МАТЕМАТИКА.
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 681.3.06

О.Дуда; М.Дуда, канд. техн. наук; Д.Іващук, канд. фіз.-мат. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ТЕОРЕМА ПРО ФУНКЦІОНАЛЬНУ ПОВНОТУ БУЛЕВИХ СИСТЕМ У НЕКЛАСИЧНІЙ ДВОЗНАЧНІЙ АЛГЕБРІ ЛОГІКИ

У статті доведено теорему про функціональну повноту булевих систем некласичної двозначної алгебри логіки. Ця теорема базується на множині замкнених класів $\{T_{0s},\ T_{1s}\ \ S_s,\ M_s\}$ *і формулює не тільки критерій оцінки повноти булевих систем, а й забезпечує однозначну відповідь про кількість* (25) *та перелік простих повних систем у такій алгебрі логіки.*

Умовні позначення

$f(X,Q) \in \{0;\ 1\}$ - функція некласичної двозначної алгебри логіки, де:

1) $Q \in \{0;\ 1\}$ - середовище її реалізації;

2) $X = \{x_i\}$, де $x_i \in \{0;\ 1\}$ та $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ - вихідний алфавіт *n* змінних (аргументів).

$P_2(n,Q)$ - система, що містить усі функції некласичної двозначної алгебри логіки над змінними множини X.

Елементарні функції некласичної двозначної алгебри логіки:

1) $Q*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$, $Q*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$, $Q*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$, $Q*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$, $Q*\neg x_1$, $Q*(x_1 \to x_2)$, $Q*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q*(x_1 \nrightarrow x_2)$ і $Q*(x_1 \nleftarrow x_2)$ – відповідні класичні функції *Кон'юнкція*, *Диз'юнкція*, "*Стрілка Пірса*", "*Штрих Шефера*", *Заперечення*, *Імплікація*, "*Обернена імплікація*", *Антиімплікація*, "*Обернена антиімплікація*";

2) $Q*\coprod_{i=1}^{n} x_i$ і $Q*\prod_{i=1}^{n} x_i$, $Q*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$ і $Q*\overset{n}{\underset{i=1}{\longleftrightarrow}} x_i$, $Q*\lrcorner x_1$ - відповідні некласичні функції "*Константа 0*" і "*Константа 1*" при $n \geq 1$, *Еквівалентність* і *Антиеквівалентність* при $n \geq 2$, *Повторення (дійсність цих функцій підтверджена технічними розв`язками в обчислювальній техніці).*

T_{0s}, T_{1s}, S_s і M_s - замкнені класи в некласичній двозначній алгебрі логіки.

У результаті досліджень, виконаних у серії робіт [1,…,4] з некласичної двозначної алгебри логіки (двозначної алгебри логіки з урахуванням середовища реалізації), і їх порівняння з класичною двозначною алгеброю логіки з [5,…,8] доведено, що не можна нехтувати середовищем реалізації двозначної алгебри логіки при теоретичному зображенні і практичному використанні булевих функцій. При цьому доведено, що чотирьох замкнених класів множини $\{T_{0s},\ T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$ достатньо для повної характеристики всіх елементарних функцій у некласичній двозначній алгебрі логіки (табл. 1, в якій символ "+" означає, що елементарна функція належить класові, а символ "-" – елементарна функція не належить класові), зокрема, отримано такі твердження:

Твердження 1. *Якщо,* $f \notin \{T_{0s},\ T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$, *то* ($\forall\ n \geq 2$) *множини* X, *де* $X = \{x_i\},\ x_i \in \{0;\ 1\}$ *та* $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, ($\exists\ f \subseteq \{Q*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i,\ Q*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i\}$).

Твердження 2. *Якщо* $f \in T_{1s}$ *і* $f \notin \{T_{0s}, S_s, M_s\}$, *то для множини* X *при* $n=2$ $(\exists\ f \subseteq \{Q^*(x_1 \to x_2), Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\})$ *і* $(\forall\ n \geq 2)$ $(\exists\ f = Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i)$, *де* $x_i \in \{0;\ 1\}$.

Твердження 3. *Якщо* $f \in T_{0s}$ *і* $f \notin \{T_{1s}, S_s, M_s\}$, *то для множини* X *при* $n=2$ $(\exists\ f \subseteq \{Q^*(x_1 \not\to x_2), Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)\})$ *і* $(\forall\ n \geq 2)$ $(\exists\ f = Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i)$, *де* $x_i \in \{0;\ 1\}$.

Таблиця 1

№ пп	*Класи* T_{0s}	T_{1s}	S_s	M_s	Функції
1	+	-	-	+	$Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$
2	-	+	-	+	$Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$
3	+	+	+	+	$Q^* \neg x_1$
4	-	-	+	-	$Q^* \lrcorner x_1$
5	-	+	-	-	$Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$
6	+	-	-	-	$Q^*(x_1 \not\to x_2)$, $Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$
7	+	+	-	+	$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$
8	-	-	-	-	$Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i$, $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i$

Твердження 4. *Якщо* $f \in S_s$ *і* $f \notin \{T_{0s}, T_{1s}, M_s\}$, *то для змінної* x_1 $(\exists\ f = Q^* \neg x_1)$, *де* $x_1 \in \{0;\ 1\}$.

Твердження 5. *Якщо* $f \in \{T_{0s}, M_s\}$ *і* $f \notin \{T_{1s}, S_s\}$ *то* $(\forall\ n \geq 1)$ *множини* X, *де* $X = \{x_i\}$, $x_i \in \{0;\ 1\}$ *та* $i = 1, 2, \ldots, n$, $(\exists\ f = Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i)$.

Твердження 6. *Якщо* $f \in \{T_{1s}, M_s\}$ *і* $f \notin \{T_{0s}, S_s\}$ *то* $(\forall\ n \geq 1)$ *множини* X, *де* $X = \{x_i\}$, $x_i \in \{0;\ 1\}$ *та* $i = 1, 2, \ldots, n$, $(\exists\ f = Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i)$.

Твердження 7. *Якщо* $f \in \{T_{0s}, T_{1s}, M_s\}$ *і* $f \notin S_s$, *то* $(\forall\ n \geq 2)$ *множини* X $(\exists\ f \subseteq \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i, Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i\})$, *де* $x_i \in \{0;\ 1\}$.

Твердження 8. *Якщо* $f \in \{T_{0s}, T_{1s}, S_s, M_s\}$, *то для змінної* x_1 $(\exists\ f = Q^* \lrcorner x_1)$, *де* $x_1 \in \{0;\ 1\}$.

Але при цьому виникає запитання: як сформулювати теорему про функціональну повноту (теорему про необхідні і достатні умови функціональної повноти) булевих систем у некласичній двозначній алгебрі логіки на базі цих чотирьох замкнених класів множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s, M_s\}$, та з урахуванням отриманих тверджень 1, …, 8?.

Ось відповідь.

Нехай $\Re = \{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ довільна система функцій з $P_2(n,Q)$, де $P_2(n,Q)$ -

система, що містить при $Q=1$ усі функції некласичної двозначної алгебри логіки над змінними множини $X=\{x_i\}$, де $x_i\in\{0;\ 1\}$. та $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, а при $Q=0$ не має жодної булевої функції, незалежно від значень змінних заданої множини X. Як з`ясувати з урахуванням чотирьох замкнених класів множини $\{T_{0s}\ \ T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$, чи буде дана система повною? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 1 (про функціональну повноту; сформульована О.М.Дудою). *Для того, щоб у некласичній двозначній алгебрі логіки (двозначній алгебрі логіки з урахуванням середовища реалізації) система функцій $\mathfrak{R}$ була повною, необхідно і достатньо, щоб елементарні функції даної системи не були і не могли бути одночасно функціями тільки від якоїсь однієї змінної з множини $X=\{x_i\}$, де $x_i\in\{0;\ 1\}$ та $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, і одночасно не містилися в жодному з чотирьох замкнених класів T_{0s}, T_{1s}, S_s і M_s.*

Доведення.

Необхідність. Нехай $\mathfrak{R}$ повна, тобто $[\mathfrak{R}]=P_2(n,Q)$. Припустимо, що $\mathfrak{R}$ міститься в одному із вказаних класів – позначимо його через Ψ, тобто $\Psi\subseteq\mathfrak{R}$. Тоді з Ψ можна виділити підсистему Ψ_1, що містить тільки елементарні функції, що залежать від тих самих змінних множини X і які не є і не можуть бути одночасно функціями тільки від якоїсь однієї змінної з даної множини, причому також $\Psi_1\subseteq\mathfrak{R}$. Тоді, коли:

1. $\mathfrak{R}\in T_{0s}$, то, відповідно до поданих вище тверджень 3, 5, 7 і 8, $\Psi_1\subseteq\{Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\nleftrightarrow}}x_i,\ Q^*(x_1\nrightarrow x_2),\ Q^*(x_1\nleftarrow x_2),\ Q^*\coprod_{i=1}^{n}x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}}x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}}x_i,\ Q^*\lrcorner x_1\}$;

2. $\mathfrak{R}\in T_{1s}$, то, відповідно до тверджень 2, 6, 7 і 8, $\Psi_1\subseteq\{Q^*(x_1\rightarrow x_2)$, $Q^*(x_1\leftarrow x_2),\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}}x_i,\ Q^*\prod_{i=1}^{n}x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}}x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}}x_i,\ Q^*\lrcorner x_1\}$;

3. $\mathfrak{R}\in S_s$, то, відповідно до тверджень 4 і 8, $\Psi_1\subseteq\{Q^*\neg x_1,\ Q^*\lrcorner x_1\}$;

4. $\mathfrak{R}\in M_s$, то, відповідно до тверджень 8, 7, 5 і 6, $\Psi_1\subseteq\{Q^*\lrcorner x_1,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}}x_i$, $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}}x_i,\ Q^*\coprod_{i=1}^{n}x_i,\ Q^*\prod_{i=1}^{n}x_i\}$.

Оскільки через властивості замикання і замкненості для кожної з таких підсистем Ψ_1

$$P_2(n,Q)=[\mathfrak{R}]\subseteq[\Psi_1]=\Psi_1,$$

тому і для системи Ψ також

$$P_2(n,Q)=[\mathfrak{R}]\subseteq[\Psi]=\Psi.$$

Значить, $\Psi=P_2(n,Q)$ - неправда.

Необхідність доведена.

Достатність. Нехай Ψ одночасно не міститься у жодному з чотирьох вказаних класів. Тоді з Ψ можна виділити підсистему Ψ_1, що має тільки елементарні функції, причому з такими ж властивостями. Можна вважати, що всі елементарні функції підсистеми Ψ_1 залежать від тих самих змінних множини X, але не є і не можуть бути одночасно функціями тільки від якоїсь однієї змінної з цієї множини. При цьому можливі такі випадки:

1. $\Psi_1\not\subset\{T_{0s},\ T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$. Тоді, відповідно до твердження 1,

$$\Psi_1\subseteq\{Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}}x_i,\ Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}}x_i\}.$$

2. $\Psi_1 \subseteq \{f_i \cup f_j\}$, де f_i і f_j - набори елементарних функцій, на які поділена підсистема Ψ_1, причому елементарні функції цих наборів не містяться одночасно у жодному з класів множини $\{T_{0s},\ T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$. Тоді, коли:

а) $f_i \notin \{T_{0s},\ T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$, а f_j належить відповідній кількості класів з множини $\{T_{0s},\ T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$, то відповідно до твердження 1, є $f_i \subseteq \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i\}$, а відповідно до тверджень 2, 3, 4, 5, 6, 7 і 8, маємо $f_j \subseteq \{Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2),$ $Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i,\ Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \neg x_1,\ Q^*(x_1 \rightarrow x_2),$ $Q^*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q^* \hookleftarrow x_1\}$. Але, як у випадку 1, навіть множини класичних елементарних функцій $\{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\downarrow}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{I}}} x_i\}$ достатньо для повної характеристики підсистеми Ψ_1;

б) $f_i \in T_{0s}$ і $f_i \notin \{T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$, а $f_j \in T_{1s}$ і $f_j \notin \{T_{0s},\ S_s,\ M_s\}$, то, як випливає з тверджень 3 і 2, $f_i \subseteq \{Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i\}$, а $f_j \subseteq \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,$ $Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\}$. Отже, $\Psi_1 \subseteq \{\{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i,\ Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)\}$ $\cup\ \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\}\}$;

в) $f_i \in T_{0s}$ і $f_i \notin \{T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$, а $f_j \in S_s$ і $f_j \notin \{T_{0s},\ T_{1s},\ M_s\}$, то з урахуванням тверджень 3 і 4 одержуємо: $f_i \subseteq \{Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i\}$, а $f_j = Q^* \neg x_1$. Тому $\Psi_1 \subseteq \{\{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i,\ Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)\} \cup \{Q^* \neg x_1\}\}$;

г) $f_i \in T_{1s}$ і $f_i \notin \{T_{0s},\ S_s,\ M_s\}$, а $f_j \in S_s$ і $f_j \notin \{T_{0s},\ T_{1s},\ M_s\}$, то з урахуванням тверджень 2 і 4 одержуємо: $f_i \subseteq \{Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i\}$, а $f_j = Q^* \neg x_1$. Отже, $\Psi_1 \subseteq \{\{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\} \cup \{Q^* \neg x_1\}\}$;

д) $f_i \in \{T_{0s},\ T_{1s},\ M_s\}$ і $f_i \notin S_s$, а $f_j \in S_s$ і $f_j \notin \{T_{0s},\ T_{1s},\ M_s\}$, то, як випливає з тверджень 7 і 4, одержуємо: $f_i \subseteq \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i\}$, а $f_j = Q^* \neg x_1$. Тому $\Psi_1 \subseteq \{\{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i\} \cup \{Q^* \neg x_1\}\}$;

е) $f_i \in \{T_{1s},\ M_s\}$ і $f_i \notin \{T_{0s},\ S_s\}$, а $f_j \in T_{0s}$ і $f_j \notin \{T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$, то з урахуванням тверджень 3 і 6 одержуємо: $f_i = Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$, а $f_j \subseteq \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i,\ Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2),$ $Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)\}$. Отже, $\Psi_1 \subseteq \{\{Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i\} \cup \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i,\ Q^*(x_1 \not\rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)\}\}$;

є) $f_i \in \{T_{0s},\ M_s\}$ і $f_i \notin \{T_{1s},\ S_s\}$, а $f_j \in T_{1s}$ і $f_j \notin \{T_{0s},\ S_s,\ M_s\}$, то відповідно до з тверджень 5 і 2, одержуємо: $f_i = Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$, а $f_j \subseteq \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ Q^*(x_1 \rightarrow x_2),$ $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\}$. Тому $\Psi_1 \subseteq \{\{Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i\} \cup \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\}\}$;

ж) $f_i \in T_{0s}$ і $f_i \notin \{T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$, а $f_i \notin T_{0s}$ і f_j належить відповідній кількості класів з множини $\{T_{1s},\ S_s,\ ,M_s\}$ то з врахуванням тверджень 3 і 6, 2, 4 одержуємо, що $f_i \subseteq \{Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nleftarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\longleftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i\}$, а $f_j \subseteq \{Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^* \neg x_1\}$,. Але, як випливає з 2б, 2в і 2е, навіть одного набору елементарних функцій з множин $\{\{Q^* \neg x_1\};\ \{Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i\};\ \{Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i\}\}$ і $\{Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nleftarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\longleftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i\}$ достатньо для повної характеристики підсистеми Ψ_1;

з) $f_i \in T_{1s}$ і $f_i \notin \{T_{0s},\ S_s,\ M_s\}$, а $f_i \notin T_{1s}$ і f_j належить відповідній кількості класів з множини $\{T_{0s},\ S_s,\ M_s\}$, то, відповідно до тверджень 2 і 5, 3, 4, маємо $f_i \subseteq \{Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i\}$, а $f_j \subseteq \{Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\longleftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i,\ Q^*(x_1 \nleftarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^* \neg x_1\}$. Але, як випливає з випадків 2б, 2г і 2є, навіть одного набору елементарних функцій з множин $\{Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i\}$ і $\{\{Q^* \neg x_1\};\ \{Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\longleftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i\};\ \{Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i\}\}$ достатньо для повної характеристики підсистеми Ψ_1;

и) $f_i \in S_s$ і $f_i \notin \{T_{0s},\ T_{1s},\ M_s\}$, а $f_j \notin S_s f_j \notin S_s$ і f_j належить відповідній кількості класів з множини $\{T_{0s},\ T_{1s},\ M_s\}$, то:

- на основі тверджень 4 і 3, 7, 2, одержуємо, що $f_i = Q^* \neg x_1$, а $f_j \subseteq \{Q^*(x_1 \nleftarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\longleftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\}$. Але, як випливає з 2в, 2д і 2г, навіть одного набору елементарних функцій з множин $\{\{Q^*(x_1 \nrightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \nleftarrow x_2),\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\longleftarrow\!\!\!\mapsto}} x_i\};\ \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i,\ Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i\};\ \{Q^* \overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i,\ Q^*(x_1 \rightarrow x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\}$ і $\{Q^* \neg x_1\}$ достатньо для повної характеристики підсистеми Ψ_1;
- відповідно до тверджень 4 і 5, маємо $f_i = Q^* \neg x_1$, а $f_j = Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$. Але f_i є функцією від однієї змінної x_1, а при $n = 1$ функція $f_j = Q^*(\coprod x_1)$ і також є функцією від цієї ж змінної x_1, що суперечить формулюванню даної теореми. Тому набору функцій $f_i = Q^* \neg x_1$ і $f_j = Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$ не достатньо для повної характеристики підсистеми Ψ_1;
- відповідно до тверджень 4 і 6, маємо $f_i = Q^* \neg x_1$, а $f_j = Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$. Але f_i є функцією від однієї змінної x_1, а при $n = 1$ функція $f_j = Q^*(\prod x_1)$ і також є функцією від цієї ж

однієї змінної x_1. Тому набір функцій $f_i = Q^* \neg x_1$ і $f_j = Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$ суперечить формулюванню теореми, внаслідок чого такого набору функцій також не достатньо для повної характеристики підсистеми Ψ_1;

й) нема варіантів, коли

- $f_i \in \{T_{0s}, M_s\}$ і $f_i \notin \{T_{1s}, S_s\}$, а $f_j \in \{T_{1s}, M_s\}$ і $f_j \notin \{T_{0s}, S_s\}$;

- $f_i \in \{T_{0s}, T_{1s}\}$ і f_i не належить відповідній кількості класів з множини $\{S_s$, $M_s\}$, а $f_j \in M_s$ і f_i не належить відповідній кількості класів з множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s\}$, оскільки, на базі тверджень 5, 6 і 7, $\{Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \mathop{\wedge}_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \mathop{\vee}_{i=1}^{n} x_i\} \subset M_s$, $\{Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \mathop{\wedge}_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \mathop{\vee}_{i=1}^{n} x_i\} \subset T_{0s}$, а $\{Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \mathop{\wedge}_{i=1}^{n} x_i,\ Q^* \mathop{\vee}_{i=1}^{n} x_i\} \subset T_{1s}$.

3. $\Psi_1 \subseteq \{f_i \cup f_j \cup f_c\}$, де f_i, f_j і f_c - набори елементарних функцій, на які розділена підсистема Ψ_1, причому якісь набори цих функцій не містяться одночасно в жодному з класів множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s, M_s\}$. Тому, наприклад:

а) $f_i \in T_{0s}$ і $f_i \notin \{T_{1s}, S_s, M_s\}$, $f_j \in T_{1s}$ і $f_j \notin \{T_{0s}, S_s\ M_s\}$, а $f_c \in S_s$ і $f_c \notin \{T_{0s}$, T_{1s}, $M_s\}$. Внаслідок цього, відповідно до тверджень 3, 2 і 4, одержуємо, що, $f_i \subseteq \{Q^*(x_1 \not\to x_2),\ Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2),\ Q^* \mathop{\leftarrow\!\!\mapsto}_{i=1}^{n} x_i\}$, $f_j \subseteq \{Q^* \mathop{\leftrightarrow}_{i=1}^{n} x_i,\ Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\}$, а $f_c = Q^* \neg x_1$. На основі випадків 2б і 2г, навіть кожного булевого набору елементарних функцій з множин $\{Q^* \neg x_1\}$ і $\{\{Q^*(x_1 \not\to x_2),\ Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)$, $Q^* \mathop{\leftarrow\!\!\mapsto}_{i=1}^{n} x_i\};\ \{Q^* \mathop{\leftrightarrow}_{i=1}^{n} x_i,\ Q^*(x_1 \to x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\}\}$ достатньо для повної характеристики підсистеми Ψ_1;

б) $f_i \in T_{1s}$ і $f_i \notin \{T_{0s}, S_s\ M_s\}$, $f_j \in S_s$ і $f_j \notin \{T_{0s}, T_{1s}, M_s\}$, а $f_c \in M_s$ і f_c не належить відповідній кількості класів з множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s\}$. Тоді, відповідно до тверджень 5, 2 і 4, одержуємо, що $f_c = Q^* \coprod_{i=1}^{n} x_i$, $f_i \subseteq \{Q^* \mathop{\leftrightarrow}_{i=1}^{n} x_i,\ Q^*(x_1 \to x_2)$, $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)\}$, а $f_j = Q^* \neg x_1$. Але, виходячи з випадку 2г, навіть наборів елементарних функцій з множин $\{Q^*(x_1 \to x_2),\ Q^*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q^* \mathop{\leftrightarrow}_{i=1}^{n} x_i\}$ і $\{Q^* \neg x_1\}$ достатньо для повної характеристики підсистеми Ψ_1;

в) $f_i \in T_{0s}$ і $f_i \notin \{T_{1s}, S_s\ M_s\}$, $f_j \in S_s$ і $f_j \notin \{T_{0s}, T_{1s}, M_s\}$, а $f_c \in M_s$ і f_c не належить відповідній кількості класів з множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s\}$. Тоді, відповідно до тверджень 6, 3 і 4, одержуємо, що $f_c = Q^* \prod_{i=1}^{n} x_i$, $f_i \subseteq \{Q^* \mathop{\leftarrow\!\!\mapsto}_{i=1}^{n} x_i,\ Q^*(x_1 \not\to x_2)$, $Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2)\}$, а $f_j = Q^* \neg x_1$. Але, на основі випадку 2в, навіть наборів елементарних функцій з множин $\{Q^*(x_1 \not\to x_2),\ Q^*(x_1 \not\leftarrow x_2),\ Q^* \mathop{\leftarrow\!\!\mapsto}_{i=1}^{n} x_i\}$ і $\{Q^* \neg x_1\}$ достатньо для повної характеристики підсистеми Ψ_1;

г) ($\bar{\exists}$) варіант, коли $f_i \in T_{0s}$ і $f_i \notin \{T_{1s}, S_s\ M_s\}$, $f_j \in T_{1s}$ і $f_j \notin \{T_{0s}, S_s\ M_s\}$, а $f_c \in M_s$ і f_c не належить відповідній кількості класів з множини $\{T_{0s}, T_{1s}, S_s\}$, оскільки на основі тверджень 5, 6 і 7, $\{Q*\coprod_{i=1}^{n} x_i,\ Q*\prod_{i=1}^{n} x_i,\ Q*\bigwedge_{i=1}^{n} x_i,\ Q*\bigvee_{i=1}^{n} x_i) \subset M_s$, $\{Q*\coprod_{i=1}^{n} x_i,\ Q*\bigwedge_{i=1}^{n} x_i,\ Q*\bigvee_{i=1}^{n} x_i\} \subset T_{0s}$, а $\{Q*\prod_{i=1}^{n} x_i,\ Q*\bigwedge_{i=1}^{n} x_i,\ Q*\bigvee_{i=1}^{n} x_i\} \subset T_{1s}$.

4. $\Psi_1 \subseteq \{f_i \cup f_j \cup f_c \cup f_k\}$, де f_i, f_j, f_c і f_k - набори елементарних функцій, на які поділена підсистема Ψ_1, причому будь-які набори цих функцій не містяться одночасно в жодному з класів множини $\{T_{0s},\ T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$. Але ($\bar{\exists}$) поданого набору елементарних функцій, оскільки, наприклад, $f_i \in T_{0s}$ і $f_i \notin \{T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$, $f_j \in T_{1s}$ і $f_j \notin \{T_{0s},\ S_s\ \ M_s\}$, $f_c \in S_s$ і $f_c \notin \{T_{0s},\ T_{1s},\ M_s\}$, а $f_k \in M_s$ і $f_k \notin \{T_{0s},\ T_{1s},\ S_s\}$, то, як випливає із табл. 1, ($\bar{\exists}$) булевої функції з належністю $f_k \in M_s$ і $f_k \notin \{T_{0s},\ T_{1s},\ S_s\}$.

Таким чином, до підсистеми Ψ_1, а отже, до системи Ψ завжди належить один з наборів елементарних функцій:

$$\{Q*\mathop{\downarrow}_{i=1}^{n} x_i,\ Q*\mathop{\mathrm{I}}_{i=1}^{n} x_i\};$$

$$\{Q*(x_1 \not\to x_2),\ Q*(x_1 \not\leftarrow x_2),\ Q*\mathop{\leftarrow\!\!\!\mapsto}_{i=1}^{n} x_i\} \text{ і } \{Q*(x_1 \to x_2),\ Q*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q*\mathop{\leftrightarrow}_{i=1}^{n} x_i\};$$

$$\{Q*(x_1 \not\to x_2),\ Q*(x_1 \not\leftarrow x_2),\ Q*\mathop{\leftarrow\!\!\!\mapsto}_{i=1}^{n} x_i\} \text{ і } \{Q*\neg x_1\};$$

$$\{Q*(x_1 \to x_2),\ Q*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q*\mathop{\leftrightarrow}_{i=1}^{n} x_i\} \text{ і } \{Q*\neg x_1\}; \tag{2}$$

$$\{Q*\bigwedge_{i=1}^{n} x_i,\ Q*\bigvee_{i=1}^{n} x_i\} \text{ і } \{Q*\neg x_1\};$$

$$\{Q*(x_1 \not\to x_2),\ Q*(x_1 \not\leftarrow x_2),\ Q*\mathop{\leftarrow\!\!\!\mapsto}_{i=1}^{n} x_i\} \text{ і } \{Q*\prod_{i=1}^{n} x_i\};$$

$$\{Q*(x_1 \to x_2),\ Q*(x_1 \leftarrow x_2),\ Q*\mathop{\leftrightarrow}_{i=1}^{n} x_i\} \text{ і } \{Q*\coprod_{i=1}^{n} x_i\}.$$

Кожен з них повинен бути повною підсистемою, тому система функцій Ψ також має бути повною системою. Цим **достатність доведена**.

Теорема 1 доведена.

Наслідок 1. *Будь-який замкнений клас* Ω *функцій з* $P_2(n.Q)$ *такий, що* $\Omega \neq P_2(n,Q)$, *міститься принаймні в одному з побудованих класів* T_{0s}, T_{1s}, S_s *і* M_s.

Наслідок 2. У *некласичній двозначній алгебрі логіки (двозначній алгебрі логіки із урахуванням середовища реалізації) існує кількість передповних класів, що дорівнює чотирьом, зокрема* T_{0s}, T_{1s}, S_s *і* M_s.

Теорема 2. *З будь-якої повної* $P_2(n.Q)$ *системи* Ψ *функцій можна виділити просту повну підсистему, що містить не більше як дві елементарні функції.*

Доведення. Припустимо, що з повної системи Ψ можна виділити просту повну підсистему Ψ_1, що містить більше як дві елементарні функції. Повнота такої підсистеми Ψ_1 має підтверджуватися теоремою 1 про функціональну повноту. Але з доведення достатності теореми 1, зокрема з (2), можна виділити тільки такий перелік простих повних підсистем:

I. Випадок 1:

1. $Q*\mathop{\downarrow}_{i=1}^{n} x_i$.
2. $Q*\mathop{\mathrm{I}}_{i=1}^{n} x_i$.

II. Випадок 2б:

3. $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$ і $Q^*(x_1 \rightarrow x_2)$. 4. $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$ і $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$.

5. $Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$ і $Q^*(x_1 \rightarrow x_2)$. 6. $Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$ і $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$.

7. $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$. 8. $Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$.

9. $Q^*(x_1 \rightarrow x_2)$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$. 10. $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$.

11. $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$.

III. Випадок 2в:

12. $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$ і $Q^*\neg x_1$. 13. $Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$ і $Q^*\neg x_1$.

14. $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$ і $Q^*\neg x_1$.

IY. Випадок 2г: (3)

15. $Q^*(x_1 \rightarrow x_2)$ і $Q^*\neg x_1$. 16. $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$ і $Q^*\neg x_1$.

17. $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$ і $Q^*\neg x_1$.

Y. Випадок 2д:

18. $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i$ і $Q^*\neg x_1$. 19. $Q^*\neg x_1$ і $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} x_i$.

YI. Випадок 2е:

20. $Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i$ і $Q^*(x_1 \nrightarrow x_2)$. 21. $Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i$ і $Q^*(x_1 \nleftarrow x_2)$.

22. $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i$ і $Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i$.

YII. Випадок 2є:

23. $Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i$ і $Q^*(x_1 \rightarrow x_2)$. 24. $Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i$ і $Q^*(x_1 \leftarrow x_2)$.

25. $Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftrightarrow}} x_i$ і $Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i$.

Кожна з таких підсистем справді має бути повною. З цього переліку підсистем (3) випливає, що прості повні підсистеми складаються не більше, ніж з двох елементарних функцій, що суперечить початковій умові. **Теорема 2 доведена**.

Теорема 3.*Кількість простих повних систем у некласичній двозначній алгебрі логіки (двозначній алгебрі логіки з урахуванням середовища реалізації), що складаються тільки з елементарних функцій, дорівнює 25.*

Доведення. Припустимо, що кількість простих повних систем у некласичній двозначній алгебрі логіки, що мають тільки елементарні функції, не дорівнює 25. Кількість таких простих повних систем повинна підтверджуватися доведенням теореми 2. Але з доведення цієї теореми випливає, що кількість простих повних підсистем, а отже, і простих повних систем у некласичній двозначній алгебрі логіки дорівнює 25. Однак це не відповідає початковій умові. **Теорема 3 доведена**.

Приклад 1. *Чи є система функцій*

$$“f_1 = Q^*(x_1 \wedge x_2);\ f_2 = Q^*\coprod_{i=1}^{n} x_i;\ f_3 = Q^*\prod_{i=1}^{n} x_i;\ f_4 = Q^*\overset{n}{\underset{i=1}{\leftarrow\!\mapsto}} x_i”$$

повною, але не простою?

Роз'язання. Маємо $f_1 \in \{T_{0s},\ T_{1s},\ M_s\}$ і $f_1 \notin S_s$, $f_2 \in \{T_{0s},\ M_s\}$, і $f_2 \notin \{T_{1s},\ S_s\}$, $f_3 \in \{T_{1s},\ M_s\}$ і $f_3 \notin \{T_{0s},\ S_s\}$, а $f_4 \in T_{0s}$ і $f_4 \notin \{T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$. При цьому, відповідно до теореми 1 про функціональну повноту булевих систем, повними системами не можуть бути:

1. Кожна з функцій f_1, f_2, f_3 і f_4 окремо.

2. Кожний з наборів функцій множини {“ f_1 і f_2“; “ f_1 і f_4“; “ f_2 і f_4“; “ f_1, f_2 і f_4“}, тому що $\{f_1,\ f_2,\ f_4\} \subset T_{0s}$.

3.Набір функцій “ f_1 і f_3“, тому що $\{f_1,\ f_3\} \subset T_{1s}$.

4. Кожний з наборів функцій множини {“ f_1 і f_2“; “ f_1 і f_3“; “ f_1, f_2 і f_3“}, тому що $\{f_1,\ f_2,\ f_3\} \subset M_s$.

Поряд з цим повною системою є набір функцій “ f_3 і f_4“, а отже, і кожний з наборів функцій множини {“ f_1, f_3 і f_4“; “ f_2, f_3 і f_4“; “ f_1, f_2, f_3 і f_4“}, тому що $f_3 \in \{T_{1s}$, $M_s\}$ і $f_3 \notin \{T_{0s},\ S_s\}$, а $f_4 \in T_{0s}$ і $f_4 \notin \{T_{1s},\ S_s,\ M_s\}$.

Відповідно до теореми 2, набір функцій “ f_3 і f_4“ є простою повною системою, а кожний з наборів функцій множини {“ f_1, f_3 і f_4“; “ f_2, f_3 і f_4“; “ f_1, f_2, f_3 і f_4“} є повною системою, але не простою. **Розв’язання прикладу 1 завершено**.

Висновок

Доведена теорема про функціональну повноту булевих систем некласичної двозначної алгебри логіки базується на множині замкнених класів $\{T_{0s}$ T_{1s}, S_s, $M_s\}$ і формулює не тільки критерій оцінки повноти цих систем, а й забезпечує однозначну відповідь про кількість (25) та перелік простих повних систем у такій алгебрі логіки.

In this article it has been proved the theorem which is dealing with the functional completeness of bull systems in medium realization of non-classic two-digit logic algebra which is based on the mathematical set of numbers as $\{T_{0s}$, T_{1s}, S_s, $M_s\}$ such closed classes. This theorem helps us to formulate the criterion of estimation of the completeness which is dealing with bull systems on the one hand and it gives us the concrete answer about quantity (25) and the enumeration of simple complete systems of two-digit logic algebra on the other hand.

Література

1. Дуда О.М., Дуда М.О. Змінні та функції в середовищі реалізації двозначної алгебри логіки // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. - 1999. – Том 4. – Число 1.– С. 62 – 69.
2. Дуда О.М., Дуда М.О., Бубняк М.М. Використання теорії про істотні та фіктивні змінні в булевих і лінійних функціях // Вісник Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. - 1999. – Том 4. – Число 2. – С. 5 – 11.
3. Дуда М.О., Дуда О.М. Про доцільність використання в курсі "Дискретна математика" нової теорії про функціональну повноту.// Тези другої української науково-методичної конференції "Використання персональних ЕОМ в навчальному процесі вищого навчального закладу" / Львівський університет. - Львів, 1993. — С. 49 - 51.
4. Дуда О.М. Практикум по вивченню електронних таблиць// Тези доповіді студентської наукової конференції, присвяченої 150-річчю з дня народження Івана Пулюя / Природничі та гуманітарні науки. Актуальні проблеми.-Тернопіль, 1995.— С. 190.
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учебн. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. – 384 с.
6. Цейтлін.Г.О. Алгебра логіки та конструювання програм. Елементи дискретної математики. – Київ: Наукова думка, 1994. – 84 с.
7. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.А. Алгебра. Языки. Программирование. 3-е изд. (дополненное и переработанное). – Киев: Наук. думка. 1989. – 340 с.
8. Гаврилов Г.П. Функциональные системы дискретной математики: Текст лекций. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. - 40 с.

Одержано 16.05.2000 р.