

УДК 539.3.8

М.Пилипець, канд. техн. наук; В.Васильків

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ СТРІЧОК ГВИНТОВИХ МЕХАНІЗМІВ

У статті подано розрахунок на стійкість стрічок гвинтових механізмів. Запропоновано спосіб, справедливий для деформації стиску при дії статичного локалізованого навантаження.

Умовні позначення

- B* - ширина витка спіралі шнека;
- R* - радіус зовнішнього контура спіралі;
- r* - радіус внутрішнього контура спіралі (радіус вала);
- f* - незалежний параметр;

- ϵ - загальна енергія деформації системи;
 $M(x)$ - згинний момент;
 $I(x)$ - момент інерції поперечного перерізу витка спіралі;
 H - товщина внутрішнього контура спіралі;
 h - товщина зовнішнього контура спіралі;
 E - модуль пружності І роду;
 P_p - величина критичної сили, визначена за методом Рітца;
 $v(x)$ - прогин витка спіралі;
 $b(x)$ - значення половини величини хорди (половина довжини) витка залежно від його висоти;
 P_e - величина критичної сили, визначена за формулою Ейлера;
 I_e - момент інерції витка спіралі у формулі Ейлера;
 α і χ - коефіцієнти приведення відповідно довжини та товщини витка спіралі;
 ϵ - узагальнений коефіцієнт приведення геометричних характеристик перерізу витка;
 δ - усереднене значення товщини спіралі;
 I_p - мінімальний момент інерції витка спіралі, визначений за методом Рітца;
 I_p^* - момент інерції витка спіралі, визначений за методом Рітца, при умові постійності товщини спіралі ($H = h$);
 I_e^* - момент інерції, що визначається у формулі Ейлера, при умові постійності товщини спіралі, тобто при $\chi = 1$;
 b_{np} - приведенне значення довжини (усереднена хорда) витка спіралі;
 δ_{np} - приведенне значення товщини спіралі;
 F_{np} - приведенне значення площі поперечного перерізу витка спіралі;
 ζ - коефіцієнт, що враховує відмінність реального кріплення спіралі від зацімлення, прийнятого в розрахунковій схемі;
 $P_{к.п}$ - величина критичної сили, що визначається для випадку, коли висота витка спіралі незначна, тобто при умові $\lambda \geq 0,5$;
 k - коефіцієнт, значення якого залежить від коефіцієнта λ ;
 λ - коефіцієнт, що визначає величину співвідношення довжини витка до його ширини;
 D - циліндрична жорсткість пластини;
 δ_n - товщина пластини;
 μ - коефіцієнт Пуассона;
 $\bar{P}_{кр}$ - експериментальне значення критичної сили, при якій спостерігаються пластичні деформації;
 $P_{кр}$ - теоретичне значення величини критичної сили;
 $B_{ПР}$ - висота що визначає точку контакту індикатора з витком спіралі, визначена від його зовнішнього контура.

У процесі експлуатації гвинтових механізмів та технологічних процесах (ТП) виготовлення їх робочих органів – спіральних гвинтових стрічок методом навивання на оправку, інколи втрачається стійкість витка гвинтової стрічки, що призводить до відмови експлуатації механізмів і порушень ТП виготовлення їх робочих органів. Гвинтові стрічки належать до пружних систем, теорія пружності яких вивчена недостатньо, а тому є актуальною задачею. Методологія дослідження пружних систем та теорія їх стійкості описані в літературі [1,2] та ін., не передбачають розв'язку, що можна безпосередньо використати при розрахунку стійкості витка спіралі.

Для розв'язання цієї задачі приймається схема кріплення і навантаження ділянки гвинтової спіралі, що подана на рис.1. Диска ділянка стрічки висотою B ,

яка затиснута зусиллям що діє в зоні 2, підлягає впливові сили притиску P .

Спостереження за гвинтовими спіралями після втрати стійкості виявили, що деформуються вони, прогинаючись приблизно так, як подано пунктиром на рис.1. У зв'язку з цим далі при визначенні робочої висоти спіралі, висотою дії притискного зусилля біля основи нехтуватимемо, а висоту спіралі B визначатимемо як різницю радіусів зовнішнього контура спіралі R та оправки r , тобто

$$B = R - r \quad (1)$$

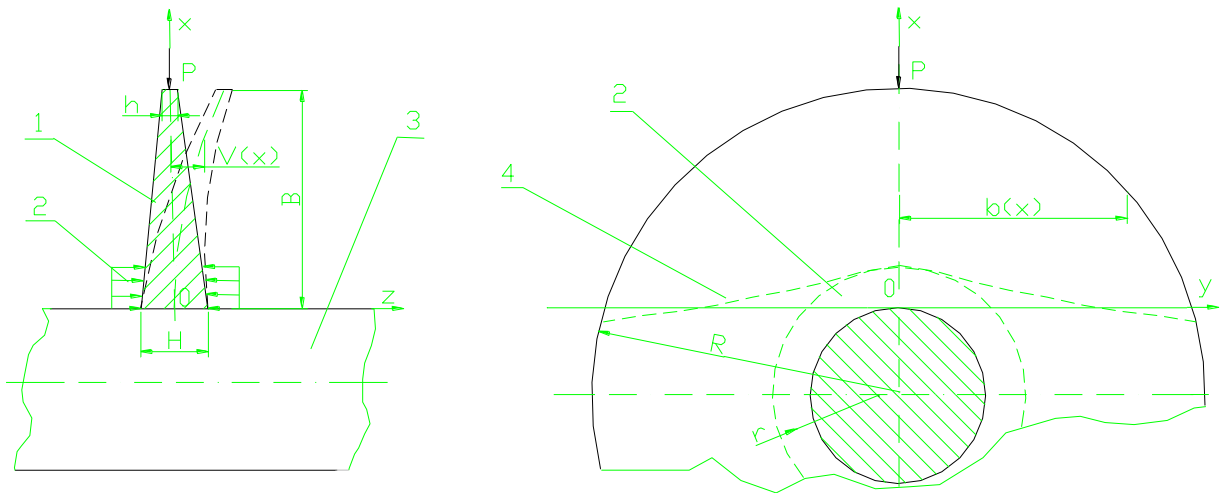


Рисунок 1. Схема кріплення, навантаження і деформації ділянки стрічки: 1 – стрічка, 2 – зона дії притискного зусилля; 3 – оправка; 4 – лінія деформації.

Подані на рис.1 реальні умови кріплення і навантаження стрічки подібні до схеми стержня, один кінець якого закріплений по хорді диска на відстані r від його центра, а інший навантажений силою P вздовж стержня.

Для розрахунку критичної сили скористаємося методом Рітца, що дозволяє отримати приблизний розв'язок з похибкою, не більшою за 1,5 % [1, с.45].

Приймаємо вираз, що описує прогин, таким:

$$v(x) = f x^2, \quad (2)$$

тоді крайові умови матимуть вигляд: $v(0) = 0$, $v'(x) = 0$.

Загальну енергію деформації системи описує вираз:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^B \frac{M^2(x)}{E I(x)} dx - \frac{1}{2} P_p \int_0^B \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx, \quad (3)$$

Виразимо згинний момент $M(x)$ у певному перерізі через стиску силу P і прогин v . Таким чином, у перерізі, що лежить на відстані x від защемленого кінця, він буде рівний $[-P_p (v(B) - v(x))]$, де $v(B)$ - величина прогину крайньої верхньої точки витка. Враховуючи формулу (2), отримаємо:

$$M(x) = -P_p f (B^2 - x^2) \quad (4)$$

Момент інерції $I(x)$, визначений за методикою, викладеною у праці [3], має вигляд:

$$I(x) = \frac{b(x) h^3}{6} + \left[\frac{b(x) (0,5 (H_x - h))^3}{9} + b(x) (H_x - h) \left(\frac{H_x - h}{6} + \frac{h}{2} \right)^2 \right], \quad (5)$$

де $b(x) = \sqrt{2 R (B - x) - (B - x)^2}$; $H_x = H - c x$; $c = \frac{H - h}{B}$.

Після відповідних перетворень виразу (5) отримаємо

$$I(x) = \frac{b(x)}{24} \left[h^3 + H_x^2 h + H_x h^2 + H_x^3 \right] \quad (6)$$

Згідно з методом Рітца часткова похідна від енергії ϵ деформації системи має дорівнювати нулеві, тобто:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial f} = 0 \quad (7)$$

Таким чином, підставивши вирази (2), (4), (6) у (3) і взявши похідну згідно з (7), отримаємо:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial f} = \frac{48 P_P^2}{E} \int_0^B \frac{(B^2 - x^2)^2 f dx}{(h^3 + H_x^2 h + H_x h^2 + H_x^3) \sqrt{2 R (B - x) - (B - x)^2}} - \frac{8}{3} P_P B^3 = 0 \quad (8)$$

Звідси, приймаючи $f \neq 0$, $P_P \neq 0$, величину критичної сили визначимо так:

$$P_P = \frac{B^3 E}{18} \left[\int_0^B \frac{(B^2 - x^2)^2 dx}{(h^3 + H_x^2 h + H_x h^2 + H_x^3) \sqrt{2 R (B - x) - (B - x)^2}} \right]^{-1} \quad (9)$$

З іншого боку, значення критичної сили можна визначити за формулою Ейлера:

$$P_e = \frac{\pi^2 E I_e}{4 B^2}, \quad (10)$$

Момент інерції спіралі у розглядуваному перерізі можна дати так:

$$I_e = \frac{\alpha \sqrt{R^2 - r^2} (\chi \delta)^3}{6} \quad (11)$$

або

$$I_e = \varepsilon \frac{\delta^3 \sqrt{R^2 - r^2}}{6}. \quad (12)$$

Тут

$$\delta = \frac{1}{2 B} \int_0^B \left[H + h - \frac{H - h}{c} x \right] dx \quad (13)$$

або

$$\delta = 0,25 (H + 3 h). \quad (14)$$

Узагальнений коефіцієнт приведення мінімального моменту інерції спіралі ε визначимо за формулою:

$$\varepsilon = \frac{I_p}{I_e}, \quad (15)$$

де

$$I_P = \frac{2 B^5}{9 \pi^2} \left[\int_0^B \frac{(B^2 - x^2)^2 dx}{(h^3 + H_x^2 h + H_x h^2 + H_x^3) \sqrt{2 R (B - x) - (B - x)^2}} \right]^{-1} \quad (16)$$

Результати розрахунків коефіцієнта ε залежно від висоти витка спіралі B та радіуса внутрішнього контура r подано у таблиці 1.

Коефіцієнт α визначимо, приймаючи товщину спіралі постійною $\delta = H = h$, за формулою:

$$\alpha = \frac{I_P^*}{I_e^*}, \quad (17)$$

де

$$I_P^* = \frac{8 B^5 \delta^3}{9 \pi^2} \left[\int_0^B \frac{(B^2 - x^2)^2 dx}{\sqrt{2 R (B - x) - (B - x)^2}} \right]^{-1} \quad (18)$$

або

$$I_P^* = 8 B^5 \delta^3 / 9 \pi^2 [(0,5 \pi + \tau) (6 A_1 - 10 A_2 + 4,375 A_3) - (8 A_1 - 16 A_2 + 8 A_3) \cos \tau - (A_1 - 3 A_2 + 1,75 A_3) \sin 2 \tau - 4/3 (A_2 - A_3) \cos^3 \tau - 1/32 A_3 \sin 4 \tau], \quad (19)$$

де $A_1 = B^2 R^2$; $A_2 = B R^3$; $A_3 = R^4$; $\tau = \arcsin (B/R - 1)$.

Таблиця 1

Значення узагальненого коефіцієнта приведення моменту інерції спіралі ε

r , мм	B , мм									
	5	10	15	20	25	50	80	100	150	300
15	0,843	0,882	0,916	0,945	0,970	1,014	1,132	-	-	-
30	0,820	0,843	0,863	0,882	0,899	0,970	1,032	-	-	-
40	0,814	0,832	0,848	0,863	0,887	0,938	0,993	1,023	-	-
50	0,811	0,825	0,838	0,851	0,863	0,916	0,966	0,993	-	-
60	0,808	0,820	0,832	0,843	0,853	0,899	0,945	0,970	-	-
80	0,805	0,814	0,823	0,838	0,840	0,877	0,916	0,938	0,985	-
100	0,803	0,811	0,818	0,825	0,832	0,863	0,896	0,916	0,958	-
120	0,802	0,808	0,814	0,820	0,826	0,853	0,882	0,899	0,938	-
140	0,801	0,806	0,812	0,817	0,882	0,846	0,871	0,887	0,922	-
160	0,800	0,805	0,810	0,814	0,819	0,840	0,863	0,877	0,910	0,985
180	0,800	0,804	0,808	0,812	0,816	0,835	0,856	0,869	0,899	0,970
200	0,799	0,803	0,807	0,811	0,814	0,832	0,851	0,863	0,891	0,958

Дані вирази, (18) або (19) можна використовувати для розрахунку точного значення моментів інерції витків спіралей шнеків постійного поперечного перерізу та секторів дисків у площині, паралельній його вісі у розглядуваному перерізі. Результати розрахунків коефіцієнта α залежно від висоти витка спіралі B та радіуса внутрішнього контура r подано у таблиці 2.

Значення коефіцієнта приведення товщини спіралі χ визначається за формулою:

$$\chi = 3 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \quad (20)$$

На основі аналізу значень коефіцієнтів, поданих у таблицях 1 і 2, у розрахунках величину χ можна вважати такою, що 1,025.

Отже, геометричні характеристики перерізу, його площу та момент інерції можна визначати за такими формулами:

$$b_{np} = 2 \alpha \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (21)$$

$$\delta_{np} = \chi (0,25 H + 0,75 h) \approx 1,025 (0,25 H + 0,75 h), \quad (22)$$

$$F_{np} = b_{np} \delta_{np}, \quad (23)$$

Таблиця 2

Значення коефіцієнтів α

r, мм	B, мм									
	5	10	15	20	25	50	80	100	150	300
15	0,815	0,829	0,84	0,849	0,855	0,876	0,887	-	-	-
30	0,806	0,815	0,823	0,829	0,835	0,855	0,869	-	-	-
40	0,804	0,811	0,817	0,823	0,828	0,847	0,861	0,867	-	-
50	0,802	0,808	0,814	0,818	0,823	0,840	0,854	0,861	-	-
60	0,801	0,806	0,811	0,815	0,819	0,835	0,849	0,855	-	-
80	0,800	0,804	0,807	0,811	0,814	0,828	0,840	0,847	0,859	-
100	0,799	0,802	0,805	0,808	0,811	0,823	0,834	0,840	0,852	-
120	0,798	0,801	0,804	0,806	0,809	0,819	0,829	0,835	0,847	-
140	0,798	0,800	0,803	0,805	0,807	0,816	0,826	0,831	0,842	-
160	0,798	0,800	0,802	0,786	0,806	0,814	0,823	0,828	0,838	0,859
180	0,797	0,799	0,801	0,803	0,805	0,812	0,820	0,825	0,835	0,855
200	0,797	0,799	0,801	0,802	0,804	0,811	0,818	0,823	0,832	0,852

$$I_e = \frac{\alpha (0,25 H + 0,75 h)^3 \sqrt{R^2 - r^2}}{5,572}, \quad (24)$$

Значення критичної сили у випадку, коли критичний стан настає при напруженнях, що не перевищують напруження границі пропорційності, потрібно визначати за формулою:

$$P_{kp} = \varepsilon \zeta \frac{(0,25 H + 0,75 h)^3 \sqrt{R^2 - r^2} E}{2,432 B^2}. \quad (25)$$

У протилежному випадку потрібно користуватися класичною методологією розрахунків критичної сили [1,2,4], використовуючи залежності (21) - (24).

Для спрощення процедури розрахунків доцільно застосовувати ППП "Mathcad 6.0".

Коли висота витка спіралі незначна ($\lambda \geq 0,5$, див. нижче), то у розрахунковій схемі його потрібно розглядати як пластину. Тоді згідно з [1] стійкість у загальному випадку оцінюватиметься виразом:

$$P_{k.n} = \kappa \frac{\pi D}{B}. \quad (26)$$

Циліндрична жорсткість пластини визначається за формулою:

$$D = \frac{E \delta_n^3}{12 (1 - \mu^2)}, \quad (27)$$

Прийнявши $\delta_n = \delta_{np}$ і підставивши у ці вирази формулу приведення (22),

отримаємо:

$$P_{k.n} = k \zeta \chi^3 \frac{[0,25 H + 0,75 h]^3}{12 B [1 - \mu^2]} E \pi \quad (28)$$

або

$$P_{k.n} = 0,282 k \zeta \frac{[0,25 H + 0,75 h]^3}{B [1 - \mu^2]} E , \quad (29)$$

де значення коефіцієнта $k = k(\lambda)$ потрібно визначати за таблицями, поданими у праці [1], використовуючи співвідношення:

$$\lambda = \frac{b_{np}}{B} = \frac{2 \alpha \sqrt{R^2 - r^2}}{B} . \quad (30)$$

Для визначення значення коефіцієнта ζ у формулах (25) і (29) виконувалися експериментальні дослідження. Загалом випадку вираз для його розрахунку має вигляд:

$$\zeta = \frac{\bar{P}_{KP}}{P_{KP}} , \quad (31)$$

Досліди виконувалися на горизонтально-фрезерному верстаті. Схема установки подана на рис. 2.

Досліджувана спіраль 1, у якій усі витки зрізані, окрім одного, встановлюється на оправці 3 і затискається спеціальними кільцями або планками 2 за допомогою втулок 4, 9 і гайки 10. Зусилля вісьового затиску для наближення до реальних умов кріплення, наприклад, у процесі навивання, реєструється динамометричним ключем. Оправка 3 кріпиться у шпинделі верстата і підтримується кронштейном 11. На столі 8 встановлюється пружинний динамометр 6, на верхній площині якого розміщений столик 12 на опорах кочення. При піднятті стола 8 виток впирається у столик 12. Останній на опорах кочення створює степінь вільності у переміщенні точки дотику витка із столиком в поперечному до площини витка напрямку, що відповідає формі прогину при втраті стійкості витка згідно з схемою рис.1.

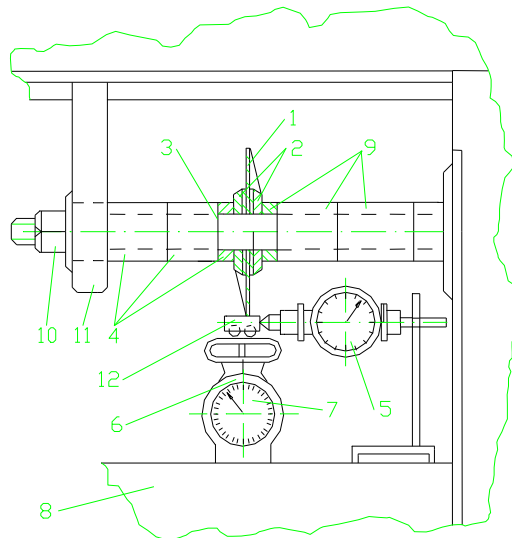


Рисунок 2. Схема експериментальної установки.

Підняттям стола 8 створюється навантаження на виток спіралі, яке реєструється індикатором 7. Індикатор 5 реєструє прогин витка у точці його дотику зі столиком 12.

Коли товщини зовнішнього та внутрішнього контурів спіралі значно відрізняються, індикатор 5 із спіраллю 1 контактували на відстані V_{PP} від зовнішнього контура спіралі:

$$V_{PP} = \frac{B(H - \delta)}{H - h} \quad (32)$$

У поданій експериментальній установці виконувалися також дослідження стійкості спіралей, нерухомо закріплених (зварюванням, склепуванням та ін.) на валах суцільного або трубчастого типу. Однак у цьому випадку столик 12 та індикатор 5 розміщувалися під кутом ω до вісі оправки, що дорівнював кутові нахилу гвинтової спіралі.

У результаті експериментальних досліджень встановлено, що значення коефіцієнта $\zeta = 0,65 \div 0,85$. При чому менші значення відповідають фрикційному кріпленню внаслідок дії вісьової сили притиску, більші – індивідуальному механічному кріпленню спіралі вище вказаними методами.

У результаті досліджень встановлено, що приведені вище залежності описують стан стійкості спіралей у розглянутих схемах деформації з точністю, достатньою для практичного використання.

Таким чином, на основі запропонованої методики можна оцінювати статичну стійкість стрічок гвинтових механізмів, а використання формул приведення дозволить значно спростити процедуру їх дальших математичних досліджень.

The article is devoted to calculation of strips helical devices on the stability. This method applies also to compressive strain by static concentrated load.

Література

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем.-М.: Гос. изд-во физико-математ. литературы, 1963.- 880 с.
2. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник в 3-х т. / Под ред. проф. Биргера Й.А. и Пановко Я.Г. - М., 1968.
3. Engineering mechanics. S.S.Bhavikatti, K.G.Rajashekarappa: Karnataka Regional Engineering College, 1994.
4. Долинский Ф.В., Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Высш. шк., 1988. – 432 с.

Отримано 07.07.2000 р.