УДК 519.62

О.Дробот; Г.Гнатієнко, канд. техн. наук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПРОЦЕДУРИ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ВЕКТОРА ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ В ЗАДАЧАХ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Запропоновано обґрунтований апарат аналізу переваг експерта, заданих у вигляді вектора вагових коефіцієнтів, компоненти якого належать гіперпаралелепіпеду переваг, та процедури його локалізації.

Умовні позначення

ρ - вектор вагових коефіцієнтів;

Π - гіперпаралелепіпед вагових коефіцієнтів;

I - множина індексів компонент вектора вагових коефіцієнтів;

Δ_i - поправки на верхні межі компонент вектора ρ;

δ_{ii} - поправки на нижні межі компонент вектора ρ.

Визначення вагових коефіцієнтів відносної важливості об'єктів, їх параметрів та компетентності експертів є суттєвим та невід'ємним етапом у багатьох задачах прийняття рішень.

Поширеним є спосіб задання переваги у вигляді нормованих вагових коефіцієнтів, які відображають відносну важливість кожного об'єкта для експерта і задовольняють умови нормованості

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 1, \qquad (1)$$

$$\rho_i > 0, \quad i \in I. \qquad (2)$$

В багатьох випадках [1,2,3] експертові зручніше задавати переваги в нечіткій, розмитій формі у вигляді інтервалів зміни коефіцієнтів відносної важливості об'єктів, тобто гіперпаралелепіпеда у просторі вагових коефіцієнтів (ГВК)

$$\Pi = \prod_{i \in I} [\rho^H{}_i , \rho^B{}_i], \ \ 0 < \rho^H{}_i \le \rho^B{}_i < 1, \ \ i \in I , \tag{3}$$

де $\rho^H{}_i$, $\rho^B{}_i$ - відповідно нижня та верхня межі зміни компонент вектора, ρ_i, $i \in I$.

Означення 1. Паралелепіпед вигляду (3) є допустимим, якщо існує хоча б одна спільна точка з гіперплощиною вигляду (1), тобто виконуються умови

$$\sum_{i \in I} \rho^H{}_i \le 1, \quad \sum_{i \in I} \rho^B{}_i \ge 1. \tag{4}$$

Наслідок 1. Якщо $\sum_{i \in I} \rho^H{}_i > 1$, або $\sum_{i \in I} \rho^B{}_i < 1$, то задані відношення переваги недопустимі в нормованій формі, тобто вектора, який би задовольняв умові (1) і належав заданому ГВК, не існує.

Означення 2. Надлишковими значеннями ГВК називаються такі значення його компонент ρ_i, $i \in I$, для яких не існує значень ρ_j, $j \in I$, $j \neq i$, на гіперплощині (1), щоб виконувалися співвідношення (1) та (2).

Означення 3. ГВК називається несуперечливим, якщо він не містить надлишкових значень.

В [3] наводяться процедури, орієнтовані на виявлення інтервалів зміни вагових коефіцієнтів. При безпосередньому заданні експертом інтервалів зміни нормованих коефіцієнтів, а також при застосуванні деяких методів визначення ГВК можуть порушуватися умови (4). Тобто гіперпаралелепіпед можливих значень вагових коефіцієнтів може не містити жодного вектора, який задовольняв би умові нормування, через те, що він не перетинається з гіперплощиною (1). Будемо вважати, що гіперпаралелепіпед є недопустимим.

У випадку, коли площа перетину гіперплощини (1) з гіперпаралелепіпедом (3) надто мала або перетину не існує, сильно змінюється початкова експертна інформація при відокремленні від неї надлишкових значень ГВК. Тобто спотворюється структура переваг, задана експертом. Щоб запобігти цьому, експерта просять переглянути свої переваги або погодитися на їх зміну відповідно до деякого алгоритму.

В даній роботі розглядаються процедури локалізації вектора вагових коефіцієнтів, який належить гіперпаралелепіпеду вигляду (3), які б обґрунтовано та з якомога меншими спотвореннями змінювали відношення переваги, задані експертом, приводячи (3) до несуперечливого вигляду.

При заданні ГВК вигляду (3) можливі такі випадки:

1) заданий ГВК не містить надлишкових значень коефіцієнтів;

2) ГВК не перетинається з гіперплощиною (1), тобто в ньому не існує нормованих значень вагових коефіцієнтів, які задовольняють умови (1), (2).

3) в заданому ГВК є значення коефіцієнтів, що задовольняють умови (1), (2), але містяться надлишкові значення.

Приведемо графічну ілюстрацію випадків 2), 3) у двовимірному просторі

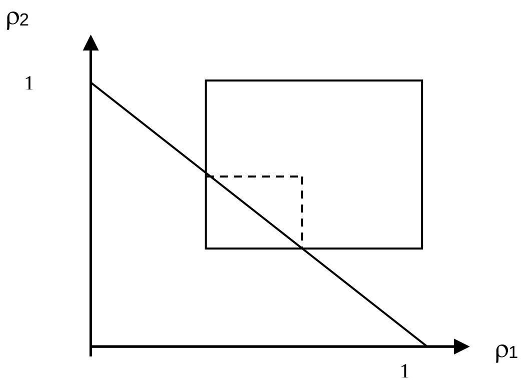

Рисунок 1

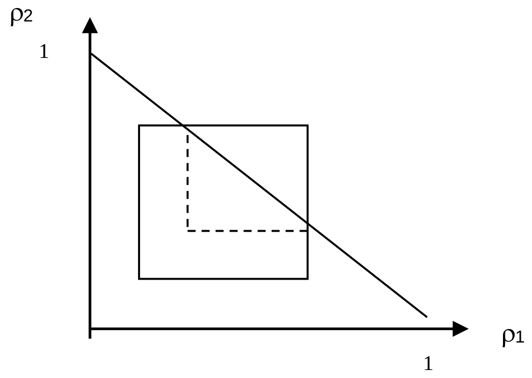

Рисунок 2

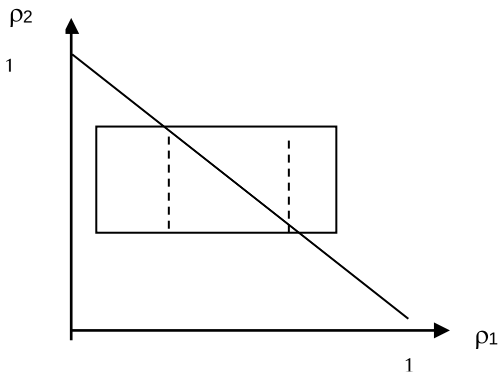

Рисунок 3

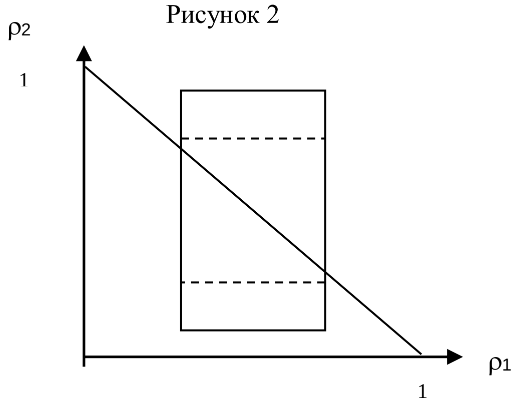

Рисунок 4

Рис.1. Надлишкові значення біля верхніх меж $\rho^{B}{}_1$та $\rho^{B}{}_{2.}$

Рис.2. Надлишкові значення біля нижніх меж $\rho^{H}{}_1$та $\rho^{H}{}_{2.}$

Рис.3. Надлишкові значення біля верхньої та нижньої меж $\rho_{1.}$

Рис.4. Надлишкові значення біля верхньої та нижньої меж $\rho_{2.}$

У випадках 2)-3) виникає необхідність в зміні експертом переваг. Це пропонується зробити безпосередньо експертові або здійснюється з допомогою, наприклад, процедур. Виникнення ситуацій 2)-3) може бути наслідком некомпетентності експерта в досліджуваній області, поганій формалізованості проблеми, недосвідченості експерта в процедурі задання переваг, відображенням реальної ситуації в модельованому процесі тощо.

Розглянемо процедуру К1 відсіву надлишкових значень вагових коефіцієнтів ГП для випадків 2)-3). Здійснюються перетворення вигляду

$$\rho^{H'}{}_i = 2\cdot\rho^{H}{}_i \Big/ \sum_{j\in I}(\rho^{H}{}_j + \rho^{B}{}_j), \quad \rho^{H'}{}_i = 2\cdot\rho^{B}{}_i \Big/ \sum_{j\in I}(\rho^{H}{}_j + \rho^{B}{}_j), \quad i\in I,$$

які переміщують центр паралелепіпеда (3) на гіперплощину (1) і максимізують “площу” перетину гіперпаралелепіпеда $\Pi^1 = \Pi\ [\ \rho^{H'}{}_i, \rho^{B'}{}_i]$ з цією гіперплощиною.

Далі застосовується процедура відсіву надлишкових значень коефіцієнтів ГВК, яка є модифікацією методу послідовного аналізу варіантів для задач лінійного програмування великої розмірності [2]. Суть цього методу полягає у звуженні інтервалів зміни коефіцієнтів $\rho^{H}{}_i$, $\rho^{B}{}_i$, $i\in I$, з допомогою аналізу виродженого багатогранника
вигляду (4).

Для визначення надлишкових значень в околі нижньої межі по і-му обмеженню природньо вимагати виконання співвідношення

$$\rho^{H}{}_{i} + \sum_{j \neq i} \rho^{B}{}_{i} \geq 1. \tag{5}$$

Якщо ця умова порушується, тобто якщо $\rho^{H}{}_{i} + \sum_{j \neq i} \rho^{B}{}_{i} < 1$, необхідно нижню межу збільшити на деяку величину $\rho^{H'}{}_{i} = \rho^{H}{}_{i} + \delta_i$, для $\delta_i > 0$, щоб у співвідношенні (5) виконувалася хоча б рівність $\rho^{H}{}_{i} + \sum_{j \neq i} \rho^{B}{}_{i} = 1$. Звідси:

$$\delta_i = 1 - \rho^{H'}{}_{i} - \sum_{\substack{j \in I, \\ j \neq i}} \rho^{B'}{}_{j}, \;\; i \in I. \tag{6}$$

В разі, коли не виконується нерівність

$$\rho^{B}{}_{i} + \sum_{j \neq i} \rho^{H}{}_{i} \leq 1, \tag{7}$$

аналогічними міркуваннями приходимо до необхідності поправок на верхні межі інтервалів $\rho^{B''}{}_{i} = \rho^{B'}{}_{i} - \Delta_i$, для $\Delta_i > 0,\; i \in I$, де $\Delta_i = \rho^{B'}{}_{i} + \sum_{\substack{j \in I, \\ j \neq i}} \rho^{H'}{}_{j} - 1,\;\; i \in I$.

Отримані в результаті застосування процедури К1 нові значення меж паралелепіпеда $\rho^{H'}{}_{i}$ та $\rho^{B'}{}_{j}$, $i \in I$, будуть задавати результуючий ГВК, який не містить надлишкових значень.

Твердження 1. Умовою відсіву обох меж паралелепіпеда П вигляду (3) є наявність індексу і такого, що

$$\rho^{B}{}_{i} - \rho^{H}{}_{i} > \sum_{i \neq I} \rho^{B}{}_{j} - \rho^{H}{}_{j}, \;\; i, j \in I. \tag{8}$$

Перепишемо значення Δ_i у вигляді

$$\Delta_i = \sum_{i \neq j} \rho^{H}{}_{j} + \rho^{B}{}_{i} - 1 = \sum_{j \in I} \rho^{H}{}_{j} - \rho^{H}{}_{i} + \rho^{B}{}_{i} - 1 = \sum_{j \in I} \rho^{H}{}_{j} + \rho^{B}{}_{i} - \rho^{H}{}_{i} - 1.$$

Умову (8) можна переписати у вигляді $\Delta_i > \sum_{i \neq j} \rho^{H}{}_{j} + \rho^{H}{}_{i} + \sum_{j \neq i} \rho^{B}{}_{j} - \sum_{j \neq i} \rho^{H}{}_{j} - 1$,тобто $\Delta_i > \rho^{H}{}_{i} + \sum_{j \neq i} \rho^{B}{}_{j} - 1$.Оскільки паралелепіпед П допустимий, то $\sum_{j \neq i} \rho^{B}{}_{j} + \rho^{H}{}_{i} \geq 1$, і тому $\Delta_i > 0$.

З іншого боку, з виразу (6) одержимо

$$\delta_i = 1 - \rho^{H}{}_{i} - \sum_{j \neq i} \rho^{B}{}_{j} = 1 + \sum_{j \neq i} \rho^{H}{}_{j} - \sum_{j \in I} \rho^{H}{}_{j} - \sum_{ij \neq i} \rho^{B}{}_{j} = 1 - \sum_{j \in I} \rho^{H}{}_{j} - \sum_{i \neq I} (\rho^{B}{}_{i} - \rho^{H}{}_{i}).$$

Але, враховуючи умову (8), можна записати $\delta_i > 1 - \sum_{j \in I} \rho^{H}{}_{j} - (\rho^{B}{}_{i} - \rho^{H}{}_{i})$, або $\delta_i > 1 - \sum_{j \in I} \rho^{H}{}_{j} - \rho^{B}{}_{i} + \rho^{H}{}_{i}$, тобто $\delta_i > 1 - \sum_{j \neq i} \rho^{H}{}_{j} - \rho^{B}{}_{i}$. Враховуючи допустимість паралелепіпеда П: очевидно, що $\delta_i > 0$, що й доводить Твердження 1.

Твердження 2. Умовою відсіву тільки однієї з меж паралелепіпеда П є виконання нерівності $(1 - \sum_{j \in I} \rho^{H}{}_{j}) < (\sum_{j \in I} \rho^{B}{}_{j} - 1)$ (відсіюються лише верхні межі), або $(1 - \sum_{j \in I} \rho^{H}{}_{j}) > (\sum_{j \in I} \rho^{B}{}_{j} - 1)$ (відсіюються лише нижні межі). У випадку рівності $(1 - \sum_{j \in I} \rho^{H}{}_{j}) = (\sum_{j \in I} \rho^{B}{}_{j} - 1)$ - відсів не відбувається.

Нехай $(1-\sum_{j\in I}\rho^H{}_j)<(\sum_{j\in I}\rho^B{}_j-1)$. Доведемо, що в цьому випадку відсіюються лише верхні межі, тобто $\Delta_i\ge 0$, $\delta_i<0$. Розпишемо Δ_i як

$$\Delta_i=\sum_{j\ne i}\rho^H{}_j+\rho^B{}_i-1=\rho^B{}_i-(1-\sum_{j\in I}\rho^H{}_j+\rho^H{}_i)=(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)-(1-\sum_{j\in I}\rho^H{}_j).$$

Очевидно, що $\Delta_i\ge 0$, коли $1-\sum_i\rho^H{}_i\le\rho^B{}_i-\rho^H{}_i$. Припустимо, що $1-\sum_i\rho^H{}_i\le\rho^B{}_i-\rho^H{}_i$.

Доведемо справедливість цього припущення, розписавши його таким чином $1-\sum_i\rho^H{}_i\le(\sum_{j\in I}\rho^B{}_j-1)+1-\sum_{j\ne i}\rho^B{}_j-\rho^H{}_i$.

Враховуючи умову допустимості паралелепіпеда П, очевидне існування індексів, для яких справедливо $1-\sum_i\rho^H{}_i\le\rho^B{}_i-\rho^H{}_i$, а отже існують $\Delta_i\ge 0$, $i\in I$.

Аналогічно доведемо, що $\delta_i<0$. Відповідно до виразу (7),

$$\delta_i=1-\rho^H{}_i-\sum_{j\ne i}\rho^B{}_j=1-(\sum_{j\in I}\rho^B{}_j-\rho^B{}_i)-\rho^H{}_i=(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)-(\sum_{j\in I}\rho^B{}_j-1).$$

Очевидно, що $\delta_i<0$, коли $\sum_i\rho^B{}_i-1>\rho^B{}_i-\rho^H{}_i$. Припустимо, що $\sum_i\rho^B{}_i-1>\rho^B{}_i-\rho^H{}_i$.

Доведемо справедливість цього припущення, розписавши його таким чином, $\sum_i\rho^B{}_i>\rho^B{}_i+(1-\sum_{j\in I}\rho^H{}_j)+\sum_{j\ne i}\rho^H{}_j-1$, що доводить справедливість припущення. Враховуючи умову допустимості паралелепіпеда П, тобто $\rho^B{}_i+\sum_{j\ne i}\rho^H{}_j\le 1$ очевидно, що для всіх індексів $i\in I$ справедливо $\sum_i\rho^B{}_i-1>\rho^B{}_i-\rho^H{}_i$, а отже і $\delta_i<0$, $\forall i\in I$.

Для випадку $(1-\sum_{j\in I}\rho^H{}_j)>(\sum_{j\in I}\rho^B{}_j-1)$ доведення проводиться аналогічно.

Твердження 3. Якщо $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)>1-\sum_{i\in I}\rho^H{}_i$, то уточнення нижніх меж ГПВ не відбувається.

Доведемо, що для цього випадку виконується $\delta_i<0$, $\forall i\in I$, тобто поправки нижніх меж КП є від'ємними, і таким чином зміни меж не відбувається.

Початкову нерівність можна переписати наступним чином

$$\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)>1-\rho^H{}_j-\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}\rho^H{}_i-\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}\rho^B{}_i+\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}\rho^B{}_i.$$

Зробивши перестановки в правій частині нерівності та врахувавши, що $\delta=1-\rho^H{}_j-\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}\rho^B{}_i$, отримаємо $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)>1-\rho^H{}_j-\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}\rho^B{}_i+\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}\rho^H{}_i-\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}\rho^B{}_i$.

Звідси $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)+\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}\rho^H{}_i-\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}\rho^B{}_i>\delta_i$, або $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)-\sum_{\substack{i\ne j\\ i\in I}}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)>\delta_i$.

Очевидно, що $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)<\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)$.

Отже, $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)-\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)<0$, а це означає, що $\delta_i<0$ для $\forall i\in I$, що й доводить справедливість Твердження 3.

Твердження 4. Якщо $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)>\sum_{i\in I}\rho^B{}_i-1$, то уточнення верхніх меж паралелепіпеда не відбувається.

Доведемо, що для цього випадку виконується $\Delta_i<0$, $\forall i\in I$, тобто поправки верхніх меж КП є від’ємними, і таким чином зміни меж не відбувається.

Початкову нерівність можна переписати наступним чином.

$$\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)>\rho^B{}_j+\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}\rho^B{}_i-1+\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}\rho^H{}_i-\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}\rho^H{}_i\,.$$

Враховуючи, що $\Delta_i=\rho^B{}_j+\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}\rho^B{}_i-1$, запишемо:

$$\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)>\rho^B{}_j+\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}\rho^H{}_i-1+\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}\rho^B{}_i-\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}\rho^H{}_i\,,$$

або $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)-\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)>\Delta_i$.

Очевидно, що $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)<\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)$, $\min_{i\in I}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)-\sum_{\substack{i\neq j\\ i\in I}}(\rho^B{}_i-\rho^H{}_i)<0$, а це означає, що $\Delta_i<0$, $\forall i\in I$, що й доводить справедливість Твердження 4.

Для відсіву надлишкових значень вагових коефіцієнтів можна використати також процедуру К2

Крок 1. Перевірка наявності надлишкових значень в ГВК вигляду (3) за формулами (5), (7). У випадку їх наявності перехід до Кроку 2**,** інакше до Кроку 3

Крок 2. Зміна меж ГВК.

а) Якщо не виконується нерівність (5), то збільшуємо всі складові нерівності (5) на деяку величину ε , де ε>0 - достатньо мале число, яке забезпечувало б швидку збіжність процедури і дозволяло б обчислити ГВК, який не містить надлишкових значень, з достатньою точністю, тобто $\rho^H{}_i+\varepsilon$, $i\in I$, $\rho^B{}_j+\varepsilon$, $\forall j\in I$, $j\neq i$.

б) Якщо не виконується нерівність (7), то зменшуємо всі складові нерівності на величину ε, тобто $\rho^B{}_i-\varepsilon$, $i\in I$, $\rho^H{}_j-\varepsilon$, $\forall j\in I$, $j\neq i$.

Перехід на Крок 1.

Крок 3. Закінчення алгоритму К2.

6. Порівняння процедури К1 та алгоритму К2.

Виходячи з евристики, що одночасна зміна всіх параметрів у процедурі К2 дає менші спотворення початкової експертної інформації при виконанні умов (5) та (7) (відсутності надлишкових значень в остаточному ГВК, особливо при зростанні кількості параметрів), можна припустити, що в більшості випадків процедура К2 краще зберігає початкову структуру переваг ніж процедура К1.

Математично обґрунтуємо це припущення для двовимірного простору у випадках I- IV, представлених на рисунках. Співставимо “площі” паралелепіпедів, отриманих в результаті відокремлення надлишкових значень процедурами К1 та К2 з площею початкового паралелепіпеду. За критерій оптимальності процедури будемо вважати мінімум відношення площі початкового паралелепіпеда до площі паралелепіпедів, отриманих в результаті процедур К1 та К2.

Припустимо, переваги задані в просторі у вигляді інтервалів [$\rho_1^н$, $\rho_1^в$] та [$\rho_2^н$, $\rho_2^в$]. Тоді площа, яка утворюється паралелепіпедом початкової структури переваг визначається:

$$S = (\rho^B{}_1 - \rho^H{}_1)\cdot(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2) \qquad (9)$$

1. Розглянемо випадок, коли в околі верхніх меж ρ_1 та ρ_2 є надлишкові значення (рис.1). Тоді, в результаті процедури К1 площа залишкового паралелепіпеду буде:

$$S = (\rho^B{}_1 - \Delta_1 - \rho^H{}_1)\cdot(\rho^B{}_2 - \Delta_2 - \rho^H{}_2),$$

де Δ_1 та Δ_2 – це поправки на верхні межі відповідно ρ_1 та ρ_2.

В результаті процедури К2 площа паралелепіпеда буде:

$$S = (\rho^B{}_1 - n_1\cdot\varepsilon - (\rho^H{}_1 - n_2\cdot\varepsilon))\cdot(\rho^B{}_2 - n_2\cdot\varepsilon - (\rho^H{}_2 - n_1\cdot\varepsilon)),$$

де ε – досить мале число; n_1 – кількість корекцій верхньої межі $\rho_1^в$ (одночасно змінюється і $\rho_2^н$) число n_2 – кількість корекцій верхньої межі $\rho_2^в$ та $\rho_1^н$.

Наведемо системи рівнянь для відокремлення надлишкових значень в районі верхніх меж процедурами К1 та К2:

$$\begin{cases}\rho^B{}_1 - \Delta_1 + \rho^H{}_1 = 1\\ \rho^B{}_1 - n_1\cdot\varepsilon + \rho^H{}_2 - n_1\cdot\varepsilon = 1\end{cases}, \quad \begin{cases}\rho^B{}_1 - \Delta_2 + \rho^H{}_1 = 1\\ \rho^B{}_2 - n_2\cdot\varepsilon + \rho^H{}_1 - n_2\cdot\varepsilon = 1\end{cases}.$$

Звідки $\Delta_1 = 2\cdot n_1\varepsilon$, $\Delta_2 = 2\cdot n_2\varepsilon$.

Підставивши знайдені значення в рівняння для площі S_1 та S_2 та згрупувавши їх певним чином, отримаємо такі вирази:

$$S_1 = (\rho^B{}_1 - \rho^H{}_1 - 2n_1\varepsilon)\cdot(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2 - 2n_2\varepsilon), \qquad (10)$$

$$S_2 = (\rho^B{}_1 - \rho^H{}_1 - (n_1 - n_2)\varepsilon)\cdot(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2 - (n_2 - n_1)\varepsilon) \qquad (11)$$

При порівняльних значеннях n_1 і n_2 логічно припустити, що $2n_1 > |n_1 - n_2|$ та аналогічно, $2n_2 > |n_2 - n_1|$. В цьому випадку, порівнюючи (10) (11) з виразом (9), очевидно, що при прийнятих допущеннях відношення площі S до площі S_2 менше, ніж відношення S до S_1, тобто процедура $К_2$ краще зберігає початкову структуру переваг.

2. Розглянемо випадок, коли в околі нижніх меж ρ_1 та ρ_2 є надлишкові значення (рис.2). Тоді, в результаті виконання процедури К1, площа залишкового паралелепіпеда буде:

$$S_1 = (\rho^B{}_1 - (\rho^H{}_1 + \delta_1))\cdot(\rho^B{}_2 - (\rho^H{}_2 + \delta_2)) \qquad (12)$$

В результаті застосування процедури К2 площа паралелепіпеда буде:

$$S_2 = (\rho^B{}_1 + m_1\varepsilon - (\rho^H{}_1 + m_2\varepsilon))\cdot(\rho^B{}_2 + m_2\varepsilon - (\rho^H{}_2 + m_1\varepsilon)), \qquad (13)$$

де ε – досить мале число; m_1 – кількість корекцій нижньої межі ρ_1^H (одночасно змінюється і ρ_2^B), число m_2 – кількість корекцій нижньої межі ρ_2^H та ρ_1^B.

Переписавши певним чином вирази (12) та (13), отримуємо

$$S_1 = (\rho^B{}_1 - \rho^H{}_1 - \delta_1)\cdot(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2 - \delta_2),$$
$$S_1 = (\rho^B{}_1 - \rho^H{}_1 - (m_2 - m_1)\varepsilon)\cdot(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2 - (m_1 - m_2)\varepsilon).$$

Отримані вирази аналогічні до (10) та (11), тому доведення проводиться так само.

3. Розглянемо випадок, коли в околі нижньої та верхньої межі ρ_1 є надлишкові значення (рис.3). Тоді, в результаті процедури К1, площа паралелепіпеда буде:

$$S_1 = (\rho^B{}_1 - \Delta_1 - (\rho^H{}_1 + \delta_1))\cdot(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2) \tag{14}$$

В результаті процедури К2 площа паралелепіпеда буде:

$$S_2 = (\rho^B{}_1 - n_2\varepsilon - (\rho^H{}_1 + n_1\varepsilon))\cdot(\rho^B{}_2 + n_1\varepsilon - (\rho^H{}_2 - n_2\varepsilon)) \tag{15}$$

Наведемо системи рівнянь для відокремлення надлишкових значень в районі верхніх меж процедурами К1 та К2:

$$\begin{cases}\rho^H{}_1 + \delta_1 + \rho^B{}_1 = 1\\ \rho^H{}_1 + n_1\cdot\varepsilon + \rho^B{}_2 + n_1\cdot\varepsilon = 1\end{cases},\quad \begin{cases}\rho^B{}_1 - \Delta_1 + \rho^H{}_1 = 1\\ \rho^B{}_2 - n_2\cdot\varepsilon + \rho^H{}_1 - n_2\cdot\varepsilon = 1\end{cases}.$$

Звідки $\delta_1 = 2\cdot n_1\varepsilon$, $\Delta_1 = 2\cdot n_2\varepsilon$.

Підставивши знайдені значення в рівняння (15) та (16) та згрупувавши їх певним чином, отримаємо такі вирази:

$$S_1 = (\rho^B{}_1 - \rho^H{}_1 - 2(m+n)\varepsilon)\cdot(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2),\ S_2 = (\rho^B{}_1 - \rho^H{}_1 - (n_1 + n_2)\varepsilon)\cdot(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2 + (n)$$

Очевидно, що $S_2 > S_1$. Розглянемо різницю площин паралелепіпедів S_1 і S_2 з S та порівняємо їх між собою: $\Delta S_1 = S - S_1 = -2(n_1 + m_1)\varepsilon(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2)$, та $\Delta S_2 = S - S_2 = (m_1 + n_1)\varepsilon\cdot(\rho^B{}_2 - \rho^H{}_2 - \rho^B{}_1 + \rho^H{}_1) - ((m_1 + n_1)\varepsilon)^2$. Розглянемо їх відношення:

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{-2(m_1 + n_1)\varepsilon(\rho_2^в - \rho_2^н)}{(m_1 + n_1)\varepsilon(\rho_1^в - \rho_1^н - \rho_2^в + \rho_2^н - (m_1 + n_1)\varepsilon)} = \frac{-2(\rho_2^в - \rho_2^н)}{(\rho_1^в - \rho_1^н) - (\rho_2^в - \rho_2^н) - (m_1 + n_1)\varepsilon} \tag{16}$$

Перегрупувавши певним чином знаменник і враховуючи нижні вирази в системах рівнянь для цього випадку, отримаємо знаменник :

$$(\rho^B{}_1 + \rho^H{}_2 - n_2\varepsilon - n_2\varepsilon) + n_2\varepsilon - (\rho^B{}_2 + \rho^H{}_1 + n_1\varepsilon + n_1\varepsilon) - n_1\varepsilon) = 1 + n_2\varepsilon - 1 + n_1\varepsilon = (n_2 + n_1)\varepsilon$$

Взявши чисельник по модулю, перепишемо (16):

$$\frac{|\Delta S_1|}{\Delta S_2} = \frac{2(\rho_2^в - \rho_2^н)}{(m+n)\varepsilon}$$

При достатньо малому ε, логічно передбачити, що у більшості випадків знаменник менше чисельника, тобто площа S_2 менше відрізняється від площі S, ніж S_1 від S.

Було проведено обчислювальний експеримент, за яким співставлення результатів відсіювання надлишкових значень ГВК процедурами К1 і К2 проводилося на 1000 випадкових ГВК, з числом параметрів від 2 до 10. Міра спотворення початкової структури переваг експертів, при проведенні процедур К1 та К2 знаходилась як відхилення площі гіперпаралелепіпеда П, уточненого в результаті процедур К1 та К2 від площі початково заданого експертом гіперпаралелепіпеда $П^0$.

Відхилення інтервалів, уточнених в результаті процедур К1 та К2 $[\rho^{H'}{}_i, \rho^{B'}{}_i]$, $i \in I$, від початково заданих експертом інтервалів $[\rho^H{}_i, \rho^B{}_i]$, $i \in I$, знаходилось як $\left|\rho^B{}_i - \rho^{B'}{}_i\right|$, $\left|\rho^H{}_i - \rho^{H'}{}_i\right|$, $i \in I$. За критерій оптимального відхилення уточнених процедурами інтервалів від початково заданих експертами вважався $\min(\sum_{i\in I}\left|\rho^B{}_i - \rho^{B'}{}_i\right| + \left|\rho^H{}_i - \rho^{H'}{}_i\right|)$

Співставлення процедур К1 і К2 за цими характеристиками в результаті експерименту показало, що процедура К2 в переважному числі випадків краще зберігає початкову структуру переваг експерта, особливо при збільшенні числа параметрів.

Висновки

Запропоновано та обґрунтовано апарат аналізу переваг експертів, заданих в інтервальній формі. Наведено конструктивні процедури переходу від гіперпаралелепіпеда вагових коефіцєнтів, заданого експертом, до несуперечливого (“ненадлишкового”) гіперпаралелепіпеда переваг. Проведено співставлення запропонованих процедур К1 та К2 за критерієм мінімального спотворення початкової структури переваг експерта.

The proved device of the analysis of the expert's preferences given in the interval form and of the procedures of elimination of superfluous values of the giperparallelepiped in space of preferences are offered.

Література

1. Гнатиенко Г.Н. Задание предпочтений на множестве критериальных функций в задачах многокритериальной оптимизации // Вестн.Киев.ун-та.Моделирование и оптимизация слож.систем,1990.-Вып.9.- С.87-92.
2. Доленко Г.А. Задание вектора предпочтений критериев на интервалах в задачах векторной оптимизации. Сб. “Кибернетика и вычислительная техника”. - Вып.51. К., 1981. - С.101-108.
3. Разработка математического и программного обеспечения для задач принятия решений на основе экспертной информации в условиях локальной сети ЕС-СМ-ПЭВМ со стороны СМ ЭВМ: Отчет о НИР (заключит.)/А.Ф.Волошин, Г.Н.Гнатиенко, А.Ю.Микулич и др.//Киев.ун-т им. Т.Шевченко, №ГР 01890024291; Инв. №02890029442. - Киев, 1989. - 191с.

Одержано 26.05.2002 р.