УДК 517.946

А.Громик
Подільська державна аграрно-технічна академія

СТАЦІОНАРНІ ТА НЕСТАЦІОНАРНІ ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ У ТОНКИХ НЕОБМЕЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНКАХ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки алгоритмічного характеру стаціонарних та нестаціонарних крайових задач теорії теплопровідності у тонких необмежених циліндрично-ізотропних пластинках з круговим отвором у випадку несиметрії відносно серединної площини і різних коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь.

Задачі розрахунку температурних полів і термопружних напружень у тонкостінних елементах конструкцій (пластинках і оболонках) викликають значний теоретичний, практичний та економічний інтерес. Вивченню термопружного стану тонких пластинок присвячено багато наукових праць, зокрема монографії [1-3], де вивчається, в основному, вплив на термопружний стан тонкої пластинки одного з багатьох факторів (дія зосередженого чи рухомого джерела тепла, теплообмін через бічну поверхню, тепловий режим на межі пластинки тощо) і припускається, що задача теплопровідності симетрична відносно серединної площини. Напружений стан напівобмежених тонких ізотропних пластинок з урахуванням несиметрії і поведінки коефіцієнтів теплообміну через бічні поверхні пластинки досліджено у [4-6]. У цій статті методом інтегральних перетворень Фур'є та Вебера побудовано точні аналітичні розв'язки стаціонарних та нестаціонарних задач теплопровідності з урахуванням несиметрії і поведінки коефіцієнтів теплообміну для необмежених тонких циліндрично-ізотропних пластинок з суцільним круговим отвором.

1. Стаціонарні температурні поля. Стаціонарне температурне поле у тонкій необмеженій циліндрично-ізотропній пластинці з круговим отвором радіуса R_0, через бічні поверхні $z = \pm\delta$ якої виконується теплообмін із зовнішнім середовищем, за законом Ньютона, у припущенні, що: а) термопружні характеристики пластинки не залежать від температури, б) пластинка підігрівається неперервно розподіленими джерелами тепла, в) задача теплопровідності не симетрична відносно серединної площини пластинки, і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z = \pm\delta$ пластинки різні, г) через поверхню $r = R_0$ пластинки виконується теплообмін за законом Ньютона або ця поверхня підтримується при заданому тепловому режимі чи піддається дії теплового потоку, визначає скалярна величина [1]

$$t(r,\varphi,z) = T(r\varphi) + \frac{z}{\delta}T^*(r,\varphi) \equiv T_1(r,\varphi) + \frac{z}{\delta}T_2(r,\varphi). \tag{1}$$

При цьому функції $T_j(r,\varphi)$ є обмеженими в області

$$\Pi = \left\{(r,\varphi): 0 < R_0 \le r < \infty; 0 \le \varphi < 2\pi\right\}$$

розв'зком еліптичної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)T_1 - \frac{\alpha+}{\Lambda}T_1 - \frac{\alpha-}{\Lambda}T_2 = -f_1(r,\varphi), \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)T_2 - \frac{3}{\Lambda}\left(\alpha_+ + \frac{4}{r_z}\right)T_2 - \frac{3\alpha-}{\Lambda}T_1 = -f_2(r,\varphi) \end{cases} \tag{2}$$

за крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} + \beta h_2\right)T_j\Big|_{r=R_0} = h_r T_{j0} \equiv q_j(\varphi), \lim_{r\to\infty}\frac{\partial T_j}{\partial r} = 0 \tag{3}$$

та умовою періодичності

$$T_j(r,\varphi+2\pi) = T_j(r,\varphi), j = 1,2. \tag{4}$$

де β - коефіцієнт зв'язності крайових умов [3].

Фізико-механічний зміст параметрів і функцій, що беруть участь у формулюванні задачі, подано у [1,2].

Застосуємо до задачі (2)-(4) скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ:

$$F_m\left[f(\varphi)\right] = \int_0^{2\pi} f(\varphi)e^{-im\varphi}d\varphi \equiv f_m, \tag{5}$$

$$F_m^{-1}[f_m] = \frac{\Re e}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m f_m e^{im\varphi} \equiv f(\varphi), \tag{6}$$

$$F_m\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right] = -m^2 f_m. \tag{7}$$

Тут $\Re e(\ldots)$ - дійсна частина виразу $(\ldots)$ щодо φ,

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, m = 0, \\ 2, m = 1,2,3\ldots \end{cases}$$

інтегральний оператор F_m за правилом (5), внаслідок тотожності (7), крайовій задачі (2)-(4) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на полярній осі $r \ge R_0 > 0$ розв'язку системи диференціальних рівнянь з оператором Бесселя

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right)T_{1m} - \frac{\alpha+}{\Lambda}T_{1m} - \frac{\alpha-}{\Lambda}T_{2m} = -f_{1m}(r), \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right)T_{2m} - \frac{3}{\Lambda}\left(\alpha_+ + \frac{4}{r_z}\right)T_{2m} - \frac{3\alpha-}{\Lambda}T_{1m} = -f_{2m}(r) \end{cases} \tag{8}$$

за крайовими умовами

$$\left(-\frac{d}{dr} + h\right)T_{jm}\Big|_{r=R_0} = q_{jm}, \lim_{r\to\infty}\frac{dT_{jm}}{dr} = 0, h = \beta h_r. \tag{9}$$

До задачі (8), (9) застосуємо інтегральне перетворення Вебера щодо радіальної змінної r [8]:

$$\mathrm{H}_m\left[f(r)\right] = \int\limits_{R_0}^{\infty} f(r) f_m^0(r,\lambda) r dr \equiv \widehat{f}(\lambda), \tag{10}$$

$$\mathrm{H}_m^{-1}[\widetilde{f}(\lambda)] = \int\limits_0^{\infty} \widetilde{f}(\lambda) \frac{f_m^0(r,\lambda)\lambda d\lambda}{A_m^2(\lambda) + B_m^2(\lambda)} \equiv f(r), \tag{11}$$

$$\mathrm{H}_m[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{m^2}{r^2} f] = -\lambda^2 \widetilde{f}(\lambda) + R_0 f_m^0(R_0,\lambda)(-\frac{df}{dr} + hf)\Big|_{r=R_0} \tag{12}$$

Тут

$$f_m^0(r,\lambda) = B_m(\lambda) N_m(\lambda r) - A_m(\lambda) J_m(\lambda r),$$

$$B_m(\lambda) = (h + \frac{m}{R_0}) J_m(\lambda R_0) - \lambda J_{m-1}(\lambda R_o),$$

$$A_m(\lambda) = (h + \frac{m}{R_0}) N_m(\lambda R_0) - \lambda N_{m-1}(\lambda R_o),$$

$J_k(x), N_k(x)$ - циліндричні функції дійсного аргумента 1-го та 2-го роду порядку k.

Інтегральний оператор H_m за правилом (10), внаслідок тотожності (12), крайовій задачі (8), (9) ставить у відповідність алгебраїчну систему рівнянь

$$\begin{cases} (\lambda^2 + \frac{\alpha_+}{\Lambda})\widetilde{T}_{1m} + \frac{\alpha_-}{\Lambda}\widetilde{T}_{2m} = \widetilde{F}_{1m}(\lambda), \\ \frac{3\alpha_-}{\Lambda}\widetilde{T}_{1m} + \frac{3}{\Lambda}(\alpha_+ + \frac{4}{r_z})\widetilde{T}_{2m} = \widetilde{F}_{2m}(\lambda), \end{cases} \tag{13}$$

де

$$\widetilde{F}_{jm}(\lambda) = \widetilde{f}_{jm}(\lambda) + R_0 f_m^0(R_0,\lambda) q_{jm}, j = 1{,}2.$$

Приймемо позначення:

$$x_1^2 = \frac{\alpha_-}{\Lambda}, x_2^2 = \frac{3}{\Lambda}(\alpha_+ + \frac{4}{r_z}), \omega_j^{\pm} = \frac{\beta_{\pm}^2 - x_j^2}{\beta_+^2 - \beta_-^2}, j = 1{,}2;$$

$$\beta_{\pm}^2 = \frac{2}{\Lambda}(\alpha_+ + \frac{3}{r_z}) \pm \frac{1}{\Lambda}\sqrt{(\alpha_+ + \frac{6}{r_z})^2 + 3\alpha_-^2} > 0.$$

Оскільки визначник системи (13)

$$\Delta(\lambda^2) \equiv (\lambda^2 + \beta_+^2)(\lambda^2 + \beta_-^2) \neq 0 \tag{14}$$

для будь-яких $\lambda \in [0;\infty]$, то ця система має єдиний розв'язок [9]:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_{1m}(\lambda) &= (\frac{\omega_2^+}{\lambda^2 + \beta_+^2} - \frac{\omega_2^-}{\lambda^2 + \beta_-^2})\widetilde{F}_{1m}(\lambda) + \\ &+ \frac{\alpha_-}{\Lambda(\beta_+^2 - \beta_-^2)}(\frac{1}{\lambda^2 + \beta_+^2} - \frac{1}{\lambda^2 + \beta_-^2})\widetilde{F}_{2m}(\lambda), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\widetilde{T}_{2m}(\lambda) = (\frac{3\alpha_-}{\Lambda(\beta_+^2 + \beta_-^2)}(\frac{1}{\lambda^2 + \beta_+^2} - \frac{1}{\lambda^2 + \beta_-^2})\widetilde{F}_{1m}(\lambda) +$$

$$+ (\frac{\omega_1^+}{\lambda^2 + \beta_+^2} - \frac{\omega_1^-}{\lambda^2 + \beta_-^2})\widetilde{F}_{2m}(\lambda).$$

Застосувавши до функції $\widetilde{T}_{jm}(\lambda)$ послідовно обернене інтегральне перетворення Вебера за правилом (11) та обернене скінчене інтегральне перетворення Фур'є за правилом (6), отримуємо функції

$$T_1(r,\varphi)=\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}[K^+(r,\rho,\varphi-\alpha)\omega_2^+ - K^-(r,\rho,\varphi-\alpha)\omega_2^-]f_1(\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho +$$

$$+\frac{\alpha_-}{\Lambda(\beta_+ - \beta_-^2)}\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}[K^+(r,\rho,\varphi-\alpha)\omega_2^+ - K^-(r,\rho,\varphi-\alpha)\omega_2^-]f_2(\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho +$$

$$+R_0\int\limits_0^{2\pi}[K^+(r,R_0,\varphi-\alpha)\omega_2^+ - K^-(r,R_0,\varphi-\alpha)\omega_2^-]q_1(\alpha)d\alpha +$$

$$+\frac{R_0\alpha_-}{\Lambda(\beta_+^2 - \beta_-^2}\int\limits_0^{2\pi}[K^+(r,R_0,\varphi-\alpha) - K^-(r,R_0,\varphi-\alpha)]q_2(\alpha)d\alpha, \qquad (17)$$

$$T_2(r,\varphi)=\frac{3\alpha_-}{\Lambda(\beta_+^2 - \beta_-^2)}\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}[K^+(r,\rho,\varphi-\alpha) - K^-(r,\rho,\varphi-\alpha)]f_1(\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho +$$

$$+\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}[K^+(r,\rho,\varphi-\alpha)\omega_1^+ - K^-(r,\rho,\varphi-\alpha)\omega_1^-]f_2(\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho +$$

$$+\frac{3R_0\alpha_-}{\Lambda(\beta_+^2 - \beta_-^2)}\int\limits_0^{2\pi}[K^+(r,R_0,\varphi-\alpha) - K^-(r,R_0,\varphi-\alpha)]q_1(\alpha)d\alpha +$$

$$+R_0\int\limits_0^{2\pi}[K^+(r,R_0,\varphi-\alpha)\omega_1^+ - K^-(r,R_0,\varphi-\alpha)\omega_1^+]q_2(\alpha)d\alpha, \qquad (18)$$

які описують структуру шуканого стаціонарного температурного поля у тонкій необмеженій циліндрично-ізотропній пластинці з круговим отвором.

У формулах (17), (18) беруть участь функції

$$K^{\pm}(r,\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\int\limits_0^{\infty}\frac{f_m^0(r,\lambda)f_m^0(\rho,\lambda)\lambda d\lambda}{(\lambda^2+\beta_{\pm}^2)(A_m^2(\lambda)+B_m^2(\lambda))}\cos m\varphi.$$

Пам'ятаймо, що 1) при $\alpha_z^+ = \alpha_z^-$ формули (17), (18) визначають структуру стаціонарного температурного поля у випадку, коли задача теплопровідності не симетрична відносно серединної площини пластинки, і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z=\pm\delta$ пластинки рівні, 2) при $\alpha_z^+ = \alpha_z^-$ і $t_+^c = t_-^c = t^c$ формули (17), (18) визначають структуру стаціонарного температурного поля у випадку, коли задача теплопровідності симетрична відносно серединної площини пластинки, і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z=\pm\delta$ пластинки рівні, 3) параметр h дозволяє виділяти з формул (17), (18) розв'язки крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r=R_0$ крайової умови 1-го роду $(\beta=1, h_r\to\infty)$, 2-го роду $(\beta=0)$ й 3-го роду $(\beta=1, h_r\equiv h>0.$

2. Нестаціонарні температурні поля

Нестаціонарне температурне поле у тонкій необмеженій циліндрично-ізотропній пластинці з круговим отвором радіуса R_0, через бічні поверхні $z=\pm\delta$ якої відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем, за законом Ньютона, у припущеннях а) – г) попереднього пункту визначає скалярна величина [1]

$$t(\tau, z, \varphi, z) = T(\tau, r, \varphi) + \frac{z}{\delta} T^*(\tau, r, \varphi) \equiv T_1(\tau, r, \varphi) + \frac{z}{\delta} T_2(\tau, r, \varphi). \quad (19)$$

При цьому функції $T_j(\tau, r, \varphi)$ є обмеженими в області

$$\overline{\Pi} = \{(\tau, r, \varphi): 0 < \tau < \infty; 0 < R_0 \le r < \infty; 0 \le \varphi < 2\pi\}$$

розв'язком параболічної системи рівнянь [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_1}{\partial t} + \dfrac{\alpha_+}{C} T_1 - \alpha(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial^2}{\varphi^2}) T_1 + \dfrac{\alpha_-}{C} T_2 = a f_1(\tau, r, \varphi), \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial t} + \dfrac{3}{C}(\alpha_+ + \dfrac{4}{r_z}) T_2 - a(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial^2}{\varphi^2}) T_2 + \dfrac{3\alpha_-}{C} T_1 = a f_2(\tau, r, \varphi), \end{cases} \quad (20)$$

за початковими умовами

$$T_j(\tau, r, \varphi)\Big|_{\tau=0} = q_j(r, \varphi), \; j = 1{,}2, \quad (21)$$

крайовими умовами

$$(-\frac{\partial}{\partial r} + \beta h_r) T_j \Big|_{r=R_0} = h_r T_{jc}(\tau, \varphi) \equiv q_j^1(\tau, \varphi), \; \lim_{r \to \infty} \frac{\partial T_j}{\partial r} = 0 \quad (22)$$

та умовами періодичності

$$T_j(\tau, r, \varphi + 2\pi) = T_j(\tau, r, \varphi), \; j = 1{,}2. \quad (23)$$

Застосувавши до задачі (20)-(23) скінченне інтегральне перетворення Фур'є F_m щодо кутової змінної φ, отримуємо задачу побудови обмеженого розв'зку системи диференціальних рівнянь з оператором Бесселя

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{1m}}{\partial \tau} - a(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{m}{r^2}) T_{1m} + \dfrac{\alpha+}{C} T_{1m} + \dfrac{\alpha-}{C} T_{2m} = a f_{1m}(\tau, r), \\ \dfrac{\partial T_{2m}}{\partial \tau} - a(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{m^2}{r^2}) T_{2m} + \dfrac{3}{C}(\alpha_+ + \dfrac{4}{r_z}) T_{2m} + \dfrac{3\alpha-}{C} T_{1m} = a f_{2m}(\tau, r) \end{cases} \quad (24)$$

за початковими умовами

$$T_{jm}(\tau, r)\Big|_{\tau=0} = q_{jm}(r) \quad (25)$$

та крайовими умовами

$$(-\frac{\partial}{\partial r} + h) T_{jm} \Big|_{r=R_0} = q_{jm}^1(\tau), \; \lim_{r \to \infty} \frac{\partial T_{jm}}{\partial r} = 0, \; h = \beta h_r. \quad (26)$$

До задачі (24)-(26) застосуємо інтегральне перетворення Вебера H_m щодо радіальної змінної r. Інтегральний оператор H_m за правилом (10) внаслідок тотожності (12) крайовій задачі (24)-(26) ставить у відповідність задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{T}_{1m}}{d\tau} + \omega_1^2 \widetilde{T}_{1m} + \dfrac{\alpha_-}{C} \widetilde{T}_{2m} = a\widetilde{f}_{1m}(\tau, \lambda) + a R_0 f_m(R_0, \lambda) q_{1m}^1(\tau), \\ \dfrac{d\widetilde{T}_{2m}}{d\tau} + \omega_2^2 \widetilde{T}_{2m} + \dfrac{3\alpha_-}{C} T_{1m} = a\widetilde{f}_{2m}(\tau, \lambda) + a R_0 f_m(R_0, \lambda) q_{2m}^1(\tau), \end{cases} \quad (27)$$

$$\widetilde{T}_{jm}(\tau, \lambda)\Big|_{\tau=0} = \widetilde{q}_{jm}(\lambda), \quad (28)$$

де

$$\omega_1^2 = a\lambda^2 + \frac{\alpha_+}{C}, \quad \omega_2^2 = a\lambda^2 + \frac{3}{c}(\alpha_+ + \frac{4}{r_z}).$$

Характеристичне рівняння системи (27)

$$\Phi(z) \equiv z^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) z + \omega_1^2 \omega_2^2 - 3\alpha_-^2 c^{-2} = 0 \quad (29)$$

має дійсні різні корені

$$z_{1,2} = -a(\lambda^2 + \beta_{\pm}^2),$$

тому розв'язкова матриця (фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші) цієї системи

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{zr}\begin{bmatrix} z+\omega_1^2 & -c^{-1}\alpha_- \\ -3c^{-1}\alpha_- & z+\omega_2^2 \end{bmatrix}\frac{dz}{\Phi(z)} =$$

$$= \frac{e^{-a\tau\lambda^2}}{2q_0}\begin{bmatrix} \gamma_0^+ e^{-a\tau\beta_-^2} + \gamma_0^- e^{-a\tau\beta^2} + \frac{\alpha_-}{c}(e^{-a\tau\beta_+^2} - e^{-a\tau\beta_-^2}) \\ \frac{3\alpha_-}{c}(e^{-a\tau\beta_+^2} - e^{-a\tau\beta_-^2})\gamma_0^+ e^{-a\tau\beta_+^2} + \gamma_0^- e^{-a\tau\beta_-^2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Тут прийняті позначення

$$q_0 = \left[(\alpha_+ + 6r_z^{-1})^2\right]^{1/2}, \gamma_0^{\pm} = q_0 \pm (\alpha_+ + 6r_z^{-1}).$$

Якщо визначити матрицю

$$Q(\tau) = \frac{1}{2q_0}\begin{bmatrix} \gamma_0^+ e^{-a\tau\beta_-^2} + \gamma_0^- e^{-a\tau\beta_+^2} & \frac{\alpha_-}{c}(e^{-a\tau\beta_+^2} - e^{-a\tau\beta_-^2}) \\ \frac{3\alpha_-}{c}(e^{-a\tau\beta_+^2} - e^{-a\tau\beta_-^2}) & \gamma_0^+ e^{-a\tau\beta_+^2} + \gamma_0^- e^{-a\tau\beta_-^2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

то ф.м.р. задачі Коші (27), (28) виглядатиме так:

$$\widetilde{G}_m(\tau,\lambda) = e^{-a\tau\lambda^2} Q(\tau). \quad (32)$$

Вважатимемо

$$\widetilde{T}_m(\tau,\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{T}_{1m}(\tau,\lambda) \\ \widetilde{T}_{2m}(\tau,\lambda) \end{pmatrix}, \widetilde{f}_m(\tau,\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{f}_{1m}(\tau,\lambda) \\ f_{2m}(\tau,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{q}_m(\tau,\lambda) = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_{1m}(\tau,\lambda) \\ \widetilde{q}_{2m}(\tau,\lambda) \end{pmatrix}, q_m^1(\tau,\lambda) = \begin{pmatrix} q_{1m}^1(\tau,\lambda) \\ q_{2m}^1(\tau,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі (27), (28) є вектор-функція

$$\widetilde{T}_m(\tau,\lambda) = a\int_0^{\tau} \widetilde{G}_m(\tau-s,\lambda)\widetilde{f}_m(s,\lambda)ds +$$

$$+\widetilde{G}_m(\tau,\lambda)\widetilde{q}_m(\lambda) + aR_0 f_m^0(R_0,\lambda)\int_0^{\tau}\widetilde{G}_m(\tau-s,\lambda)q_m^1(s)ds. \quad (33)$$

Повертаючись у формулі (33) до оригіналів, отримуємо вектор-функцію

$$T(\tau,r,\varphi) = a\int_0^{\tau} Q(\tau-s)\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{2\pi} G(\tau-s,r,\rho,\varphi-\alpha)f(s,\rho,\alpha)\times$$

$$\times\rho d\alpha d\rho ds + Q(\tau)\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{2\pi} G(\tau,r,\rho,\varphi-\alpha)q(\rho,\alpha)\rho d\alpha d\rho + \quad (34)$$

$$+aR_0\int_0^{r} Q(\tau-s)\int_0^{2\pi} G(\tau-s,r,R_0,\varphi-\alpha)q^1(s,\alpha)d\alpha ds,$$

що описує структуру шуканого нестаціонарного температурного поля у тонкій необмеженій циліндрично-ізотропній пластинці з круговим отвором.

У формулі (34) бере участь функція Коші

$$G(\tau, r, \rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \int_0^{\infty} e^{-a\tau\lambda^2} \frac{f_m^0(r,\lambda) f_m^0(\rho,\lambda)\lambda d\lambda}{A_m^2(\lambda) + B_m^2(\lambda)} \cos m\varphi. \qquad (35)$$

Пам'ятаймо, що 1) при $\alpha_z^+ = \alpha_z^-$ формула (34) визначає структуру нестаціонарного температурного поля у випадку, коли задача теплопровідності не симетрична відносно серединної площини пластинки, і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z = \pm\delta$ пластинки рівні; 2) при $\alpha_z^+ = \alpha_z^-$ і $t_+^c = t_-^c = t^c$ формула (34) визначає структуру нестаціонарного температурного поля у випадку, коли задача теплопровідності симетрична відносно серединної площини пластинки, і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь $z = \pm\delta$ пластинки рівні, 3) параметр h дозволяє виділяти з формули (34) розв'язки крайових задач у випадку задання на радіальній поверхні $r = R_0$ крайової умови 1-го, 2-го й 3-го роду.

Exact analitical solutions of algorithmic character for stationary and nonstationary boundary problems of heat theory are built by the method of integral transformations in thin nonbounded cylindric – isotropical stratums with round hole in the case of nonsymmetry relatively middle plane and different coefficients of heat exchange with side surfaces.

Література

1. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972.-308с.
2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика.- Киев: Наук. думка, 1976.-310 с.
3. Конет І.М., Ленюк М.П. Напружений стан тонких пластинок.- Кам'янець-Подільський: К-ПДПІ, 1997.-136 с.
4. Громик А.П. Стаціонарні температурні поля в безкрайній напівбезмежній ізотропній пластинці // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1993.- Вип. 4. – С. 64-74.
5. Громик А.П. Нестаціонарні температурні поля в безкрайній напівбезмежній ізотропній пластинці // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1994.- Вип. 5. – С. 84-91.
6. Громик А.П. Статичні і квазістатичні термопружні поля в безкрайній напівбезмежній тонкій ізотропній пластинці // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложение: Сб. науч. тр. / НАН Украины. Ин-т математики. Ч.И. – Киев, 1996. – С. 35-37.
7. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физики. – М.: Гостехиздат, 1956.-204 с.
8. Ленюк М.П. Интегральние преобразования с разделенными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье). – Киев, 1983. – 56 с. (препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.18).
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

Одержано 11.11.1999 р.