційного процесу; $\vec{f}(X_m)$ - значення вектор-функції (7a) на m -му кроці ітераційного процесу; $W(X_m)$ - значення матриці Якобі для m -ї ітерації розв'язку.

Формально ітераційний процес за формулою (8) необхідно продовжувати до певної заданої точності ε збіжної послідовності обчислювальних наближень, тобто

$$|X_{m+1} - X_m| \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Оскільки система рівнянь (7) є загальною як для визначення мінімуму, так і максимуму функції (4), то умова (9) неприйнятна у даному випадку, а припинення ітераційного процесу необхідно контролювати через аналіз значень функції (4) на кожному кроці ітерації, що є суттю модифікації.

Відповідно збіжність ітераційного процесу до мінімуму функції (4) необхідно перевіряти на основі нерівностей

$$F(X_{m+1}) < F(X_m), \quad (10)$$

$$F(X_{m+1}) < \varepsilon_1, \quad (11)$$

де ε_1 - певна задана точність обчислень мінімізаційної функції $F(X) = F(a, b, c)$.

Коли умова (10) не виконується, тобто $F(X_{m+1}) > F(X_m)$, коректуємо вектор X_{m+1} на $m + 1$ - му кроці ітераційного процесу за уточненою формулою

$$X_{m+1} = X_m - \frac{f(X_m)}{2^k W(X_m)}, (m = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, p) \quad (12)$$

до виконання нерівності (10).

Якщо при максимальному значенні показника степеня $k = p$ нерівність (10) ще не виконується, то це ознака того, що ітераційний процес при заданому нульовому наближенні $X = X_0$ не збігається до мінімуму функції $F(a, b, c)$ (4). В такому випадку необхідно коректувати початкове наближення X_0 і продовжити ітераційний процес. Кінцевим результатом ітераційного процесу є одержання вектора $X = (a, b, c)$, що задовольняє умови (10), (11).

Оцінкою точності наближення апроксимаційним виразом $S(X, V_s)$ за результатами ітераційного процесу при відомому векторі X є максимальна зважена похибка наближення μ_o в i -й вузловій точці

$$\mu_o = \mu(V_{si}) = \max_{i=1, n} \frac{|S(X, V_{si}) - \rho_i|}{w(V_{si})}, \quad (13)$$

де $w(V_{si})$ - вагова функція, $w(V_s) > 0, V_s \in \{V_{si}\}_1^n$. Найбільш універсальним є значення вагової функції $w(V_s) = \rho_{\max}(V_s) - \rho_{\min}(V_s)$ для оцінки наближення з приведеною похибкою, де ρ_{\max} та ρ_{\min} - відповідно максимальне та мінімальне значення заданої залежності на діапазоні наближення [5].

Приклад. Подамо приклад чисельного симулювання постійних параметрів вектора $X = (a, b, c)$ виразу (3) на основі виробленого вище алгоритму апроксимації табличних даних. Програмна реалізація алгоритму виконана мовою TurboBASIC, що розрахована на роботу на ІВМ-сумісних персональних ЕОМ.

У таблиці 1 для порівняльного аналізу подано експериментальні параметри тертя $\rho(V_s)$ у ЧП трьох груп матеріалів фрикційного контакту та їх фізико-механічні властивості (див. таблицю 2), що мають широке практичне застосування [1].

Результати обчислень зведені в таблицю 3 та графічно відображені на рис.1. Вони показують, що згідно з виробленим алгоритмом, одержані параметри (коефіцієнти) a, b, c заданого апроксимаційного виразу (3) дають для всіх груп експериментальних точок $\rho_i = f(V_{si}), i = \overline{1, n}$ задовільну максимальну приведену похибку наближення, де $\mu_o \ll 0,5$. Це дозволяє стверджувати, що запропонований емпіричний вираз (3) аналітичного представлення нелінійної кінематичної характеристики тертя ковзання $\rho^*(V_s)$ у ЧП придатний для уточнення досліджень нестационарних параметрів силових процесів механічних систем з черв'ячною передачею.

Таблиця 1

Кількість експеримент. точок (i=1...n)	Швидкість ковзання, $V_{si}(м/с)$	$\rho_i^0, град$	$\rho_i^0, град$	$\rho_i^0, град$
		I група	II група	III група
1	0,01	6,00	6,80	9,75
2	0,10	4,50	5,50	8,10
3	0,25	3,70	4,75	5,25
4	0,50	3,20	3,80	4,60
5	1,00	2,50	3,25	3,95
6	1,50	2,25	2,80	3,50
7	2,00	2,05	2,45	2,90
8	2,50	1,70	2,30	2,65
9	3,00	1,50	2,00	2,40
10	4,00	1,20	1,70	2,20
11	5,00	1,10	-	1,90

Таблиця 2

Позначення групи матеріалів	Фізико-механічні властивості матеріалів	
	Твердість поверхні витків черв'яка	Матеріал вінця черв'ячного колеса
I група	HRC>48	Високоолов'янисті (6 -10% Sn), олов'яно -нікелеві (1-2%) бронзи
II група	48>HRC>32	
III група	HRC>48	Залізисті бронзи, латуні

Таблиця 3

Результати чисельного симулювання алгоритму апроксимації

Група матеріалів	Коефіцієнти a,b,c виразу (3)	Максимальна приведена похибка наближення μ_0 (13)
I група	a=0,256;b=0,591;c=0,151	$\mu_0=0,0387$
II група	a=0,174;b=0,642;c=0,140	$\mu_0=0,0345$
III група	a=0,161;b=0,535;c=0,088	$\mu_0=0,129$

Вироблений ітераційний алгоритм (7)-(13) пошуку коефіцієнтів (вектора X) попередньо заданого апроксимаційного виразу $S(X, V_s)$ є універсальним, оскільки не залежить від типу функціонального виразу та дозволяє у кожній вузловій точці мінімізувати відхилення при заданій допусковій точності збіжності ітераційного процесу.

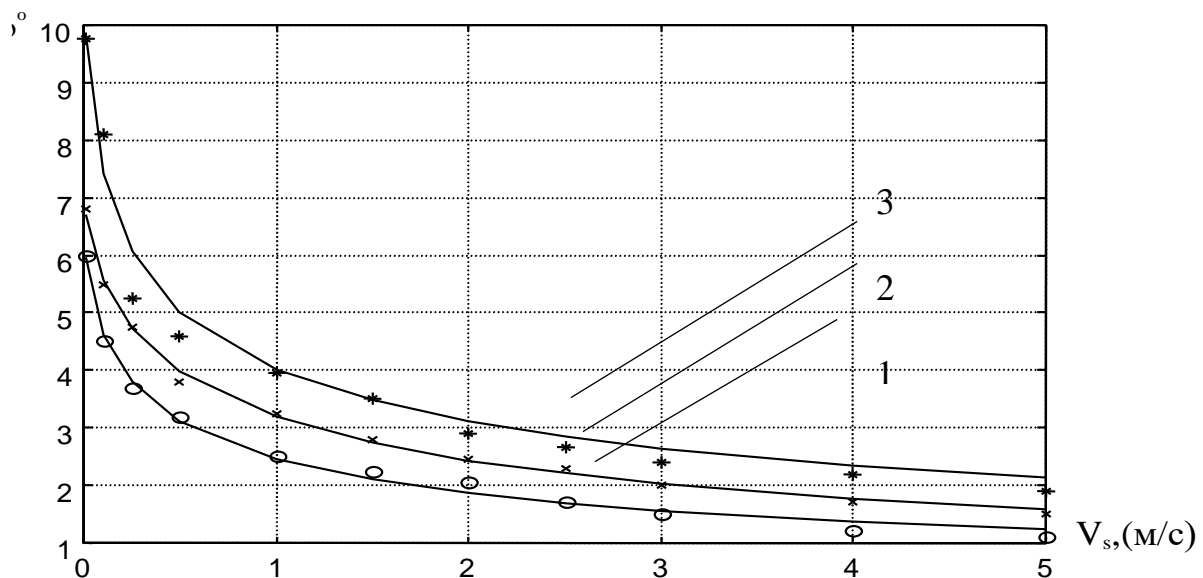


Рисунок 1. Графіки 1,2,3 емпіричного виразу (3) зміни кута тертя від швидкості ковзання в ЧП для різних груп матеріалів пар фрикційного контакту (табл.1,2) з відповідним позначенням експериментальних точок (вузлів апроксимації): "o" - I група, "x" - II група, "*" - III група.

In the article the approximation algorithm of experimental tabular datas by some non-linear expression is reviewed, that describes monotonic and continuous on a given interval nature of change value of friction angle of worm-gear in a function of relative velocity of slip. For definition of factors of offered expression the least squares process and solution of a system of non-linear equations by a modified iteration method of a Newton will be used, that gives satisfactory convergence and reduced error of fitting. The examples of particular outcomes are submitted.

Література

1. Левитан Ю.В., Обморнов В.П., Васильев В.И. Червячные редукторы: Справочник. Л.: Машиностроение, 1985.-165с.
2. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин.- М.: Наука, 1988.-640с.
3. Вейц В.Л. Динамика самотормозящихся червячных механизмов при силах трения, зависящих от скорости // Теория машин и механизмов. Вып.105-106.-М.: Наука,1965.с.5-19.
4. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах.- М.: Наука, 1972.-368 с.
5. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами.- К.: Наук.думка, 1989.-272 с.

Отримано 15.03.2000 р.