УДК 517.443

М.Ленюк, докт. фіз.-мат.наук; К.Лакуста, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ГАНКЕЛЯ 1-ГО РОДУ – (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) 2-ГО РОДУ - ЛЕЖАНДРА

Методом порівняння розв'язків, побудованих на полярній вісі з двома точками спряження для сепаратної системи з двох диференціальних рівнянь Бесселя (з різним характером виродження в коефіцієнтах) та одного диференціального рівняння Лежандра методом функцій Коші і методом гібридного інтегрального перетворення типу Ганкеля 1-го роду – (Конторовича-Лєбєдєва) 2-го роду – Лежандра обчислено сім'ю поліпараметричних невласних інтегралів.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1)\bigcup(R_1, R_2) \bigcup(R_2, \infty)\}$ розв'язку сепаратної системи лінійних неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку Бесселя й Лежандра для модифікованих функцій

$$\left(B_{\nu_1,\alpha_1} - q_1^2\right)u_1(r) = -f_1(r),\ r \in (0, R_1),$$
$$\left(B_{\alpha_2} - q_2^2\right)u_2(r) = -f_2(r),\ r \in (R_1, R_2),$$
$$\left(\Lambda_\mu - q_3^2\right)u_3(r) = -f_3(r),\ r \in (R_2, \infty) \tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k d/dr + \beta_{j1}^k\right)u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k d/dr + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]_{r=R_k} = 0,\ j, k = 1, 2. \tag{2}$$

Тут $\alpha_{jk}^m \ge 0$, $\beta_{jk}^m \ge 0$, $q_n \ge 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $c_{1k}c_{2k} > 0$, $B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}$, $\nu \ge \alpha \ge -½$; $B_\alpha = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2$; $2\alpha + 1 \ge 0$, $\lambda \in (0, \infty)$; $\Lambda_\mu = d^2/dr^2 + \mathrm{cth}r\, d/dr + 1/4 - \frac{\mu^2}{\mathrm{sh}^2 r}$, $\mu \ge 0$; $j = 1, 2$; $m = 1, 2$; $k = 1, 2$; $n = 1, 2, 3$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha} - q^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{\nu,\alpha}(qr) = (qr)^{-\alpha}I_\nu(qr)$ і другого $K_{\nu,\alpha}(qr) = (qr)^{-\alpha}K_\nu(qr)$ [1]. Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_\alpha - q^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q,\alpha}(\lambda r)$ і $K_{q,\alpha}(\lambda r)$, а для рівняння Лежандра $(\Lambda_\mu - q^2)v = 0$ – приєднані модифіковані функції Лежандра 1-го роду $P_{-1/2+q}^\mu(\mathrm{ch}r)$ і 2-го роду $L_{-1/2+q}^\mu(\mathrm{ch}r)$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати розв'язок крайової задачі (1), (2) методом функцій Коші [3, 4]:

$$u_1(r) = A_1 I_{\nu_1,\alpha_1}(\lambda r) + \int_0^{R_1} E_1(r,\rho) f_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho,$$
$$u_2(r) = A_2 I_{q_2,\alpha_2}(\lambda r) + B_2 K_{q_2,\alpha_2}(\lambda r) + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) f_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$
$$u_3(r) = B_3 L_{-1/2+q_3}^\mu(\mathrm{ch}\, r) + \int_{R_2}^{\infty} E_3(r,\rho) f_3(\rho)\mathrm{sh}\,\rho d\rho. \tag{3}$$

У рівностях (3) $E_j(r, \rho)$ – функції Коші:

$$E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0} = 0,$$
$$\left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0} - \left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0} = -\varphi_j(\rho), \tag{4}$$

$\varphi_j(r) = r^{2\alpha_j+1}$; $j = 1, 2$, $\varphi_3(r) = \mathrm{sh}\, r$.

Визначимо функції:

$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(q_sR_m) = \left(\alpha_{jk}^m\frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta_{jk}^m\right)I_{\nu,\alpha}(q_sR_m) + \alpha_{jk}^m q_s^2 R_m I_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_m),$$
$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(q_sR_m) = \left(\alpha_{jk}^m\frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta_{jk}^m\right)K_{\nu,\alpha}(q_sR_m) - \alpha_{jk}^m q_s^2 R_m K_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_m),$$
$$\Psi_{\nu,\alpha;jk}^{m*}(q_sR_m, q_sr) = U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(q_sR_m)K_{\nu,\alpha}(q_sr) - U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(q_sR_m)I_{\nu,\alpha}(q_sr),$$
$$Z_{-1/2+q;jk}^{\mu,m1}(\mathrm{ch}\, R_m) = \alpha_{jk}^m \mathrm{sh}\, R_m P_{-1/2+q}^{\mu\,'}(\mathrm{ch}\, R_m) + \beta_{jk}^m P_{-1/2+q}^\mu(\mathrm{ch}\, R_m),$$

$$Z^{\mu,m2}_{-1/2+q;jk}(\text{ch}\,R_m)=\alpha^m_{jk}\text{sh}\,R_m L^{\mu\,'}_{-1/2+q}(\text{ch}\,R_m)+\beta^m_{jk}L^{\mu}_{-1/2+q}(\text{ch}\,R_m),$$
$$F^{\mu,m}_{-1/2+q;jk}(\text{ch}\,R_m,\text{ch}\,r)=Z^{\mu,m1}_{-1/2+q;jk}(\text{ch}\,R_m)L^{\mu}_{-1/2+q}(\text{ch}\,r)-Z^{\mu,m2}_{-1/2+q;jk}(\text{ch}\,R_m)P^{\mu}_{-1/2+q}(\text{ch}\,r).$$

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші можна взяти функції

$$E_1(r,\rho)=\frac{q_1^{2\alpha_1}}{U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)}\begin{cases}I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1r)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1\rho), & 0<r<\rho<R_1\\ I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1\rho)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1r), & 0<\rho<r<R_1\end{cases}, \tag{5}$$

$$E_2(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}\begin{cases}\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1,\lambda r)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2,\lambda\rho), & R_1<r<\rho<R_2\\ \Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1,\lambda\rho)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2,\lambda r), & R_1<\rho<r<R_2\end{cases}, \tag{6}$$

$$\Delta_{q_2,\alpha_2;jk}(\lambda R_1,\lambda R_2)=U^{11}_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda R_1)U^{22}_{q_2,\alpha_2;k1}(\lambda R_2)-U^{12}_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda R_1)U^{21}_{q_2,\alpha_2;k1}(\lambda R_2);\ j,k=1,2;$$

$$E_3(r,\rho)=-\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(1/2+q_3-\mu)}{\Gamma(1/2+q_3+\mu)}\frac{1}{Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;12}(\text{ch}\,R_2)}\times$$
$$\times\begin{cases}L^{\mu}_{-1/2+q_3}(\text{ch}\,\rho)F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;12}(\text{ch}\,R_2,\text{ch}\,r), & R_2<r<\rho<\infty\\ L^{\mu}_{-1/2+q_3}(\text{ch}\,r)F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;12}(\text{ch}\,R_2,\text{ch}\,\rho), & R_2<\rho<r<\infty\end{cases}. \tag{7}$$

Умови спряження (2) для визначення величин A_1, A_2, B_2, B_3 дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned}
&U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)A_1-U^{11}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1)A_2-U^{12}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1)B_2=0,\\
&U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1)A_1-U^{11}_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda R_1)A_2-U^{12}_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda R_1)B_2=G_{12},\\
&U^{21}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2)A_2+U^{22}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2)B_2-Z^{\mu,21}_{-1/2+q_3;12}(\text{ch}\,R_2)B_3=0,\\
&U^{21}_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda R_2)A_2+U^{22}_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda R_2)B_2-Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;22}(\text{ch}\,R_2)B_3=G_{23}.
\end{aligned} \tag{8}$$

У системі (8) беруть участь функції

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_0^{R_1}\frac{I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1\rho)}{U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)}f_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}f_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}f_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+\frac{c_{22}}{\text{sh}\,R_2}\int_{R_2}^{\infty}\frac{L^{\mu}_{-1/2+q_3}(\text{ch}\,\rho)}{Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;12}(\text{sh}\,R_2)}f_3(\rho)\text{sh}\,\rho d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв’язності даної крайової задачі: визначник алгебраїчної системи (8)

$$\begin{aligned}
&\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)\equiv U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)A_{\alpha_2,2}(q)-U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1)A_{\alpha_2,1}(q)=\\
&=Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;22}(\text{ch}\,R_2)B_{(\nu,\alpha);1}(q)-Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;12}(\text{ch}\,R_2)B_{(\nu,\alpha);2}(q)\neq 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

Тут прийняті позначення:

$$A_{\alpha_2,j}(q)=Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;22}(\text{ch}\,R_2)\Delta_{q_2,\alpha_2;j1}(\lambda R_1,\lambda R_2)-Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;12}(\text{ch}\,R_2)\Delta_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda R_1,\lambda R_2);$$
$$B_{(\nu,\alpha),j}(q)=U^{11}_{\nu_3,\alpha_1;11}(q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha_2;2j}(\lambda R_1,\lambda R_2)-U^{11}_{\nu_3,\alpha_1;21}(q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha_2;1j}(\lambda R_1,\lambda R_2);$$
$$j=1,2;\ q=(q_1,q_2,q_3),\ (\nu,\alpha)=(\nu_1,\alpha_1;\alpha_2).$$

При виконанні нерівностей (9) алгебраїчна система (8) має єдиний розв’язок, який одержується за правилами Крамера [5]:

$$u_j(r)=\int_0^{R_1}H^{\mu}_{(\nu,\alpha);j1}(r,\rho,q)f_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H^{\mu}_{(\nu,\alpha);j2}(r,\rho,q)f_1(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+$$
$$+\int_{R_2}^{\infty}H^{\mu}_{(\nu,\alpha);j3}(r,\rho,q)f_3(\rho)\text{sh}\,\rho d\rho;\ j=1,2,3. \tag{10}$$

У формулі (10) беруть участь функції впливу:

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);11}(r,\rho,q)=\frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\begin{cases} I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1 r)[A_{\alpha_2;2}(q)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1\rho)- \\ I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1 r\rho)[A_{\alpha_2;2}(q)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1 r)- \end{cases}$$

$$\begin{matrix} -A_{\alpha_2;1}(q)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1,q_1\rho)], \quad 0<r<\rho<R_1 \\ -A_{\alpha_2;1}(q)\Psi^{1*}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1,q_1 r)], \quad 0<\rho<r<R_1 \end{matrix};$$

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1 r)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}[Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;22}(\mathrm{ch}\,R_2)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2,\lambda\rho)-$$

$$-Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;12}(\mathrm{ch}\,R_2)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda R_2,\lambda\rho)];$$

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);13}(r,\rho,q)=-\frac{c_{21}c_{22}}{\lambda^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}\mathrm{sh}\,R_2}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1 r)L^{\mu}_{-1/2+q_3}(\mathrm{ch}\,\rho);$$

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1\rho)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}[Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;22}(\mathrm{ch}\,R_2)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2,\lambda r)-$$

$$-Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;12}(\mathrm{ch}\,R_2)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda R_2,\lambda r)]; \qquad (11)$$

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}\begin{cases}[U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda_1R_1,\lambda r)-U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda_1R_1,\lambda r)]\times \\ [U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda_1R_1,\lambda\rho)-U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda_1R_1,\lambda\rho)]\times\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\times[Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;22}(\mathrm{ch}\,R_2)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2,\lambda\rho)-Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;12}(\mathrm{ch}\,R_2)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda R_2,\lambda\rho)], \quad R_1<r<\rho<R_2 \\ \times[Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;22}(\mathrm{ch}\,R_2)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda R_2,\lambda r)-Z^{\mu,22}_{-1/2+q_3;12}(\mathrm{ch}\,R_2)\Psi^{2*}_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda R_2,\lambda r)], \quad R_1<\rho<r<R_2\end{matrix};$$

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{\mathrm{sh}\,R_2}\frac{L^{\mu}_{-1/2+q_3}(\mathrm{ch}\,\rho)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}[U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1,\lambda r)-$$

$$-U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda R_1,\lambda r)];$$

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);31}(r,\rho,q)=-\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{12}}{\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{I_{\nu_1,\alpha_1}(q_1\rho)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}L^{\mu}_{-1/2+q_3}(\mathrm{ch}\,r);$$

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{L^{\mu}_{-1/2+q_3}(\mathrm{ch}\,r)}{\Delta_{(\nu,\alpha)}(q)}[U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda R_1,\lambda\rho)-$$

$$-U^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda R_1,\lambda\rho)];$$

$$H^{\mu}_{(\nu,\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(1/2+q_3-\mu)}{\Gamma(1/2+q_3+\mu)}\frac{1}{\Delta_{(\nu,\alpha)}q}\begin{cases}L^{\mu}_{-1/2+q_3}(\mathrm{ch}\,\rho)[B_{(\nu,\alpha);2}(q)\times \\ L^{\mu}_{-1/2+q_3}(\mathrm{ch}\,r)[B_{(\nu,\alpha);2}(q)\times\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\times F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;12}(\mathrm{ch}\,R_2,\mathrm{ch}\,r)-B_{(\nu,\alpha);1}(q)F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;22}(\mathrm{ch}\,R_2,\mathrm{ch}\,r)], \quad R_2<r<\rho<\infty \\ \times F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;12}(\mathrm{ch}\,R_2,\mathrm{ch}\,\rho)-B_{(\nu,\alpha);1}(q)F^{\mu,2}_{-1/2+q_3;22}(\mathrm{ch}\,R_2,\mathrm{ch}\,\rho)], \quad R_2<\rho<r<\infty\end{matrix}.$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1), (2) методом гібридного інтегрального перетворення типу Ганкеля 1-го роду – (Конторовича-Лєбєдєва) 2-го роду – Лежандра, породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором

$$\mathrm{M}^{\mu}_{(\nu,\alpha)}=\theta(r)\theta(R_1-r)B_{\nu_1,\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_{\alpha_2}+\theta(r-R_2)\Lambda_{\mu},$$

$\theta(x)$ – одинична функція Хевісайда.

Розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи рівнянь Бесселя і Лежандра для звичайних (не модифікованих) функцій

$$\begin{aligned}&\left(B_{\nu_1,\alpha_1}+b_1^2\right)V_{(\nu,\alpha);1}^{\mu}(r,\beta)=0,\ r\in(0,R_1),\\&\left(B_{\alpha_2}+b_2^2\right)V_{(\nu,\alpha);2}^{\mu}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2),\\&\left(\Lambda_{\mu}+b_3^2\right)V_{(\nu,\alpha);3}^{\mu}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,\infty),\end{aligned}\tag{12}$$

де $b_j^2=\beta^2+\gamma_j^2$, $\gamma_j^2\geq 0$, $j=1,2,3$, за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k d/dr+\beta_{j1}^k\right)V_{(\nu,\alpha);k}^{\mu}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^k d/dr+\beta_{j2}^k\right)V_{(\nu,\alpha);k+1}^{\mu}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k}=0,\ j,k=1,2.\tag{13}$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha}+b^2)v=0$ утворюють функції Бесселя $J_{\nu,\alpha}(br)$ та $N_{\nu,\alpha}(br)$ [1]. Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_\alpha+b^2)v=0$ утворюють функції $C_\alpha(\lambda r, b)$ та $D_\alpha(\lambda r, b)$ [6]. Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $(\Lambda_\mu+b^2)v=0$ утворюють приєднані функції Лежандра $A_{-1/2+ib}^{\mu}(\mathrm{ch}r)$ і $B_{-1/2+ib}^{\mu}(\mathrm{ch}r)$ [2].

Обмежений на множині I_2^+ розв'язок крайової задачі (1), (2) відшукуємо за правилами [3]:

$$\begin{aligned}V_{(\nu,\alpha);1}^{\mu}(r,\beta)&=A_1J_{\nu_1,\alpha_1}(b_1r),\\V_{(\nu,\alpha);2}^{\mu}(r,\beta)&=A_2C_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)+B_2D_{\alpha_2}(\lambda r,b_2),\\V_{(\nu,\alpha);3}^{\mu}(r,\beta)&=A_3A_{-1/2+ib_3}^{\mu}(\mathrm{ch}\,r)+B_3B_{-1/2+ib_3}^{\mu}(\mathrm{ch}\,r).\end{aligned}$$

Визначимо функції:

$$U_{\nu_1,\alpha_1;j1}^{11}(b_1R_1)=\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)J_{\nu_1,\alpha_1}(b_1r)\Big|_{r=R_m}\equiv,$$

$$\equiv\left(\alpha_{j1}^1\frac{\nu_1-\alpha_1}{R_1}+\beta_{j1}^1\right)J_{\nu_1,\alpha_1}(b_1R_1)-\alpha_{j1}^1b_1^2R_1J_{\nu_1+1,\alpha_1+1}(b_1R_1),$$

$$X_{\alpha_2;jk}^{m1}(\lambda R_m,b_2)=\left(\alpha_{jk}^m\frac{d}{dr}+\beta_{jk}^m\right)C_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)\Big|_{r=R_m},$$

$$X_{\alpha_2;jk}^{m2}(\lambda R_m,b_2)=\left(\alpha_{jk}^m\frac{d}{dr}+\beta_{jk}^m\right)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_2)\Big|_{r=R_m},$$

$$Y_{-1/2+ib_3;jk}^{\mu,m1}(\mathrm{ch}\,R_m)=\alpha_{jk}^m\mathrm{sh}\,R_mA_{-1/2+ib_3}^{\mu\,'}(\mathrm{ch}\,R_m)+\beta_{jk}^m\mathrm{A}_{-1/2+ib_3}^{\mu}(\mathrm{ch}\,R_m),$$

$$Y_{-1/2+ib_3;jk}^{\mu,m2}(\mathrm{ch}\,R_m)=\alpha_{jk}^m\mathrm{sh}\,R_mB_{-1/2+ib_3}^{\mu\,'}(\mathrm{ch}\,R_m)+\beta_{jk}^mB_{-1/2+ib_3}^{\mu}(\mathrm{ch}\,R_m).$$

Умови спряження (13) для визначення п'яти величин A_j ($j=\overline{1,3}$) і B_k ($k=2,3$) дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned}&X_{\alpha_2;j2}^{11}(\lambda R_1,b_2)A_2+X_{\alpha_2;j2}^{12}(\lambda R_1,b_2)B_2=A_1U_{\nu_1,\alpha_1;j1}^{11}(b_1R_1),\ j=1,2,\\&X_{\alpha_2;j1}^{21}(\lambda R_2,b_2)A_2+X_{\alpha_2;j1}^{22}(\lambda R_2,b_2)B_2=\\&=Y_{-1/2+ib_3;j2}^{\mu,21}(\mathrm{ch}\,R_2)A_3+Y_{-1/2+ib_3;j2}^{\mu,22}(\mathrm{ch}\,R_2)B_3.\end{aligned}\tag{14}$$

Внаслідок тотожностей

$$X_{\alpha_2;12}^{11}(\lambda R_1,b_2)X_{\alpha_2;22}^{12}(\lambda R_1,b_2)-X_{\alpha_2;12}^{12}(\lambda R_1,b_2)X_{\alpha_2;22}^{11}(\lambda R_1,b_2)=-\frac{c_{21}}{\pi}\frac{\mathrm{sh}\,\pi b_2}{\lambda^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}\neq 0,$$

$$Y_{-1/2+ib_3;12}^{\mu,21}(\mathrm{ch}\,R_2)Y_{-1/2+ib_3;22}^{\mu,22}(\mathrm{ch}\,R_2)-Y_{-1/2+ib_3;12}^{\mu,22}(\mathrm{ch}\,R_2)Y_{-1/2+ib_3;22}^{\mu,21}(\mathrm{ch}\,R_2)=$$

$$=c_{22}\frac{2}{\pi^2}\frac{\mathrm{ch}\,\pi b_3}{\mathrm{sh}\,R_2}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+ib_3\right)\right|^2\neq 0$$

алгебраїчна система (14) має розв'язок при будь-якому $\beta \in (0, \infty)$ та довільному $A_1 \neq 0$.

У результаті розв'язання системи (14) одержуємо компоненти $V^{\mu}_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta)$ спектральної вектор-функції $V^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(r,\beta) = \{V^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta); V^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta); V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)\}$:

$$V^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta) = \frac{2c_{21}c_{22}\operatorname{sh}\pi b_2 \operatorname{ch}\pi b_3}{\pi^3 \lambda^{2\alpha_2} R_1^{2\alpha_2+1}\operatorname{sh} R_2}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+ib_3\right)\right|^2 J_{\nu_1,\alpha_1}(b_1 r),$$

$$V^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta) = \frac{2}{\pi^2}\frac{c_{22}}{\operatorname{sh} R_2}\operatorname{ch}\pi b_3\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+ib_3\right)\right|^2 [u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(b_1 r)\Psi^1_{\alpha_2;22}(\lambda R_1,\lambda r,b_2) - \qquad (15)$$

$$- u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(b_1 r)\Psi^1_{\alpha_2;12}(\lambda R_1,\lambda r,b_2)],$$

$$V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta) = b_{(\nu,\alpha);2}(\beta) f^{\mu,2}_{-1/2+ib_3;12}(\operatorname{ch} R_2,\operatorname{ch} r) - b_{(\nu,\alpha);1}(\beta) f^{\mu,2}_{-1/2+ib_3;22}(\operatorname{ch} R_2,\operatorname{ch} r).$$

У рівностях (15) беруть участь функції:

$$\Psi^1_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,\lambda r,b_2) = X^{11}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_2) D_{\alpha_2}(\lambda r,b_2) - X^{12}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_2) C_{\alpha_2}(\lambda r,b_2),$$

$$f^{\mu,2}_{-1/2+ib_3;j2}(\operatorname{ch} R_2,\operatorname{ch} r) = Y^{\mu,21}_{-1/2+ib_3;j2}(\operatorname{ch} R_2) B^{\mu}_{-1/2+ib_3}(\operatorname{ch} r) - Y^{\mu,22}_{-1/2+ib_3;j2}(\operatorname{ch} R_2) B^{\mu}_{-1/2+ib_3}(\operatorname{ch} r),$$

$$b_{(\nu,\alpha);j}(\beta) = u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11}(b_1 R_1)\delta_{\alpha_2;2j}(\beta) - u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21}(b_1 R_1)\delta_{\alpha_2;1j}(\beta);\ j = 1, 2;$$

$$\delta_{\alpha_2;jk}(\beta) = X^{11}_{,\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_2) X^{22}_{,\alpha_2;k1}(\lambda R_2,b_2) - X^{12}_{,\alpha_2;j2}(\lambda R_1,b_2) X^{21}_{,\alpha_2;k1}(\lambda R_2,b_2);\ j,k = 1, 2.$$

Перепишемо компоненту $V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)$ в такому вигляді:

$$V^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(r,\beta) = [Y^{\mu,21}_{-1/2+ib_3;12}(\operatorname{ch} R_2) b_{(\nu,\alpha);2}(\beta) - Y^{\mu,21}_{-1/2+ib_3;22}(\operatorname{ch} R_2) b_{(\nu,\alpha);1}(\beta)] B^{\mu}_{-1/2+ib_3}(\operatorname{ch} r) -$$

$$- [Y^{\mu,22}_{-1/2+ib_3;12}(\operatorname{ch} R_2) b_{(\nu,\alpha);2}(\beta) - Y^{\mu,22}_{-1/2+ib_3;22}(\operatorname{ch} R_2) b_{(\nu,\alpha);1}(\beta)] A^{\mu}_{-1/2+ib_3}(\operatorname{ch} r) \equiv$$

$$\equiv \omega^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(\beta) B^{\mu}_{-1/2+ib_3}(\operatorname{ch} r) - \omega^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(\beta) A^{\mu}_{-1/2+ib_3}(\operatorname{ch} r).$$

Визначимо спектральну функцію

$$V^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r) V^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) V^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta) +$$

$$+ \theta(r - R_2) V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta),$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_2-1} + \theta(r - R_2)\sigma_3 \operatorname{sh} r,$$

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}},\ \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}},\ \sigma_3 = \frac{1}{\operatorname{sh} R_2}$$

і спектральну щільність

$$\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta) = \frac{\pi\beta \operatorname{th}\pi b_3 \left(\left|\Gamma(1/2+\mu+ib_3)\right|^2 \operatorname{ch}\pi b_3\right)^{-1}}{\left[\omega^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(\beta)\right]^2 + (\operatorname{th}\pi b_3)^2\left[\omega^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(\beta)\right]^2}.$$

Згідно з роботою [7], визначимо пряме $H_{(\nu,\alpha),\mu}$ і обернене $H^{-1}_{(\nu,\alpha),\mu}$ гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду - (Конторовича-Лєбєдєва) 2-го роду – Лежандра, породжене на множині I_2^+ оператором $\mathrm{M}^{\mu}_{(\nu,\alpha)}$:

$$H_{(\nu,\alpha),\mu}[g(r)] = \int_0^\infty g(r) V^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \qquad (16)$$

$$H^{-1}_{(\nu,\alpha),\mu}[\tilde{g}(\beta)] = \int_0^\infty \tilde{g}(\beta) V^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r), \qquad (17)$$

При цьому для вектор-функції g(r) = {$g_1(r)$; $g_2(r)$; $g_3(r)$;} із області визначення оператора $\mathrm{M}^{\mu}_{(\nu,\alpha)}$ справджується основна тотожність інтегрального перетворення:

$$H_{(\nu,\alpha),\mu}\left[\mathrm{M}^{\mu}_{(\nu,\alpha)}[g(r)]\right] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \gamma_1^2\int_0^{R_1} g_1(r) V^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr -$$

$$-\gamma_2^2\int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)V^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr-\gamma_3^2\int\limits_{R_2}^{\infty} g_3(r)V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 \operatorname{sh} r dr\,. \tag{18}$$

Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(B_{\nu_1,\alpha_1}-q_1^2\right)u_1(r)\\ \left(B_{\alpha_2}-q_2^2\right)u_2(r)\\ \left(\Lambda_{\mu}-q_3^2\right)u_3(r)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}f_1(r)\\ f_2(r)\\ f_3(r)\end{bmatrix}. \tag{19}$$

Інтегральний оператор $H_{(\nu,\ \alpha);\ \mu}$ згідно правила (16) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{(\nu,\alpha);\mu}[\cdots]=\Bigg[\int\limits_0^{R_1}\ldots V^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr\quad \int\limits_{R_1}^{R_2}\ldots V^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr$$

$$\int\limits_{R_2}^{\infty}\ldots V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 \operatorname{sh} r dr\Bigg]. \tag{20}$$

Припустимо, що $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_1^2 \geq 0$. Покладемо всюди $\gamma_1^2=0$, $\gamma_2^2=q_1^2-q_2^2\geq 0$, $\gamma_3^2=q_1^2-q_3^2\geq 0$. Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (20) до системи (19). Внаслідок тотожності (18) маємо алгебраїчне рівняння:

$$\left(\beta^2+q_1^2\right)\tilde{u}(\beta)=\tilde{f}(\beta).$$

Звідси знаходимо, що

$$\tilde{u}(\beta)=\frac{\tilde{f}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}\,. \tag{21}$$

Інтегральний оператор $H^{-1}_{(\nu,\alpha);\mu}$ як обернений до (20) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H^{-1}_{(\nu,\alpha);\mu}[\cdots]=\begin{bmatrix}\int\limits_0^{\infty}V^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta\\ \int\limits_0^{\infty}V^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta\\ \int\limits_0^{\infty}V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{22}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (22) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(\beta)]$, де функція $\tilde{u}(\beta)$ визначена формулою (21). У результаті елементарних перетворень отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$u_j(r)=\int\limits_0^{\infty}\tilde{u}(\beta)V^{\mu}_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta=\int\limits_0^{\infty}\frac{\tilde{f}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}V^{\mu}_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta)\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta=$$

$$=\int\limits_0^{R_1}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{V^{\mu}_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta)V^{\mu}_{(\nu,\alpha);1}(\rho,\beta)}{\beta^2+q_1^2}\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta\right)f_1(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{V^{\mu}_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta)V^{\mu}_{(\nu,\alpha);2}(\rho,\beta)}{\beta^2+q_1^2}\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta\right)f_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{V^{\mu}_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta)V^{\mu}_{(\nu,\alpha);3}(\rho,\beta)}{\beta^2+q_1^2}\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta)d\beta\right)f_3(\rho)\sigma_2 \operatorname{sh}\rho d\rho\,. \tag{23}$$

Порівнюючи розв'язки (10) і (23), внаслідок єдиності, одержуємо зображення поліпараметричних невласних інтегралів від спеціальних функцій математичної фізики:

$$\int_0^\infty \frac{V^{\mu}_{(\nu,\alpha);j}(r,\beta)V^{\mu}_{(\nu,\alpha);k}(\rho,\beta)}{\beta_n^2+q_1^2}\Omega^{\mu}_{(\nu,\alpha)}(\beta) = \frac{1}{\sigma_k}H^{\mu}_{(\nu,\alpha);jk}(r,\rho,q),\ j,k=1,2,3. \qquad (24)$$

Оскільки праві частини в рівностях (24) не залежать від нерівностей $\left(q^2-q_j^2\right)\ge 0$, де $q^2=\max\left\{q_1^2;\nu_2^2;q_3^2\right\}$, то можна покласти $q_1^2\equiv q_2^2\equiv q_3^2\equiv q^2\ge 0$. Останнє означає, що $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 0$. Функції впливу $H_{(\nu,\ \alpha);\ jk}(r,\ \rho,\ q)$ обчислюються за формулами (18).

З вищевикладеного випливає твердження.

Теорема. *Якщо вектор функція* $g(r) = \{B_{\nu_1,\alpha_1}[f_1(r)];\ B_{\alpha_2}[f_2(r)];\ \Lambda_\mu[f_3(r)]\}$ *неперервна на множині* I_2^+, *вектор-функція f(r) задовольняє умови спряження (2) і виконується умова (16) однозначної розв'язності даної крайової задачі, то справджуються формули (24) обчислення (зображення) поліпараметричної сім'ї невласних інтегралів.*

Зауважимо, що рівності (24) неперервно залежать від параметрів, які беруть участь в формулюванні даної крайової задачі.

The ciass of the poliparametric infinite integrals is calculated by the method of the comparison of the solutions built in the polar axis with two contact points for the separate system of two differential Btssel equations and one differential Legendres equation by the method of the Cauchy functions and by the method of the hybrid integral transform of the Hankel of the 1-st kind – (Kontorovich – Lebedev) of the 2-nd kind – Legendres type.

Література

1. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 61 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
2. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. – Львов, 1989. – 60 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики; 89.0).
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
4. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 431 с.
6. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Київ, 1996. – 64 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 96.16).
7. Ленюк М.П., Пилипюк Т.М. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є - Фур'є - Лежандра) в задачах математичної фізики. – Київ, 1994. – 46 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 94.35).

Одержано 04.07.2002 р.