УДК.681.513
Ф.Марецький, докт.техн.наук
Державний НДІ інформаційної інфраструктури, м.Львів, Україна
Академія інформатики та управління, м.Бєльско-Бяла, Польща

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ КОМПЛЕКСУ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ

Розглянуто задачу математичного моделювання та оптимізації комплексу ремонтних, складальних та монтажних операцій, які виконуються на почергових змінах. Особливе місце в процесі моделювання відведено дослідженню структури комплексу операцій. Оптимізація комплексу операцій полягає у такому розподілі окремих операцій технологічного процесу між змінами, коли повний технологічний процес здійснюється за найкоротший час.

Комплекс технологічних операцій в цій статті – це сукупність операцій з певними логічними, часовими та просторовими обмеженнями [1]. Такі комплекси операцій мають місце не тільки у різноманітних галузях виробництва, але і в сфері надання послуг та торгівлі. Математичне моделювання та оптимізація комплексів операцій сприяє покращанню економічних показників виробництва.

Математична модель комплексу операцій в цілому відображає як структуру комплексу, так і математичні моделі окремих операцій. У випадку статичних операцій в математичні моделі входять такі параметри, як: час та кошти виконання, необхідні пристрої та інші засоби. В більш загальних випадках математична модель комплексу операцій описується різницевими рівняннями. Структуру комплексу відображають у вигляді графу, вузлами якого є операції, а дуги представляють послідовність виконання операцій. Ідентифікація структури комплексу операцій полягає у визначенні послідовності виконання окремих операцій цього комплексу. Суть проблеми полягає у визначенні так званих безпосередніх попередників та наступників кожної операції.

Методи математичного моделювання та оптимізації комплексів виробничих операцій безпосередньо пов’язані з комп’ютеризацією цих складних процесів. Ці методи можуть з успіхом використовуватися в різноманітних галузях, як наприклад [2-4]. В цій статті розглядаються питання моделювання та оптимізації комплексу зосереджених технологічних операцій, тобто таких, які локалізовані в одному місці. При цьому нехтується часом переміщення деталей та устаткування при переході від однієї операції до іншої. Даний комплекс інтерпретує операції ремонтні, складальні, монтажні тощо. Комплекс таких операцій виконується протягом чергових робочих змін. Проблема оптимізації полягає у формуванні послідовності операцій чергових робочих змін таким чином, щоб усі ці операції загалом були виконані за найменший час.

У виробничій практиці комплекс технологічних операцій може бути змінним. Зокрема, у випадку комплексу ремонтних операцій група завдань (операцій), які стоять перед черговими робочими змінами, змінюється. В таких випадках процедури визначення оптимального набору операцій для кожної робочої зміни необхідно реалізовувати динамічно.

Для побудови математичної моделі комплексу операцій припустимо, що задано набір операцій (завдань):

$$Z = \{z_n\},\ n = 1,...,N,$$

де z_n – *n*-та операція, N – кількість операцій. Параметром, який описує операції, є час їх виконання. Часи всіх операцій є елементами вектора $T = [t_n],\ n = 1,...,N$, де t_n – час виконання операції z_n.

Структура комплексу операцій зображується у формі графу безпосередніх попередників та наступників кожної операції. Цей граф можна представити матрицею

$$G = \lfloor g_{m,n} \rfloor,\ m = 1,...,N,\ n = 1,...,N,$$

елементи якої визначають наступним чином:

$$g_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{якщо операція } \mathrm{z_m} \text{ є безпосереднім попередником операції } \mathrm{z_n}, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Відмінність між безпосередніми попередниками та просто попередниками вимагає певного пояснення. Попередником z_i операції z_j є операція, яка повинна бути виконана перед операцією z_j. Безпосереднім попередником z_m операції z_n є така операція, яка повинна бути виконана перед z_n і може бути виконана безпосередньо перед цією операцією.

Матриця *G* описує структуру комплексу операцій. Ця структура повинна бути ідентифікована, що означає запис кожної відповідної "одиниці" в матрицю у відповідне місце. Матриця безпосередніх попередників і наступників вимагає при ідентифікації структури комплексу найменших зусиль. Структура комплексу може бути описана також і матрицею попередників та наступників. Але обчислювальні затрати при формуванні такої матриці є більші (матриця містить значно більше "одиниць") ніж у випадку матриці безпосередніх попередників і наступників.

Приклад. Розглянемо структуру комплексу *N* операцій, які повинні бути виконані послідовно від z_1 до z_N.

В матриці безпосередніх попередників і наступників є лише $N-1$ одиниць для $g_{n,n+1} = 1$, $n = 1,...,N-1$. Матриця ж попередників і наступників містить $(N-1)\times(N-1)/2$ одиниць для $g_{m,n} = 1$, $m = 1,...,N-1$ та $m < n$. Тобто в матриці попередників і наступників є в $(N-1)/2$ разів більше одиниць ніж в матриці безпосередніх попередників і наступників.

Ідентифікація структури комплексу операцій є складною процедурою, незважаючи на те, що полягає вона лише на вписуванні одиниць у відповідні місця матриці *G*.

Припустимо, що час роботи чергових робочих змін може бути різний. Представляємо це з допомогою вектора $C = [c_k],\ k = 1,...,K$, де c_k – час роботи *k*-ї робочої зміни, *K* – максимальна кількість робочих змін. Комплекс операцій повинен бути виконаний протягом мінімальної кількості робочих змін, яка не може перевищити *K*. Розв'язок залежить від часу виконання кожної операції. На практиці розрізняється нормативний і пришвидшений часи виконання операції. Пришвидшений час пов'язаний із більшими фінансовими затратами на виконання кожної операції.

Формулювання проблеми оптимізації. Припустимо, що всі операції із множини *Z* повинні бути виконані протягом мінімальної кількості робочих змін. Позначимо як $Z_1,...,Z_k,...,Z_K$ підмножини операцій, визначені для виконання на чергових робочих змінах. Послідовність цих підмножин становить допустимий розв'язок задачі.

Допустимий розв'язок повинен задовольняти такі умови:

- усі операції повинні бути виконані

$$Z = \cup Z_k,\ k = 1,...,K;$$

- кожна операція повинна задаватися тільки один раз

$$Z_k \cap Z_1 = 0\,,\ k \neq 1;$$

- задання операції повинно задовольняти обмеження черговості (якщо операція z_m, яка є безпосереднім попередником операції z_n, є вписана до групи Z_k, то операція z_n може бути присвоєна лише набору Z_1, де $k \leq 1$);
- задання операції повинно задовольняти часове обмеження

$$\sum_n t_n \leq c_k\,,\ k = 1,...,K\,, \tag{1}$$

при цьому

$$z_n \in Z_k\,.$$

Серед множини допустимих розв'язків потрібно знайти оптимальний розв'язок. За критерій оптимальності візьмемо зведення до мінімуму невикористаного часу при реалізації комплексу технологічних операцій.

Позначимо через q_k невикористаний час роботи на *k*-й робочій зміні

$$q_k = c_k - \sum_n t_n\ ,\quad \text{при}\ z_n \in Z_k\,. \tag{2}$$

При цьому цільова функція має вигляд

$$Q = \sum_k q_k \Rightarrow \min\ . \tag{3}$$

Аналізуючи критерій (3), отримуємо:

$$Q = \sum_k q_k\ . \tag{4}$$

Підставляючи (2) у (4), отримуємо

$$Q = \sum_k \left(c_k - \sum_n t_n \right),$$

звідки після перетворень приходимо до

$$Q = \sum_k c_k - \sum_k \sum_n t_n\ ,\quad \text{при}\ k = 1,...,K\,. \tag{5}$$

З (5) випливає, що зведення до мінімуму невикористаного часу роботи полягає на мінімізації кількості *K* робочих змін для виконання всіх операцій комплексу.

Алгоритм оптимізації. Для вирішення сформульованої задачі представимо багатоетапний алгоритм. В цьому алгоритмі необхідно описати:

- оптимізаційний ітераційний процес та стан комплексу на кожній ітерації;
- кількісну оцінку стану;
- процедуру генерування станів;
- правила вилучення неефективних станів.

Стан виконання операцій комплексу після *e*-ї ітерації описуємо вектором

$$X^e = \left\lfloor x_i^e \right\rfloor, \qquad i = 1,...,N\,,$$

елементи якого представляємо у вигляді:

$$x_i^e = \begin{cases} k, & \text{якщо i - та операція є визначена для k - ї робочої зміни,} \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Початковий стан X^0 описується вектором з нульовими компонентами. Кінцевий стан X^N описується вектором, елементами якого є цілі числа: $1,...,k,...,K$. З кінцевого стану X^N можна одразу визначити підмножини

$$Z_1,...,Z_k,...,Z_K.$$

Якщо $x_i^N = k$, то $z_i \in Z_k$. Стан комплексу X^e опишемо кількісно з допомогою вектора

$$V^e = \left\lfloor v_j^e \right\rfloor, \qquad j = 1,2,$$

елементами якого є величини

$$v_1^e = \max_{1 \le i \ge N} x_i^e.$$

При цьому стан комплексу визначає кількість використаних робочих змін. Припустимо, що $x_m^e = k$ і $v_1^e = k$. Для таких операцій z_m отримуємо

$$v_2^e = \sum_m t_m.$$

Отже, друга компонента вектора значень стану є сумою часів всіх операцій, приписаних до k-ї робочої зміни. Це значення задовольняє умову

$$0 \le v_2^e \le c_k.$$

Процедура генерування станів повинна передбачати додаткову умову, при виконанні якої можна згенерувати наступний стан, а також спосіб перетворення стану X^{e-1} в новий стан X^e.

Новий стан можна згенерувати, якщо приписати до реалізації операцію z_n, причому ця операція повинна виконувати наступні умови:

- до поточного моменту операція не була приписана до виконання, тобто
$$x_m^{e-1} = 0; \tag{6}$$
- усі безпосередні попередники z_m цієї операції вже були приписані до виконання, тобто
$$\left(g_{m,n} = 1\right) => \left(x_m^e > 0\right). \tag{7}$$

З умови (6) випливає, що кожна операція приписується до виконання лише один раз. Умова (7) забезпечує виконання умов черговості.

Після генерування N станів всі операції можна вважати визначеними. При цьому спосіб трансформації станів автоматично задовольнятиме виконання умови часових обмежень (1).

Перетворення станів полягає у визначенні всіх компонент нового стану X^e на основі відомих значень стану X^{e-1}. Функція трансформації станів має вигляд

$$x_i^e = \begin{cases} x_i^{e-1}, & \text{якщо } i \ne n, \\ s, & \text{якщо i = n,} \end{cases}$$

причому

$$s = \begin{cases} v_1^{e-1}, & \text{якщо } v_2^{e-1} + t_n \le c_k, \\ v_1^{e-1} + 1, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Під час генерування нових станів рекурентно обчислюємо

$$v_2^e = \begin{cases} v_2^{e-1} + t_n, & \text{якщо } v_2^{e-1} + t_n \le c_k, \\ t_n, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Така процедура генерування станів дозволяє отримати траєкторію $X^1,...,X^e,...,X^N$. Із кінцевого стану цієї траєкторії отримуємо допустимі розв’язки задачі реалізації комплексу технологічних операцій.

Щоб визначити оптимальний розв’язок, необхідно із отриманої множини насамперед вилучити всі кінцеві стани, які є неможливими щодо практичної реалізації. Спосіб формування траєкторії станів може бути різним (траєкторіями, етапами, мішаним способом і т.д.) – подібно, як у методі поділу та обмежень.

Оптимальний розв’язок можна також отримати, не генеруючи всі кінцеві стани, а використовуючи правила вилучення станів. В такій процедурі вилучаються неперспективні стани X^1, які не ведуть до оптимального кінцевого стану.

При цьому сформулюємо таке правило домінування станів – стан X^1 є неперспективним, якщо попередній стан X^e задовольняє умову

$$\left(x_i^e \ge x_i^1\right) \wedge \left(v_j^e \le v_j^1\right), \quad i = 1,...,N, \quad j = 1,2.$$

Використовуємо також таке правило “зондування” станів – якщо отримано кінцевий стан, в якому сума часу використаних всіх робочих змін становить *C*, тоді стан X^1 є неперспективним, коли виконується умова

$$\sum_k c_k + v_2^1 + \sum_n t_n \ge C,$$

причому $k = 1,...,v_1^1 - 1$, а також $x_n^1 = 0$.

Виконання процедури вилучення неперспективних станів вимагає певних обчислювальних затрат. При цьому ефективними щодо практичного використання є правила, які мають короткий час тестування і високу ймовірність вилучення неперспективного стану. Якщо стан X^1 вилучено із загальної множини допустимих станів, тоді, відповідно, не генеруються траєкторії, які з нього виходять. Це суттєво зменшує час знаходження оптимального розв’язку.

Описаний алгоритм генерує траєкторії, які містять *N* станів, тобто алгоритм працює до моменту віднесення всіх операцій до конкретних змін. Якщо комплекс операцій змінюється при кожній робочій зміні, то можна присвоювати операції тільки найближчій робочій зміні так, щоб максимально використати час c_1. В такому випадку генеруються допустимі стани для $s = 1$. При цьому оптимальний стан максимізує v_2^e.

Представлена модель виконання комплексу зосереджених операцій має широке застосування на практиці для ремонтних, складальних та монтажних виробництв. З теоретичної точки зору ця модель є певним узагальненням так званої “проблеми рюкзаку” – у випадку, коли операції відносяться тільки до однієї робочої зміни. Узагальнення випливає з виконання умови почерговості. У випадку, коли до певних змін приділяються всі операції, можна говорити про узагальнення проблеми балансування монтажної лінії (різні цикли на чергових зупинках) або узагальнення проблеми пакування (обмеження черговості).

Problem of mathematical modelling and optimization of a complex of repair and assembly operations executed during the successive technological shifts, has been reviewed. The special role of a structure of this complex has been took into consideration. The optimization of a complex of operations consists in such distribution of separate operations between technological shifts, which provides the shortest time for full manufacturing process.

Література

1. Kowalowski H. i inni. Automatyzacja dyskretnych procesów przemysłowych.- Warszawa: WNT, 1984.- 312 s.
2. Frąckiewicz Z, Marecki F., Szymanek R. Problem zarządzania obsługą statków w porcie / Konf. „Inteligentne systemy wspomagania decyzji w zarządzaniu”.- Katowice: Akademia ekonomiczna, 1995.- S. 223-230.
3. Marecki F. Modelling of tree-structure production system / Intern. Conf. „Computer Integrated Manufacturing”.- Gliwice: Silesian Technical University, 1996.- V. III.- P. 307-312.
4. Rasztabiga D., Marecki F., Zięba J. Problem zarządzania walcownią / Konf. „Inteligentne systemy wspomagania decyzji w zarządzaniu.- Katowice: Akademia ekonomiczna, 1995.- S. 215-222.

Одержано 11.04.2002 р.