УДК 517.91:532.2

Г.Білянін

Чернівецький фінансово-економічний інститут

УЗАГАЛЬНЕНІ ГІБРИДНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДУ – ФУР'Є

Методом дельтаподібної послідовності побудовано узагальнені гібридні інтегральні перетворення типу Лежандра 2-го роду – Фур'є.

Запровадимо методом дельтаподібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині $I_1^+ = \{r: r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, \infty); R_0 > 0\}$ гібридним диференціальним оператором

$$M_\mu = a_1^2\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\Lambda_\mu + a_2^2\theta(r-R_1)d^2/dr^2, \mu = (\mu_1, \mu_2). \quad (1)$$

Тут $a_j^2 > 0, j = 1,2, \theta(x)$ - одинична функція Хевісайда,

$$\Lambda_\mu \equiv \Lambda_{(\mu_1,\mu_2)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr}\right), \mu_1 \ge \mu_2 > -\frac{1}{2}$$

де Λ_μ - узагальнений диференціальний оператор (УДО) Лежандра [1].

За дельтаподібну послідовність візьмемо ядро Коші – фундаментальний розв'язок задачі Коші для системи рівнянь теплопровідності параболічного типу, породженої диференціальним оператором M_μ.

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області

$$D_1^+ = \{(t,r): t \in (0,\infty), r \in I_1^+ = (R_0, R_1) \cup (R_1, \infty); R_0 > 0\}$$

розв'язку сепаратної системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку параболічного типу [2]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2\Lambda_\mu\right)u_1(t,r) = 0, r \in (R_0, R_1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_2(t,r) = 0, r \in (R_1, \infty) \quad (2)$$

за початковими умовами

$$u_1(t,r)\big|_{t=0} = q_1(r), r \in (R_0, R_1); u_2(t,r)\big|_{t=0} = q_2(r), r \in (R_1, \infty), \quad (3)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right)u_1\Big|_{r=R_0} = 0, \frac{\partial u_2}{\partial r}\Big|_{r=\infty} = 0; \left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \ne 0 \quad (4)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1\right)u_1(t,r) - \left(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1\right)u_2(t,r)\right]\Big|_{r=R_1} = 0; j = 1,2; \quad (5)$$

Ми вважаємо, що

1) $c_{11}c_{21} > 0, \; c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1; j = 1,2;$
2) вектор – функція $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r)\}$ є оригіналом за Лапласом щодо аргумента t [3].

У зображенні за Лапласом задачі (2)-(5) відповідає крайова задача побудови обмеженого на множині I_1^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку Лежандра й Фур'є для модифікованих функцій

$$(\Lambda_\mu - \nu_1^2)u_1^*(p,r) = -\overline{q_1}(r), r \in (R_0, R_1)$$

$$(\frac{d^2}{dr^2} - \nu_2^2)u_2^*(p,r) = -\overline{q_2}(r), r \in (R_1, \infty) \tag{6}$$

за крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0)u_1^*(p,r)\Big|_{r=R_0} = 0, \frac{du_2^*}{dr}\Big|_{r=\infty} = 0 \tag{7}$$

та умовами спряження

$$\left[(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1)u_1^* - (\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1)u_2^*\right]\Big|_{r=R_1} = 0; \quad j = 1,2. \tag{8}$$

У рівностях (6) $\overline{q}_j(r) = a_j^{-2} q_j(r), \nu_j = a_j^{-1}(p + \gamma_j^2)^{1/2}, \Re e \nu_j > 0, j = 1,2.$

Фундаментальну систему розв'язків для узагальненого диференціального рівняння (УДР) Лежандра $(\Lambda_\mu - \nu^2)\upsilon = 0$ утворюють узагальнені приєднані модифіковані функції Лежандра 1-го роду $P_{-1/2+\nu}^\mu(ch\, r)$ та 2-го роду $L_{-1/2+\nu}^\mu(ch \quad r) = 2/\pi e^{-i\mu_1\pi} Q_{-1/2+\nu}^\mu(ch\, r)$ $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ [1]. Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - \nu^2)\upsilon = 0$ утворюють функції $\upsilon_1 = \exp(\nu r)$ та $\upsilon_2 = \exp(-\nu r)$ або їх лінійні комбінації $ch\nu r$ та $sh\nu r$ [4].

Внаслідок властивостей функцій, що утворюють фундаментальну систему розв'язків, обмежений на множині I_1^+ розв'язок крайової задачі (6)-(8) будуємо за правилами [4]:

$$u_1^*(p,r) = A_1 P_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, r) + B_1 L_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, r) + \int\limits_{R_0}^{R_1} E_1^*(p,r,\rho)\overline{q}_1(\rho) sh\, \rho d\rho,$$

$$u_2^*(p,r) = B_2 e^{-\nu_2(r-R_1)} + \int\limits_{R_1}^{\infty} E_2^*(p,r,\rho)\overline{q}_2(\rho) d\rho. \tag{9}$$

У рівностях (9) $E_j^*(p,r,\rho)-$ функції Коші:

$$E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0, \tag{10}$$

$$d/drE_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - d/drE_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = -\left[\varphi_j(\rho)\right]^{-1}.$$

Тут $\varphi_1(r) = sh\, r, \varphi_2(r) = 1.$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1^* = \begin{cases} E_1^{-*} \equiv C_{11} P_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, r) + D_{11} L_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, r), R_0 < r < \rho < R_1 \\ E_1^{+*} \equiv C_{12} P_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, r) + D_{12} L_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, r), R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases}$$

Згідно з рівностями (10) маємо два рівняння:

$$(C_{12} - C_{11}) P_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, \rho) + (D_{12} - D_{11}) L_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, \rho) = 0 \tag{11}$$

$$(C_{12} - C_{11}) P_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, \rho) + (D_{12} - D_{11}) L_{-1/2+\nu_1}^\mu(ch\, \rho) = -(sh^2 \rho)^{-1}$$

Якщо скористатися визначником Вронського [1]

$$W\left[P^{\mu}_{-1/2+\nu_1}(ch\,r), L^{\mu}_{-1/2+\nu_1}(ch\,r)\right] = -\frac{1}{sh^2\rho}B_{\mu}^{-1}(\nu_1) \equiv$$
$$\equiv -\frac{1}{sh^2\rho}\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(1/2+\nu_1+2^{-1}(\mu_1+\mu_2))\Gamma(1/2+\nu_1+2^{-1}(\mu_1-\mu_2))}{\Gamma(1/2+\nu_1-2^{-1}(\mu_1+\mu_2))\Gamma(1/2+\nu_1-2^{-1}(\mu_1-\mu_2))}, \qquad (12)$$

то із системи (11) знаходимо співвідношення:

$$C_{12}-C_{11} = B_{\mu}(\nu_1)L^{\mu}_{-1/2+\nu_1}(ch\,\rho), D_{12}-D_{11} = B_{\mu}(\nu_1)P^{\mu}_{-1/2+\nu_1}(ch\,r). \qquad (13)$$

До рівностей (13) додамо рівняння:

$$(\alpha^0_{11}\frac{d}{dr}+\beta^0_{11})E_1^{-*}\Big|_{r=R_0} \equiv C_{11}Z^{01,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0)+D_{11}Z^{02,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0)=0 \qquad (14)$$

$$(\alpha^1_{11}\frac{d}{dr}+\beta^1_{11})E_1^{-*}\Big|_{r=R_1} \equiv C_{12}Z^{11,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_1)+D_{12}Z^{12,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_1)=0$$

Із системи (13), (14) маємо, що

$$C_{11} = -\frac{B_{\mu}(\nu_1)}{\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0, chR_1)}Z^{02,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0)F^{1,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_1, ch\,\rho),$$

$$D_{11} = -\frac{B_{\mu}(\nu_1)}{\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0, chR_1)}Z^{01,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0)F^{1,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_1, ch\,\rho), \qquad (15)$$

Тут прийняті позначення:

$$\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_1;j1}(chR_0, chR_1) = Z^{01,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0)Z^{12,\mu}_{-1/2+\nu_1;j1}(chR_1) -$$
$$-Z^{02,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0)Z^{11,\mu}_{-1/2+\nu_1;j1}(chR_1),$$
$$F^{m,\mu}_{-1/2+\nu_1;j1}(chR_m, ch\,r) = Z^{m1,\mu}_{-1/2+\nu_1;j1}(chR_m)L^{\mu}_{-1/2+\nu_1;j1}(ch\,r) -$$
$$-Z^{m2,\mu}_{-1/2+\nu_1;j1}(chR_m)P^{\mu}_{-1/2+\nu_1}(ch\,r).$$

Цим функція Коші $E_1^*(p,r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_1^* = \frac{B_{\mu}(\nu_1)}{\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0, chR_1)}\times$$
$$\times\begin{cases} F^{0,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(chR_0, ch\,r)F^{1,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_1, ch\,\rho), R_0<r<\rho<R_1 \\ F^{0,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_0, ch\,\rho)F^{1,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_1, ch\,r), R_0<\rho<r<R_1 \end{cases}. \qquad (16)$$

Нехай функція Коші

$$E_2^* = \begin{cases} E_2^{-*} \equiv C_{21}ch\,\nu_2 r + D_{21}sh\,\nu_2 r, R_1<r<\rho<\infty \\ E_2^{+*} \equiv D_{22}e^{-\nu_2(r-R_1)}, R_1<\rho<r<\infty \end{cases}$$

Властивості (10) функції Коші дають систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} C_{21}ch\,\nu_2\rho + D_{21}sh\,\nu_2\rho - D_{22}e^{-\nu_2(\rho-R_1)} = 0 \\ C_{21}sh\,\nu_2\rho + D_{21}ch\,\nu_2\rho + D_{22}e^{-\nu_2(\rho-R_1)} = \nu_2^{-1} \end{cases}. \qquad (17)$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_{21} = -\nu_2^{-1}sh\,\nu_2\rho + D_{22}\exp(\nu_2 R_1); D_{21} = -\nu_2^{-1}ch\,\nu_2\rho - D_{22}\exp(\nu_2 R_1). \qquad (18)$$

До рівностей (18) додамо рівняння:

$$(\alpha_{12}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{12}^1) E_2^{-*} \Big|_{r=R_1} \equiv C_{21} V_{12}^{11}(v_2 R_1) + D_{21} V_{12}^{12}(v_2 R_1) = 0 \tag{19}$$

Із системи (18),(19) знаходимо, що

$$D_{22} = \frac{1}{v_2(\alpha_{12}^1 v_2 - \beta_{12}^1} \Phi_{12}^1(v_2 R_1, v_2 \rho).$$

Цим функція Коші $E_2^*(p, r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_2^*(p, r, \rho) = \frac{1}{v_2(\alpha_{12}^1 v_2 - \beta_{12}^1)}$$

$$\begin{cases} e^{-v_2(\rho - R_1)} \Phi_{12}^1(v_2 R_1, v_2 r), R_1 < r < \rho < \infty \\ e^{-v_2(r - R_1)} \Phi_{12}^1(v_2 R_1, v_2 \rho), R_1 < \rho < r < \infty \end{cases}. \tag{20}$$

Тут бере участь функція

$$\Phi_{j2}^1(v_2 R_1, v_2 r) = V_{j2}^{12}(v_2 R_1) ch\, v_2 r - V_{j2}^{11}(v_2 R_1) sh\, v_2 r, j = 1,2.$$

Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення сталих A_1, B_1, B_2 дають алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} &Z_{-1/2+v_1;11}^{01,\mu}(ch\, R_0) A_1 + Z_{-1/2+v_1;11}^{02,\mu}(ch\, R_0) B_1 = 0 \\ &Z_{-1/2+v_1;11}^{11,\mu}(ch\, R_1) A_1 + Z_{-1/2+v_1;11}^{12,\mu}(ch\, R_1) B_1 + (\alpha_{12}^1 v_2 - \beta_{12}^1) B_2 = 0 \\ &Z_{-1/2+v_1;21}^{11,\mu}(ch\, R_1) A_1 + Z_{-1/2+v_1;21}^{12,\mu}(ch\, R_1) B_1 + (\alpha_{22}^1 v_2 - \beta_{22}^1) B_2 = G_{12}^*. \end{aligned} \tag{21}$$

У системі (21) функція

$$G_{12}^* = \frac{c_{11}}{sh\, R_1} \int_{R_0}^{R_1} \frac{F_{-1/2+v_1;11}^{0,\mu}(ch\, R_0, ch\, \rho)}{\Delta_{-1/2+v_1;11}^{\mu}(ch\, R_0, ch\, R_1)} \bar{q}_1(\rho) sh\, \rho d\rho - c_{21} \int_{R_1}^{\infty} \frac{e^{-v_2(\rho - R_1)}}{\alpha_{12}^1 v_2 - \beta_{12}^1} \bar{q}_2(\rho) d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі: для $p = \sigma + is$ з $\Re ep = \sigma \ge \sigma_0$, де σ_0- абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\Im mp = s \in (-\infty, +\infty)$ визначник алгебраїчної системи (21)

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^*(\rho) \equiv (\alpha_{22}^1 v_2 - \beta_{22}^1) \Delta_{-1/2+v_1;11}^{\mu}(ch\, R_0, ch\, R_1) - \\ -(\alpha_{12}^1 v_2 - \beta_{12}^1) \Delta_{-1/2+v_1;21}^{\mu}(ch\, R_0, ch\, R_1) \ne 0. \end{aligned} \tag{22}$$

У результаті однозначного розв'язку алгебраїчної системи (21), підстановки одержаних значень A_1, B_1, B_2 у формули (9) отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (6)-(8):

$$u_j^*(p, r) = \int_{R_0}^{R_1} \mathrm{H}_{\mu; j1}^*(p, r, \rho) \bar{q}_1(\rho) sh\, \rho d\rho + \int_{R_1}^{\infty} \mathrm{H}_{\mu; j2}^*(p, r, \rho) \bar{q}_2(\rho) d\rho; j = 1,2. \tag{23}$$

У рівностях (23) беруть участь породжені неоднорідністю системи (6) функції впливу:

$$\mathrm{H}_{\mu;11}^*(p, r, \rho) = \frac{B_\mu(v_1)}{\Delta_\mu^*(p)} \times$$

$$\times\begin{cases} F^{0,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_0, ch\,r)[(\alpha^1_{22}\nu_2-\beta^1_{22})F^{1,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_1, ch\,\rho)- \\ F^{0,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_0, ch\,\rho)[(\alpha^1_{22}\nu_2-\beta^1_{22})F^{1,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_1, ch\,r)- \end{cases}$$

$$-(\alpha^1_{12}\nu_2-\beta^1_{12})F^{1,\mu}_{-1/2+\nu_1;21}(ch\,R_1, ch\,\rho)], R_0<r<\rho<R_1$$

$$-(\alpha^1_{12}\nu_2-\beta^1_{12})F^{1,\mu}_{-1/2+\nu_1;21}(ch\,R_1, ch\,r)], R_0<\rho<r<R_1;$$

$$\mathrm{H}^*_{\mu;12}(p,r,\rho)=\frac{c_{21}}{\Delta^*_\mu(p)}e^{-\nu_2(\rho-R_1)}F^{0,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_0, ch\,r); \quad (24)$$

$$\mathrm{H}^*_{\mu;21}(p,r,\rho)=\frac{c_{11}}{sh\,R_1\Delta^*_\mu(p)}e^{-\nu_2(r-R_1)}F^{0,\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_0, ch\,\rho);$$

$$\mathrm{H}^*_{\mu;22}(p,r,\rho)=\frac{1}{\nu_2\Delta^*_\mu(p)}\begin{cases} e^{-\nu_2(\rho-R_1)}[\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_0, ch\,R_1)\Phi^1_{22}(\nu_2R_1,\nu_2r)- \\ e^{-\nu_2(r-R_1)}[\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_1;11}(ch\,R_0, ch\,R_1)\Phi^1_{22}(\nu_2R_1\nu_2\rho)- \end{cases}$$

$$-\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_1;21}(ch\,R_0, ch\,R_1)\Phi^1_{12}(\nu_2R_1,\nu_2r)], R_1<r<\rho<\infty$$

$$-\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_1;21}(ch\,R_0, ch\,R_1)\Phi^1_{12}(\nu_2R_1,\nu_2\rho)], R_1<\rho<r<\infty.$$

Особливими точками функції впливу $\mathrm{H}^*_{\mu;jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_1^2, p=-\gamma_2^2$ та $p=\infty$. Не порушуючи загальності, можна припустити, що $\gamma_1^2-\gamma_2^2\ge 0.$ Покладемо $k_j^2=\gamma_1^2-\gamma_j^2\ge 0, j=1{,}2.$ Тоді при $p=-(\beta^2+\gamma_1^2)\equiv(\beta^2+\gamma_1^2)\exp(\pi i)\nu_j=$ $=ia_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}\equiv ia_j^{-1}b_j(\beta)\equiv i\bar{b}_j(\beta); j=1{,}2.$

Розглянемо дійсні функції:

$$A^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r)=\frac{1}{z(\tau)}\left[L^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r)+i\gamma_1(\tau)P^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r)\right], \tau\in(0,\infty);$$

$$B^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r)=\frac{1}{z(\tau)}\left[P^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r)-\sin\mu_1\pi L^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r)\right], \mu=(\mu_1,\mu_2);$$

$$\gamma_1(\tau)=\cos\mu_1\pi sh2\pi\tau(\cos\mu_2\pi+ch2\pi\tau\cos\mu_1\pi)^{-1};$$

$$z(\tau)=\cos\mu_1\pi+i\gamma_1(\tau)\sin\mu_1\pi, \mu_1\ge\mu_2.$$

Очевидно, що функції $A^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r)$ та $B^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r)$ як лінійні комбінації розв'язків узагальненого диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_\mu+\tau^2)\upsilon=0$ є розв'язками цього рівняння. Оскільки визначник Вронського

$$W\left[A^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r), B^{\mu}_{-1/2+ir}(ch\,r)\right]=\frac{1}{\pi^3}\frac{sh2\pi\tau}{\gamma_1(\tau)sh^2r}\left|\Gamma(1/2+i\tau+\frac{\mu_1-\mu_2}{2})\right|^2\times$$

$$\times\left|\Gamma(1/2+i\tau+\frac{\mu_1+\mu_2}{2})\right|^2\ne 0,$$

то функції $A^{(\mu_1,\mu_2)}_{-1/2+ir}(ch\,r)$ та $B^{(\mu_1,\mu_2)}_{-1/2+ir}(ch\,r)$ можна прийняти за фундаментальну систему розв'язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра

$(\Lambda_{(\mu_1,\mu_2)} + \tau^2)\upsilon = 0.$

Якщо покласти

$$Y^{m1,(\mu_1,\mu_2)}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_m) = \alpha^1_{j1} sh\,R_m A^{(\mu_1,\mu_2)/}_{-1/2+i\bar{b}_1}(ch\,R_m) + \beta^1_{j1} A^{(\mu_1,\mu_2)}_{-1/2+i\bar{b}_1}(ch\,R_m),$$

$$Y^{m2,(\mu_1,\mu_2)}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_m) = \alpha^1_{j1} sh\,R_m B^{(\mu_1,\mu_2)/}_{-1/2+i\bar{b}_1}(ch\,R_m) + \beta^1_{j1} B^{(\mu_1,\mu_2)}_{-1/2+i\bar{b}_1}(ch\,R_m),$$

то при $\nu_1 = i\bar{b}_1$ одержимо, що

$$Z^{m1\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_m) = \sin\mu_1\pi Y^{m1,\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_m) + \cos\mu_1\pi Y^{m2,\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_m);$$

$$Z^{m2\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_m) = Y^{m1,\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_m) - i\gamma_1(\bar{b}_1) Y^{m2,\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_m);$$

$$\Delta^{\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_0, ch\,R_1) = -z(\bar{b}_1(\beta))\delta^{\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_0, ch\,R_1)$$

$$\delta^{\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_0, ch\,R_1) = Y^{01,\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;11}(ch\,R_0) Y^{12,\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_1) -$$

$$- Y^{02,\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;11}(ch\,R_0) Y^{11,\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;j1}(ch\,R_1);\; j = 1,2.$$

Отже, при $p = (\beta^2 + \gamma_1^2)\exp \pi i$ безпосередньо маємо, що

$$\Delta^*_{\mu}((\beta^2 + \gamma_1^2)\exp \pi i) = -z(\bar{b}_1(\beta))\Big[\omega_{\mu;1}(\beta) - i\bar{b}_2\omega_{\mu;2}(\beta)\Big]. \tag{25}$$

У рівності (25) прийняті позначення:

$$\omega_{\mu;1}(\beta) = \beta^1_{12}\delta^{\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;21}(ch\,R_0, ch\,R_1) - \beta^1_{22}\delta^{\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;11}(ch\,R_0, ch\,R_1);$$

$$\omega_{\mu;2}(\beta) = \alpha^1_{12}\delta^{\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;21}(ch\,R_0, ch\,R_1) - \alpha^1_{22}\delta^{\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;11}(ch\,R_0, ch\,R_1);$$

Рівність (25) показує, що спектр гібридного диференціального оператора M_μ неперервний. Спектральному параметрові $\beta \in (0,\infty)$ відповідає спектральна вектор-функція

$$V_\mu(r,\beta) = \Big\{V_{\mu;1}(r,\beta); V_{\mu;2}(r,\beta)\Big\}.$$

Оскільки оператор M_μ має тільки одну особливу точку $r = \infty$, то вектор-функція $V_\mu(r,\beta)$ дійсна функція аргументів r та β. Для обчислення її компонент $V_{\mu;j}(r,\beta)$ метод контурного інтегралу з використанням леми Рімана й теореми Коші [3] дає формули обчислення оригіналу функції впливу:

$$\mathrm{H}_{\mu;jk}(t,r,\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \mathrm{H}^*_{\mu;jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}\,\Im m\Big\{\mathrm{H}^*_{\mu;jk}(e^{\pi i}(\beta^2 + \gamma_1^2), r, \rho)\Big\}\beta d\beta; j,k = 1,2. \tag{26}$$

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{1}{sh\,R_1}\frac{1}{a_1^2}, \sigma_2 = \frac{1}{a_2^2}, \sigma(r) = \sigma_1 shr\theta(r - R_0)\theta(R_1 - r) + \sigma_2\theta(r - R_1);$$

$$V_\mu(r,\beta) = V_{\mu;1}(r,\beta)\theta(r - R_0)\theta(R_1 - r) + V_{\mu;2}(r,\beta)\theta(r - R_1);$$

$$V_{\mu;1}(r,\beta) = c_{21}\bar{b}_2(\beta)F^{0,\mu}_{-1/2+i\bar{b}_1;11}(ch\,R_0, ch\,r);$$

$$V_{\mu;2}(r,\beta)=\omega_{\mu;1}(\beta)\sin\bar{b}_2(r-R_1)-\bar{b}_2(\beta)\omega_{\mu;2}(\beta)\cos\bar{b}_2(r-R_1); \quad (27)$$

$$\Omega_\mu(\beta)=\beta(\bar{b}_2(\beta))^{-1}(\left[\omega_{\mu;1}(\beta)\right]^2+(\bar{b}_2(\beta))^2\left[\omega_{\mu;2}(\beta)\right]^2)^{-1}.$$

Виконавши у формулах (26) вказані операції, приходимо до рівностей:

$$\mathrm{H}_{\mu;jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}V_{\mu;j}(r,\beta)V_{\mu;k}(\rho,\beta)\Omega_\mu(\beta)d\beta\sigma_k a_k^2;\ j,k=1,2. \quad (28)$$

Повертаючись у формулах (23) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок задачі (2)-(5):

$$u_j(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}V_{\mu;j}(r,\beta)\Omega_\mu(\beta)\left[\int_{R_0}^{R_1}q_1(\rho)\times\right.$$

$$\left.\times V_{\mu;1}(\rho,\beta)\sigma_1 sh\,\rho d\rho+\int_{R_1}^\infty q_2(\rho)V_{\mu;2}(\rho,\beta)\sigma_2 dp\right]d\beta;\ j=1,2. \quad (29)$$

Звідси внаслідок початкових умов отримуємо для вектор-функції $q(r)=\{q_1(r);q_2(r)\}$ інтегральне зображення:

$$q(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_\mu(r,\beta)\Omega_\mu(\beta)\int_{R_0}^\infty q(\rho)V_\mu(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho d\beta. \quad (30)$$

Інтегральне зображення (30) визначає пряме

$$\mathrm{H}_{\mu;1}\left[q(r)\right]=\int_{R_0}^\infty q(r)V_\mu(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{q}(\beta) \quad (31)$$

та обернене

$$\mathrm{H}_{\mu;1}^{-1}\left[\tilde{q}(\beta)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\tilde{q}(\beta)V_\mu(r,\beta)\Omega(\beta)d\beta\equiv q(r) \quad (32)$$

узагальнене гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра 2-го роду – Фур'є на множині I_1^+.

Внаслідок властивостей дельтаподібної послідовності (ядра Коші) справджується твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення):
Якщо вектор-функція $f(r)=q(r)\left[\sqrt{sh\,r}\,\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)+1\cdot\theta(r-R_1)\right]$ неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $[R_0,\infty)$, то для будь-якого $r\in I_1^+$ справджується інтегральне зображення (30).

В основі застосування запровадженого узагальненого гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра 2-го роду – Фур'є для розв'язання відповідних сингулярних задач математичної фізики лежить основна тотожність.

Теорема 2 (про основну тотожність): Якщо вектор-функція $q(r)\in C^{(2)}(I_1^+)$, задовольняє крайові умови

$$(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0)q_1(r)\Big|_{r=R_0}=q_{10},\ \lim_{r\to\infty}(\frac{dq_2}{dr}V_{\mu;2}-q_2\frac{dV_{\mu;2}}{dr})=0 \quad (33)$$

та умови спряження (8), то справджується основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора M_μ:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H}_{\mu;1}\Big[M_{\mu}\big[q(r)\big]\Big] = -\beta^2\tilde{q}(\beta) - a_1^2\sigma_1 sh\,R_0(\alpha_{11}^0)^{-1}V_{\mu;1}(R_0,\beta)q_{10} - \\
&- k_1^2\int_{R_0}^{R_1} q_1(\rho)V_{\mu;1}(\rho,\beta)\sigma_1 sh\,\rho d\rho - k_2^2\int_{R_1}^{\infty} q_2(\rho)V_{\mu;2}(\rho,\beta)\sigma_2 d\rho.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Тотожність (34) одержується в результаті інтегрування під знаком інтегралів частинами з наступним використанням властивостей вектор-функцій $q(r)$ та $V_{\mu}(r,\beta)$, крайових умов (33), структури σ_1, σ_2 й базової рівності

$$
\left[\frac{dq_1}{dr}V_{\mu;1} - q_1\frac{dV_{\mu;1}}{dr}\right]\Bigg|_{r=R_1} = \frac{c_{21}}{c_{11}}\left[\frac{dq_2}{dr}V_{\mu;2} - q_2\frac{dV_{\mu;2}}{dr}\right]\Bigg|_{r=R_1},
$$

що одержуємо безпосередньо з умов спряження, яким задовольняють вектор-функції $q(r)$ та $V_{\mu}(r,\beta)$.

Generalized hybrid integral transformations of Legendre's of the 2-nd kind – Fourier type are built by the method of deltashaped sequence.

Література

1. Федотова И.А. Об одном интегральном преобразовании с обобщенными присоединенными функциями Лежандра // Вычислит. и прикл. математика. – Киев, 1990.- Вып. 71.- С. 33-43.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.- 735 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1973. – 736 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959.-468 с.

Одержано 11.11.1999 р.