УДК 539.3

Б.Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КРУГОВОГО ШТАМПА З ШАРОМ ІЗ ЗАЛИШКОВИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ, ЩО ЗУМОВЛЕНІ ЗОСЕРЕДЖЕНИМ НАГРІВОМ

Отримано співвідношення для визначення контактних напружень у шарі із залишковими деформаціями, що обумовлені зосередженим нагрівом при зварюванні. У випадку, коли в шар втискується абсолютно гладкий жорсткий штамп, проведено числовий аналіз задачі. Показано, що наявність у шарі залишкових деформацій суттєво впливає на величину і характер розподілу напружень контактної взаємодії.

Визначення міцності елементів конструкцій при їх контактній взаємодії знаходить широке застосування в машинобудуванні, приладобудуванні та інших галузях промисловості. Вплив температурних полів на характер контактної взаємодії досліджувалось в багатьох працях, зокрема в [1]. Для зварних конструкцій актуальними є дослідження впливу залишкових зварювальних напружень на величину і характер розподілу напружень контактної взаємодії їх елементів з твердими жорсткими або пружними масивними тілами (штампами, бандажами).

Розглянемо плоский ізотропний шар завтовшки h, який віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z і лежить на гладкій жорсткій основі. Нехай в цей шар втискується поступально (без повороту) штамп силою P (рис. 1). Гладкість означає, що на поверхні контакту дотичні напруження дорівнюють нулю: відсутність повороту свідчить, що зусилля, які прикладені до штампа, зводяться до рівнодійної, спрямованої вздовж осі штампа. В області контакту штамп обмежений поверхнею обертання, яка складається з двох частин: плоскої поверхні для $0 \le r \le R_1$, та параболоїда з вершиною в точці $r = R_1$.

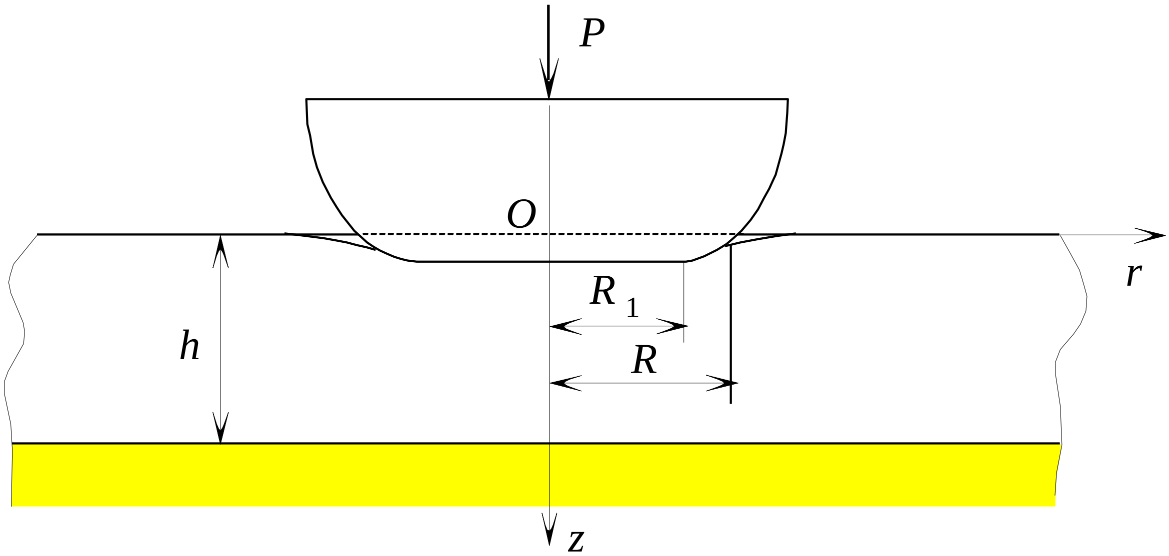

Рис. 1. Схема контактної взаємодії пластини з жорстким штампом.

В циліндричній системі координат з початком на верхній площині шару на осі симетрії штампа функцію, яка описує форму основи штампа, можна записати так:

$$W(r) = W(0) - \frac{(R_1 - r)^2}{2R_0} U(r - R_1), \tag{1}$$

де

$$U(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

R_0 – радіус кривини параболоїда.

Якщо жорстка основа, на якій лежить шар, є абсолютно гладкою, то крайові умови задачі запишуться так:

при $z = 0$:

$$\begin{aligned} &u_z = W(r) \quad (0 \le r \le R), \qquad \sigma_{zz} = 0 \ (R \le r \le \infty), \\ &\sigma_{rz} = 0 \qquad (0 \le r \le \infty), \end{aligned} \tag{2}$$

при $z = h$:

$$\sigma_{rz} = 0, \qquad u_z = 0 \qquad (0 \le r \le \infty). \tag{3}$$

На верхній поверхні шару відбувся зосереджений нагрів при зварюванні і в шарі виникло поле залишкових деформацій, яке на основі експериментальних даних можна описати виразами:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^0_{rr} = -\varepsilon_0 (1 - \omega p^2 r^2) exp(-p^2 r^2) f(z), \\ &\varepsilon^0_{\theta\theta} = -\varepsilon_0 (1 + \omega p^2 r^2) exp(-p^2 r^2) f(z), \\ &\varepsilon^0_{zz} = -(\varepsilon^0_{rr} + \varepsilon^0_{\theta\theta}), \quad \varepsilon^0_{r\theta} = \varepsilon^0_{rz} = \varepsilon^0_{z\theta}, \\ &f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{N_1} C_n \cos \frac{\pi n z}{h}. \end{aligned} \tag{4}$$

Диференціальні рівняння рівноваги тіла із залишковими деформаціями в осесиметричному випадку записуються у вигляді:

$$\mu \nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r^2} + 2\mu \left[\frac{\partial \varepsilon^0_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\varepsilon^0_{rr} - \varepsilon^0_{\varphi\varphi} \right) \right] = 0,$$

$$\mu\nabla^2 u_z + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} - 2\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_{rr}^0 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^0\right) = 0. \qquad (5)$$

Частинний розв'язок рівнянь рівноваги будується за допомогою двох ключових функцій φ та ψ які задовольняють рівняння Пуасона [2]

$$\nabla^2\varphi = F(r,z),\ \nabla^2\psi = F(r,z) - 2\left(\omega^0(r,z) - \varepsilon_{zz}^0\right), \qquad (6)$$

$$\omega^0(r,z) = \varepsilon_{rr}^0 + \int\frac{1}{r}(\varepsilon_{rr}^0 - \varepsilon_{\theta\theta}^0)dr, \qquad (7)$$

а функція $F(r,z)$ задовольняє рівняння

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2 F = 2\mu\nabla^2\omega^0 + 2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\omega^0 - \varepsilon_{zz}^0). \qquad (8)$$

Розв'язавши рівняння (6), (8) знайдемо функції F, φ, ψ:

$$F(r,z) = -m_1(1+\omega-\omega p^2r^2)exp(-p^2r^2)\cdot f(z) -$$
$$-\frac{m_2\pi^2}{2p^2}\sum_{n=1}^{N_1} n^2C_n\cos\frac{\pi n z}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right)\cdot J_0(\alpha r)d\alpha, \qquad (9)$$

$$\varphi(r,z) = \frac{m_1}{2p^2}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right)J_0(\alpha r)d\alpha +$$
$$+\frac{h^2}{2p^2}\sum_{n=1}^{N_1}C_n\cos\frac{\pi n z}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left[m_1\left(1+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)+\right. \qquad (10)$$
$$\left.+\frac{m_2\pi^2n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)\right]exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right)J_0(\alpha r)d\alpha,$$

$$\psi(r,z) = \varphi(r,z) + \psi_1(r,z),$$
$$\psi_1(r,z) = -\frac{1}{p^2}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right)\cdot J_0(\alpha r)d\alpha - \qquad (11)$$
$$-\frac{h^2}{p^2}\sum_{n=1}^{N_1}C_n\cos\frac{\pi n z}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right)\cdot J_0(\alpha r)d\alpha.$$

Компоненти напруженого стану $\bar{\sigma}_{ij}$, що відповідають частинному розв'язку рівнянь рівноваги визначаються за формулами:

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{G\varepsilon_0} = m_2\left\{\left[2(\nu-2-\nu\omega+\omega\nu p^2r^2)\right]exp(-p^2r^2)\cdot f(z) +\right.$$
$$+\frac{\pi^2}{p^2}\sum_{n=1}^{N_1}n^2C_n\cos\frac{\pi n z}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left[\nu\Phi_2(\alpha)+5-4\nu+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\pi^2n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\Phi_2(\alpha)\right]\cdot exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right)\cdot J_0(\alpha r)d\alpha\right\};$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rz}}{G\varepsilon_0} = \frac{m_2h\pi}{p^2}\sum_{n=1}^{\infty}nC_n\sin\frac{\pi n z}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left[\nu-2-\nu\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}+\right. \qquad (12)$$
$$\left.+\frac{\pi^2n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\Phi_2(\alpha)\right]\cdot exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right)\cdot J_1(\alpha r)d\alpha;$$

$$\Phi_1(\alpha)=1+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2},\quad \Phi_2(\alpha)=3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2},\quad m_1=\frac{1-2\nu}{1-\nu},\quad m_2=\frac{1}{1-\nu}.$$

Формули для визначення напружень у шарі запишемо так:

$$\sigma_{ij}=\overline{\sigma}_{ij}+\overline{\overline{\sigma}}_{ij}, \tag{13}$$

де складові $\overline{\overline{\sigma}}_{ij}$ виражаються функцією Лява L, яку у випадку осьової симетрії зручно представити через інтеграл Ганкеля

$$L=\int_0^\infty \alpha^{-2}\{A(\alpha)sh\alpha z+B(\alpha)ch\alpha z+\alpha z[C(\alpha)sh\alpha z+D(\alpha)ch\alpha z]J_0(\alpha z)\}d\alpha. \tag{14}$$

Задовольняючи крайові умови (2), (3), отримаємо систему рівнянь для визначення функцій $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha), D(\alpha)$. Цю систему рівнянь можна звести до інтегральних рівнянь для визначення функції $C(\alpha)$:

$$\int_0^\infty C(\alpha)J_0(\alpha r)\,d\alpha=\frac{m_1}{2}W(r),\qquad r\le a, \tag{15}$$

$$\int_0^\infty \alpha\left[-\frac{2G}{1-2\nu}\frac{C(\alpha)}{\Delta(\alpha)}+2G\varepsilon_0^*\left(f_1(\alpha)+f_2(\alpha)\right)\right]J_0(\alpha r)d\alpha=0,\quad r>R \tag{16}$$

і співвідношень для визначення функцій $A(\alpha), B(\alpha), D(\alpha)$ через $C(\alpha)$:

$$A(\alpha)=\frac{\alpha h+\nu sh2\alpha h}{sh^2\alpha h}C(\alpha),\qquad B(\alpha)=-2\nu C(\alpha),$$

$$D(\alpha)=-cth\alpha hC(\alpha),\qquad \Delta(\alpha)=\frac{sh^2\alpha h}{sh\alpha h+\alpha h},$$

тут

$$f_1(\alpha)=\frac{\varepsilon_0^* m_2}{2}\left(\frac{\nu-2}{p^2}-\frac{\nu\omega\alpha^2}{4p^4}\right)exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^4}\right), \tag{17}$$

$$f_2(\alpha)=\frac{m_2}{2}\pi^2k_2\sum_{n=1}^{N_1}C_n\left\{\frac{1}{\alpha^2+\pi^2}\left[\left(\nu-\frac{\pi^2}{\alpha^2+\pi^2}\right)\Phi_2(\alpha)+5-4\nu+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right]\right\}.$$

Якщо в системі рівнянь (15), (16) перейти до безрозмірних змінних:

$$\rho=\frac{r}{R},\quad \alpha=\frac{\beta}{R},\quad \alpha h=k_2\beta,\quad k_2=\frac{h}{R},\quad x=\frac{R_1}{R},$$

та відняти від лівої і правої частин рівняння (15) величину $W(0)$, то отримаємо:

$$\int_0^\infty C(\beta)[J_0(\beta\rho)-1]d\beta=\frac{m_1R}{2}W^*(\rho),\qquad 0\le\rho\le1; \tag{18}$$

$$\frac{1}{R^2}\int_0^\infty \beta\left[-\frac{2G}{1-2\nu}\frac{C(\beta)}{\Delta(\beta)}+\frac{G\varepsilon_0^*}{p^2}\left(f_1^0(\beta)+f_2^0(\beta)\right)\right]J_0(\beta\rho)d\beta=0,\quad \rho>1. \tag{19}$$

де

$$W^*(\rho) = -\frac{R^2}{2R_0}(\rho - x)^2 U(\rho - x), \qquad \Delta(\beta) = \frac{sh^2 k_2\beta}{sh k_2\beta\, ch k_2\beta + k_2\beta},$$

$$f_1^0(\beta) = m_2\left(\nu - 2 + \frac{\nu\omega\rho^2}{4S_1}\right)exp\left(-\frac{\beta^2}{4S_1}\right), \qquad S = p^2 R^2, \tag{20}$$

$$f_2^0(\beta) = m_2\pi^2 k_2 \sum_{n=1}^{N_1} C_n \left\{\frac{1}{k_2^2\beta^2 + \pi^2}\left[\left(\nu - \frac{\pi^2}{k_2^2\beta^2 + \pi^2}\right)\Phi_2(\beta) + 5 - 4\nu + \frac{\omega\beta^2}{4S_1}\right]\right\} exp\left(-\frac{\beta^2}{4S_1}\right).$$

Запишемо рівняння (19) у вигляді:

$$\frac{1}{R^2}\int_0^\infty \beta\left[-\frac{2G}{1-2\nu}\frac{C(\beta)}{\Delta(\beta)} + \frac{G\varepsilon_0^*}{p^2}\left(f_1^0(\beta) + f_2^0(\beta)\right)\right]J_0(\beta\rho)d\beta = U(1-\rho)X(\rho),$$

$$0 \le \rho < \infty, \tag{21}$$

де $X(\rho)$ – невідома функція, яка при $0 \le \rho < 1$ дорівнює $\sigma_{zz}(\rho,0)$, тобто визначає шукані контактні напруження під штампом.

Зобразимо функцію $X(\rho)$ як відрізок ряду за функціями Бесселя:

$$X(\rho) = \sum_{n=1}^{N} a_n J_0(\lambda_n \rho), \tag{22}$$

де λ_n – додатні корені рівняння $J_0(x) = 0$.

Підставимо вираз (22) в рівняння (21) і застосуємо теорему обернення інтегрального перетворення Ганкеля:

$$\int_0^\infty \rho\left\{\int_0^\infty \beta\left[-\frac{2G}{1-2\nu}\frac{C(\beta)}{\Delta(\beta)} + \frac{G\varepsilon_0^*}{p^2}\left(f_1^0(\beta) + f_2^0(\beta)\right)\right]J_0(\beta\rho)d\beta\right\}J_0(\beta\rho)d\rho =$$

$$= R^2\int_0^\infty U(1-\rho)\rho J_0(\beta\rho)\sum_{n=1}^{N} a_n J_0(\lambda_n\rho)d\rho. \tag{23}$$

Обчислюючи інтеграли в співвідношенні (23) отримаємо вираз функції $C(\beta)$ через коефіцієнти a_n:

$$C(\beta) = \frac{R^2(1-2\nu)}{2G}\Delta(\beta)\left\{-\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{\lambda_n J_1(\lambda_n)J_0(\beta)}{\lambda_n^2 - \beta^2} + \frac{G\varepsilon_0^*}{S_1}\left(f_1^0(\beta) + f_2^0(\beta)\right)\right\}. \tag{24}$$

Після підстановки (24) в рівняння (18) і використання принципу суперпозиції при розв'язанні алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$ отримаємо рівняння:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^{(i)}\lambda_n J_1(\lambda_n)\int_0^\infty \frac{\Delta(\beta)J_0(\beta)}{\lambda_n^2 - \beta^2}\left[J_0(\beta\rho) - 1\right]d\beta = F_i(\rho),\ 0 \le \rho \le 1, i = 1,2, \tag{25}$$

де

$$F_1(\rho) = \frac{GR}{2(1-\nu)R_0}(\rho - x)^2 U(\rho - x),$$

$$F_2(\rho)=\frac{G\varepsilon_0^*}{S_1}\int_0^\infty \Delta(\beta)\left(f_1^0(\beta)+f_2^0(\beta)\right)\left[J_0(\beta\rho)-1\right]d\beta . \tag{26}$$

Введемо тепер безрозмірні коефіцієнти $x_n^{(1)}$ та $x_n^{(2)}$

$$a_n^{(1)}=\frac{GR}{(1-\nu)R_0}x_n^{(1)}, \qquad a_n^{(2)}=G\varepsilon_0^* x_n^{(2)} . \tag{27}$$

Тоді формули для контактних напружень через безрозмірні коефіцієнти можна записати так:

$$\sigma_{zz}(\rho,0)=\frac{GR}{(1-\nu)R_0}\sum_{n=1}^{N}x_n^{(1)}J_0(\lambda_n\rho)+G\varepsilon_0^*\sum_{n=1}^{N}x_n^{(2)}J_0(\lambda_n\rho) . \tag{28}$$

Рівняння (25) запишеться у вигляді

$$\sum_{n=1}^{N}x_n^{(i)}\lambda_n J_1(\lambda_n)\int_0^\infty \frac{\Delta(\beta)J_0(\beta)}{\lambda_n^2-\beta^2}\left[J_0(\beta\rho)-1\right]d\beta=F_i^*(\rho),\ 0\le\rho\le 1, \tag{29}$$

де позначено

$$F_1^*(\rho)=\frac{1}{2}(\rho-x)^2U(\rho-x),$$

$$F_2^*(\rho)=\frac{1}{S_1}\int_0^\infty \Delta(\beta)\left(f_1^0(\beta)+f_2^0(\beta)\right)\left[J_0(\beta\rho)-1\right]d\beta . \tag{30}$$

При проведенні обчислень для визначення коефіцієнтів $x_n^{(i)}$ вимагаємо виконання умов (25) в N точках інтервалу $0<\rho\le 1$. Якщо $N=20$, то беремо $\rho_n=0.05n,\ n=\overline{1,20}$.

В результаті одержимо дві системи 20 рівнянь з 20 невідомими. Ці системи відрізняються вільними членами.

Використаємо умову рівноваги штампа

$$P=-2\pi R^2\int_0^1 \rho\sigma_{zz}(\rho,0)d\rho=-2\pi R^2\left[\frac{GR}{(1-\nu)R_0}\theta_1+G\varepsilon_0^*\theta_2\right],$$

$$\theta_k=\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n^{(k)}}{\lambda_n}J_1(\lambda_n), \quad k=1,2 .$$

Звідси знаходимо

$$\frac{GR}{(1-\nu)R_0}=-\frac{1}{\theta_1}\left(\frac{P}{2\pi R^2}+G\varepsilon_0^*\theta_2\right).$$

Формулу для контактних напружень запишемо так:

$$\sigma_{zz}(\rho,0)=\frac{P}{2\pi R^2}\sigma_{zz}^P+G\varepsilon_0^*\sigma_{zz}^* . \tag{31}$$

Тут $\sigma_{zz}^{P} = -\frac{1}{\theta_1}\sum_{n=1}^{N} x_n^{(1)} J_0(\lambda_n \rho)$ – силова частина контактних напружень;

$\sigma_{zz}^{*} = \sum_{n=1}^{N}\left[x_n^{(2)} - \frac{\theta_2}{\theta_1} x_n^{(1)}\right] J_0(\lambda_n \rho)$ – контактні напруження, які обумовлені залишковими напруженнями.

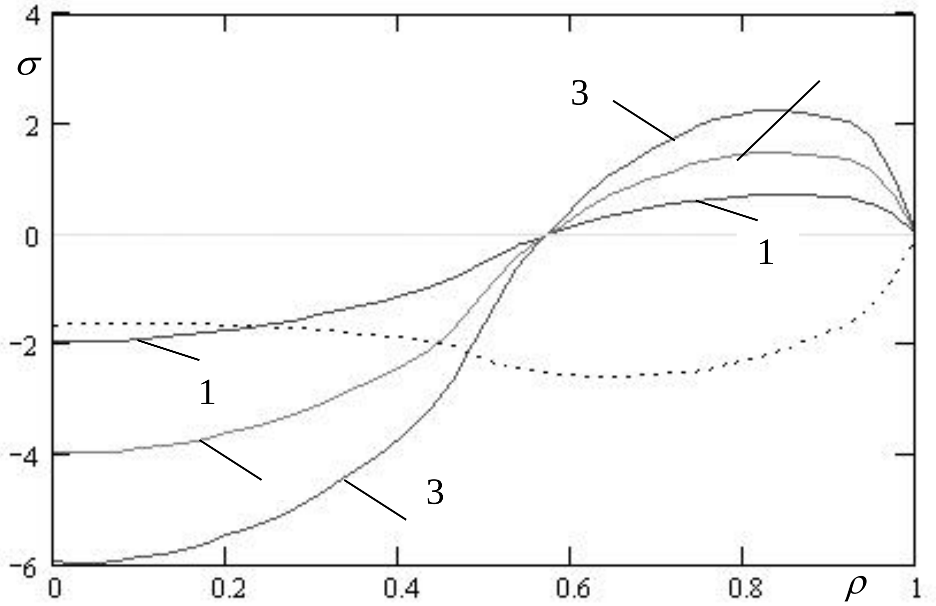

Рис.2 Розподіл складових контактних напружень.

Числовий аналіз виконано для $\nu = 0{,}3$ і визначених експериментально [3] параметрів поля пластичних деформацій $\varepsilon_0^* = 1.2\%$, $\omega = 2/3$, $p^2 = 0.4$. На рисунку 2 подано результати розподілу безрозмірних складових σ_{zz}^{P} і σ_{zz}^{*} вздовж радіальної координати ρ. Штрихпунктирною лінією зображено графік зміни напружень σ_{zz}^{P}, а кривими 1, 2, 3 - σ_{zz}^{*} для значень параметрів $k_2 = 2$, $S_1 = 1$, $x = 0.5$. Крива 1 для значення $C_1 = 0$; 2 - $C_1 = 0.5$; 3 - $C_1 = 1$; $C_n = 0$ при $n \geq 2$.

З наведених результатів видно, що в розглянутому випадку складова контактних напружень σ_{zz}^{*} змінює знак і в першій зоні під штампом збільшує сумарні контактні напруження, а в другій – зменшує. Змінність залишкових деформацій по товщині шару впливає на розподіл контактних напружень.

The ratio for determining the contact stress in the layer with residual deformations, caused by locating heating under welding, is obtained. For the case when absolutely smooth, rigid punch is inserted into the layer, the numerical analysis of the task is made. It is shown that the presence of residual deformation in the layer influences on the value and character of the contact interaction stress distribution.

Література

1. Грилицький Д.В., Кизыма Я.И. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости.-Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 135с.
2. Шелестовський Б.Г., Пиндус Ю.І. Розв'язок диференціальних рівнянь рівноваги тіла з власними (залишковими) деформмаціями // Вісник ТДТУ ім. Івана Пулюя , 1999. – Т.4. – С.15-21.
3. Недосека А.Я. Основы расчета сварных конструкций. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 263с.

Одержано 02.07.2002 р.