УДК 517.52/524:517.58/589

М.Ленюк, докт. фіз.-мат.наук; К.Сачко

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ФУР'Є ЛЕЖАНДРА 2-ГО РОДУ

Методом порівняння розв'язків, побудованих на сегменті з однією точкою спряження для сепаратної системи з одного диференціального рівняння Фур'є та одного диференціального рівняння Лежандра методом функцій Коші і методом скінченного гібридного інтегрального перетворення, підсумовано сім'ю поліпараметричних функціональних рядів.

Розглянемо задачу про конструкцію обмеженого на множині $I_1 = \{r : r \in (R_0, R_1) \bigcup (R_1, R_2); R_0 \ge 0, R_2 < \infty\}$ розв'язку сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Фур'є та Лежандра

$$\left(d^2/dr^2 - \nu_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r),\ r \in (R_0, R_1),$$
$$\left(\Lambda_\mu - \nu_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r),\ r \in (R_1, R_2) \qquad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 d/dr + \beta_{11}^0\right)u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0;\ \left(\alpha_{22}^2 d/dr + \beta_{22}^2\right)u_2(r)\Big|_{r=R_2} = g_3 \qquad (2)$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 d/dr + \beta_{j1}^1\right)u_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 d/dr + \beta_{j2}^1\right)u_2(r)\right]\Big|_{r=R_1} = 0,\ j = 1, 2. \qquad (3)$$

Тут Λ_μ - диференціальний оператор Лежандра [1]:

$$\Lambda_\mu = d^2/dr^2 + \mathrm{cth}r\, d/dr + 1/4 - \frac{\mu^2}{\mathrm{sh}^2 r},\ \mu \ge 0.$$

Умови на коефіцієнти: $\left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \ne 0$, $\left|\alpha_{22}^2\right| + \left|\beta_{22}^2\right| \ne 0$, $c_{11}c_{21} > 0$, $c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1$, $\nu_j \ge 0$, $j = 1, 2$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння $(d^2/dr^2 - \nu^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \mathrm{ch}\,\nu r$ і $v_2 = \mathrm{sh}\,\nu r$ [2], а для рівняння $(\Lambda_\mu - \nu^2)v = 0$ – приєднані функції Лежандра $P_{-1/2+\nu}^\mu(\mathrm{ch}r)$ і $L_{-1/2+\nu}^\mu(\mathrm{ch}r)$ [1].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати розв'язок крайової задачі (1) – (3) методом функцій Коші:

$$u_1(r) = A_1\mathrm{ch}\,\nu_1 r + B_1\mathrm{sh}\,\nu_1 r + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho)g_1(\rho)d\rho,$$
$$u_2(r) = A_2 P_{-1/2+\nu_2}^\mu(\mathrm{ch}\,r) + B_2 L_{-1/2+\nu_2}^\mu(\mathrm{ch}\,r) + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho)g_2(\rho)\mathrm{sh}\,\rho d\rho. \qquad (4)$$

Тут $E_j(r, \rho)$ – функції Коші [2, 3].

Визначимо функції:

$$V_{jk}^{m1}(\nu_s R_m) = \alpha_{jk}^m \nu_s \mathrm{sh}\,\nu_s R_m + \beta_{jk}^m \mathrm{ch}\,\nu_s R_m,$$
$$V_{jk}^{m2}(\nu_s R_m) = \alpha_{jk}^m \nu_s \mathrm{ch}\,\nu_s R_m + \beta_{jk}^m \mathrm{sh}\,\nu_s R_m,$$
$$\Phi_{jk}^m(\nu_s R_m, \nu_s r) = V_{jk}^{m2}(\nu_s R_m)\mathrm{ch}\,\nu_s r - V_{jk}^{m1}(\nu_s R_m)\mathrm{sh}\,\nu_s r,$$
$$Z_{-1/2+\nu;jk}^{\mu,m1}(\mathrm{ch}\,R_m) = \alpha_{jk}^m \mathrm{sh}\,R_m P_{-1/2+\nu}^{\mu\,'}(\mathrm{ch}\,R_m) + \beta_{jk}^m P_{-1/2+\nu}^\mu(\mathrm{ch}\,R_m),$$
$$Z_{-1/2+\nu;jk}^{\mu,m2}(\mathrm{ch}\,R_m) = \alpha_{jk}^m \mathrm{sh}\,R_m L_{-1/2+\nu}^{\mu\,'}(\mathrm{ch}\,R_m) + \beta_{jk}^m L_{-1/2+\nu}^\mu(\mathrm{ch}\,R_m)$$
$$F_{-1/2+\nu;jk}^{\mu,m}(\mathrm{ch}\,R_m, \mathrm{ch}\,r) = Z_{-1/2+\nu;jk}^{\mu,m1}(\mathrm{ch}\,R_m)L_{-1/2+\nu}^\mu(\mathrm{ch}\,r) - Z_{-1/2+\nu;jk}^{\mu,m2}(\mathrm{ch}\,R_m)P_{-1/2+\nu}^\mu(\mathrm{ch}\,r).$$

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші можна взяти функції

$$E_1(r,\rho) = -\frac{1}{\nu_1\Delta_{11}(\nu_1 R_0, \nu_1 R_1)}\begin{cases}\Phi_{11}^0(\nu_1 R_0, \nu_1 r)\Phi_{11}^1(\nu_1 R_1, \nu_1\rho), & R_0 < r < \rho < R_1\\ \Phi_{11}^0(\nu_1 R_0, \nu_1\rho)\Phi_{11}^1(\nu_1 R_1, \nu_1 r), & R_0 < \rho < r < R_1\end{cases},$$

$$\Delta_{j1}(\nu_1 R_0, \nu_1 R_1) = V_{11}^{01}(\nu_1 R_0)V_{j1}^{12}(\nu_1 R_1) - V_{11}^{02}(\nu_1 R_0)V_{j1}^{11}(\nu_1 R_1);\ j = 1, 2;$$

$$E_2(r,\rho) = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(1/2 + \nu_2 - \mu)}{\Gamma(1/2 + \nu_2 + \mu)}\frac{1}{\Delta_{-1/2+\nu_2;12}^\mu(\mathrm{ch}\,R_1, \mathrm{ch}\,R_2)} \times$$
$$\times\begin{cases}F_{-1/2+\nu_2;12}^{\mu,1}(\mathrm{ch}\,R_1, \mathrm{ch}\,r)F_{-1/2+\nu_2;22}^{\mu,2}(\mathrm{ch}\,R_2, \mathrm{ch}\,\rho), & R_1 < r < \rho < R_2\\ F_{-1/2+\nu_2;12}^{\mu,1}(\mathrm{ch}\,R_1, \mathrm{ch}\,\rho)F_{-1/2+\nu_2;22}^{\mu,2}(\mathrm{ch}\,R_2, \mathrm{ch}\,r), & R_1 < \rho < r < R_2\end{cases},$$

$$\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;jk}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2\right)=Z^{\mu,11}_{-1/2+\nu_2;j2}\left(\operatorname{ch}R_1\right)Z^{\mu,22}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_2\right)-Z^{\mu,12}_{-1/2+\nu_2;j2}\left(\operatorname{ch}R_1\right)Z^{\mu,21}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_2\right).$$

Крайові умови (2) і умови спряження (3) для визначення величин A_j і B_j (j = 1, 2) дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{gathered}
V^{01}_{11}(\nu_1R_0)A_1+V^{02}_{11}(\nu_1R_0)B_1=g_0,\\
V^{11}_{j1}(\nu_1R_1)A_1+V^{12}_{j1}(\nu_1R_1)B_1-Z^{\mu,11}_{-1/2+\nu_2;j2}\left(\operatorname{ch}R_1\right)A_2-\\
-Z^{\mu,12}_{-1/2+\nu_2;j2}\left(\operatorname{ch}R_1\right)B_2=\delta_{j2}G_{12},\ j=1,2,\\
Z^{\mu,21}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_2\right)A_2+Z^{\mu,22}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_2\right)B_2=g_3.
\end{gathered}\tag{5}$$

У рівностях (5) бере участь символ Кронекера δ_{j2} (δ_{12} = 0, δ_{22} = 1) і функція

$$G_{12}=-c_{11}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi^0_{11}(\nu_1R_0,\nu_1\rho)}{\Delta_{11}(\nu_1R_0,\nu_1R_1)}g_1(\rho)d\rho-\frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\int_{R_0}^{R_1}\frac{F^{\mu,2}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}\rho\right)}{\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;12}\left(\operatorname{sh}R_1,\operatorname{sh}R_2\right)}g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1) – (3): визначник алгебраїчної системи (5)

$$\Delta_{\mu}(\nu)\equiv\Delta_{21}(\nu_1R_0,\nu_1R_1)\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;12}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2\right)-\Delta_{11}(\nu_1R_0,\nu_1R_1)\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2\right)\neq0,$$
$$\nu=(\nu_1,\ \nu_2).\tag{6}$$

Визначимо: а) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$\begin{gathered}
W_{\mu;11}(r,\nu)=\frac{1}{\Delta_{\mu}(\nu)}[\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;12}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2\right)\Phi^1_{21}(\nu_1R_1,\nu_1r)-\\
-\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2\right)\Phi^1_{11}(\nu_1R_1,\nu_1r)];\\
W_{\mu;12}(r,\nu)=-\frac{c_{11}\nu_1}{\Delta_{\mu}(\nu)}F^{\mu,2}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}r\right);
\end{gathered}\tag{7}$$

б) породжені крайовою умовою в точці $r = R_2$ функції Гріна

$$\begin{gathered}
W_{\mu;21}(r,\nu)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\frac{\Gamma(1/2+\nu_2+\mu)}{\Gamma(1/2+\nu_2-\mu)}\frac{1}{\Delta_{\mu}(\nu)}\Phi^0_{11}(\nu_1R_0,\nu_1r),\\
W_{\mu;22}(r,\nu)=\frac{1}{\Delta_{\mu}(\nu)}[\Delta_{21}(\nu_1R_0,\nu_1R_1)F^{\mu,1}_{-1/2+\nu_2;12}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r\right)-\\
-\Delta_{11}(\nu_1R_0,\nu_1R_1)F^{\mu,1}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r\right)];
\end{gathered}\tag{8}$$

в) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\begin{gathered}
H_{\mu;11}(r,\rho,\nu)=\frac{1}{\nu_1\Delta_{\mu}(\nu)}\begin{cases}\Phi^0_{11}(\nu_1R_0,\nu_1r)[\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2\right)\Phi^1_{11}(\nu_1R_1,\nu_1\rho)-\\ \Phi^0_{11}(\nu_1R_0,\nu_1\rho)[\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2\right)\Phi^1_{11}(\nu_1R_1,\nu_1r)-\end{cases}\\
\begin{matrix}-\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;12}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2\right)\Phi^1_{21}(\nu_1R_1,\nu_1\rho)], & R_0<r<\rho<R_1\\ -\Delta^{\mu}_{-1/2+\nu_2;12}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2\right)\Phi^1_{21}(\nu_1R_1,\nu_1r)], & R_0<\rho<r<R_1\end{matrix};\\
H_{\mu;12}(r,\rho,\nu)=\frac{c_{21}}{\operatorname{sh}R_1}\frac{1}{\Delta_{\mu}(\nu)}\Phi^0_{11}(\nu_1R_0,\nu_1r)F^{\mu,2}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho\right);\\
H_{\mu;21}(r,\rho,\nu)=\frac{c_{11}}{\Delta_{\mu}(\nu)}\Phi^0_{11}(\nu_1R_0,\nu_1\rho)F^{\mu,2}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}r\right);\\
H_{\mu;2}(r,\rho,\nu)=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(1/2+\nu_2-\mu)}{\Gamma(1/2+\nu_2+\mu)}\frac{1}{\Delta_{\mu}(\nu)}\begin{cases}F^{\mu}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}\rho\right)\times\\ F^{\mu}_{-1/2+\nu_2;22}\left(\operatorname{ch}R_2,\operatorname{ch}r\right)\times\end{cases}
\end{gathered}\tag{9}$$

$$\times[\Delta_{21}(\nu_1 R_0,\nu_1 R_1)F^{\mu,1}_{-1/2+\nu_2;12}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)-\Delta_{11}(\nu_1 R_0,\nu_1 R_1)F^{\mu,1}_{-1/2+\nu_2;22}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)],\quad R_1<r<\rho<R_2$$
$$\times[\Delta_{21}(\nu_1 R_0,\nu_1 R_1)F^{\mu,1}_{-1/2+\nu_2;12}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho)-\Delta_{11}(\nu_1 R_0,\nu_1 R_1)F^{\mu,1}_{-1/2+\nu_2;22}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}\rho)],\quad R_1<\rho<r<R_2$$
.

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (5), підстановки одержаних значень A_j та B_j (j = 1, 2) у формули (4) отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1) – (3):

$$u_j(r)=W_{\mu;1j}(r,\nu)g_0+W_{\mu;2j}(r,\nu)g_3+\int_{R_0}^{R_1}H_{\mu;j1}(r,\rho,\nu)g_1(\rho)d\rho+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}H_{\mu;j2}(r,\rho,\nu)g_2(\rho)\operatorname{sh}\rho d\rho;\ j=1,2. \qquad (10)$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1) – (3) методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є-Лежандра 2-го роду.

Розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати на множині I_1 ненульовий розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Фур'є та Лежандра для звичайних функцій

$$\left(d^2/dr^2+b_1^2\right)V_{\mu,1}(r,\beta)=0,\ r\in(R_0,R_1),$$
$$\left(\Lambda_\mu+b_2^2\right)V_{\mu,2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2) \qquad (11)$$

за однорідними крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 d/dr+\beta_{11}^0\right)V_{\mu,1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}=0;\ \left(\alpha_{22}^2 d/dr+\beta_{22}^2\right)V_{\mu,2}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}=0 \qquad (12)$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 d/dr+\beta_{j1}^1\right)V_{\mu,1}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^1 d/dr+\beta_{j2}^1\right)V_{\mu,2}(r,\beta)\right]_{r=R_1}=0,$$
$$b_j^2=\beta^2+\gamma_j^2,\ \beta\in(0,\infty),\ \gamma_j^2\ge 0,\ j=1,2. \qquad (13)$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2+b^2)v=0$ утворюють тригонометричні функції cos br і sin br [2], а для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_\mu+b^2)v=0$ – приєднані дійсні функції Лежандра $A^\mu_{-1/2+ib}(\operatorname{ch}r)$ і $B^\mu_{-1/2+ib}(\operatorname{ch}r)$ [1].

Якщо розв'язок однорідної крайової задачі (11) – (13) відшукувати за правилами [2]

$$V_{\mu,1}(r,\beta)=A_1\cos b_1 r+B_1\sin b_1 r,$$
$$V_{\mu,2}(r,\beta)=A_2 A^\mu_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch}r)+B_2 B^\mu_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch}r),$$

то для визначення величин A_j, B_j (j = 1, 2) крайові умови (12) і умови спряження (13) дають однорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$v_{11}^{01}(b_1R_0)A_1+v_{11}^{02}(b_1R_0)B_1=0,$$
$$v_{j1}^{11}(b_1R_1)A_1+v_{j1}^{12}(b_1R_1)B_1-Y^{\mu,11}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch}R_1)A_2-$$
$$-Y^{\mu,12}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch}R_1)B_2=0,\ j=1,2, \qquad (14)$$
$$Y^{\mu,21}_{-1/2+ib_2;22}(\operatorname{ch}R_2)A_2+Y^{\mu,22}_{-1/2+ib_2;22}(\operatorname{ch}R_2)B_2=0.$$

Тут прийняті позначення:

$$v_{jk}^{m1}(b_sR_m)=-\alpha_{jk}^m b_s\sin b_sR_m+\beta_{jk}^m\cos b_sR_m,$$
$$v_{jk}^{m2}(b_sR_m)=\alpha_{jk}^m b_s\cos b_sR_m+\beta_{jk}^m\sin b_sR_m,$$
$$Y^{\mu,m1}_{-1/2+ib_2;jk}(\operatorname{ch}R_m)=\alpha_{jk}^m\operatorname{sh}R_m A'^{\mu}_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch}R_m)+\beta_{jk}^m A^\mu_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch}R_m),$$

$$Y^{\mu,m2}_{-1/2+ib_2;jk}(\operatorname{ch} R_m) = \alpha^m_{jk} \operatorname{sh} R_m B^{\mu\,'}_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch} R_m) + \beta^m_{jk} B^{\mu}_{-1/2+ib_2}(\operatorname{ch} R_m).$$

Якщо покласти

$$\delta_{j1}(\beta) = v^{01}_{11}(b_1 R_0) v^{12}_{j1}(b_1 R_1) - v^{02}_{11}(b_1 R_0) v^{11}_{j1}(b_1 R_1);\ j = 1,\ 2;$$

$$\delta^{\mu}_{j2}(\beta) = Y^{\mu,11}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1) Y^{\mu,22}_{-1/2+ib_2;22}(\operatorname{ch} R_2) - Y^{\mu,12}_{-1/2+ib_2;j2}(\operatorname{ch} R_1) Y^{\mu,21}_{-1/2+ib_2;22}(\operatorname{ch} R_2),$$

то алгебраїчна система (14) буде мати ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи

$$\delta_{\mu}(\beta) \equiv \delta_{21}(\beta)\delta^{\mu}_{12}(\beta) - \delta_{11}(\beta)\delta^{\mu}_{22}(\beta) = 0. \tag{15}$$

Корені β_n трансцендентного рівняння (15) утворюють дискретний спектр [4]: різні, дійсні, симетричні відносно $\beta = 0$, їх модулі складають монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

При цьому кожному власному числу β_n гібридного диференціального оператора

$M_{\mu} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)d^2/dr^2 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\Lambda_{\mu}$,

де $\theta(x)$ – одинична функція Хевісайда, відповідає одна власна (спектральна) вектор-функція,

$V_{\mu}(r, \beta_n) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)V_{\mu,1}(r, \beta_n) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{\mu,2}(r, \beta_n)$,

компоненти $V_{\mu,j}(r, \beta_n)$ якої мають структуру:

$$V_{\mu,1}(r, \beta_n) = \frac{2}{\pi^2} c_{21} \frac{\operatorname{ch} \pi b_{2n}}{\operatorname{sh} R_1} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu + ib_{2n}\right) \right|^2 [v^{02}_{11}(b_{1n} R_0) \cos b_{1n} r -$$

$$- v^{01}_{11}(b_{1n} R_0) \sin b_{1n} r],\ b_{jn} \equiv b_j(\beta_n) = \sqrt{\beta_n^2 + \gamma_j^2};$$

$$V_{\mu,2}(r, \beta_n) = \delta_{11}(\beta_n) f^{\mu,1}_{-1/2+ib_{2n};22}(\operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} r) - \delta_{21}(\beta_n) f^{\mu,1}_{-1/2+ib_{2n};12}(\operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} r), \tag{16}$$

$$f^{\mu,1}_{-1/2+ib_{2n};j2}(\operatorname{ch} R_1, \operatorname{ch} r) = Y^{\mu,11}_{-1/2+ib_{2n};j2}(\operatorname{ch} R_1) B^{\mu}_{-1/2+ib_{2n}}(\operatorname{ch} r) - Y^{\mu,12}_{-1/2+ib_{2n};j2}(\operatorname{ch} R_1) A^{\mu}_{-1/2+ib_{2n}}(\operatorname{ch} r).$$

Система $\{V_{\mu}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій ортогональна з ваговою функцією

$$\sigma(r) = \sigma_1 \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r) + \sigma_2 \operatorname{sh} r\, \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) \equiv$$

$$\equiv \frac{c_{11}}{c_{21}} \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r) + \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{sh} R_1} \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r).$$

повна й замкнута на множині I_1 [4]. Тут квадрат норми власної вектор-функції $V_{\mu}(r, \beta_n)$ обчислюється за правилом:

$$\|V_{\mu}(r, \beta_n)\|^2 = \int_{R_0}^{R_2} [V_{\mu}(r, \beta_n)]^2 \sigma(r) dr \equiv$$

$$\equiv \int_{R_0}^{R_1} [V_{\mu,1}(r, \beta_n)]^2 \sigma_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} [V_{\mu,2}(r, \beta_n)]^2 \sigma_2 \operatorname{sh} r dr. \tag{17}$$

Згідно з теоремою Стєклова, кожна вектор-функція $g(r) = \{g_1(r); g_2(r)\}$ із області визначення оператора M_{μ} зображається абсолютно й рівномірно збіжним на I_1 рядом Фур'є за системою $\{V_{\mu}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ [4]:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R_2} g(\rho) V_{\mu}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho \frac{V_{\mu}(r, \beta_n)}{\|V_{\mu}(r, \beta_n)\|^2}. \tag{18}$$

Ряд Фур'є (18) визначає пряме $H_{\mu,1}$ і обернене $H^{-1}_{\mu,1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є-Лежандра 2-го роду [4]

$$H_{\mu,1}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_2} g(r) V_{\mu}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv g_n =$$

$$\equiv \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) V_{\mu,1}(r, \beta_n) \sigma_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{\mu,2}(r, \beta_n) \sigma_2 \operatorname{sh} r dr \equiv g_{1n} + g_{2n}, \tag{19}$$

$$H_{\mu,1}^{-1}[g_n] = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{V_\mu(r,\beta_n)}{\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2} \equiv g(r). \tag{20}$$

При цьому справджується основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора M_μ:

$$H_{\mu,1}[M_\mu[g(r)]] = -\beta_n^2 g_n - \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_{\mu,1}(R_0,\beta_n) g_0 + \sigma_2 \operatorname{sh} R_2 \left(\alpha_{22}^2\right)^{-1} V_{\mu,2}(R_2,\beta_n) g_3 -$$
$$- \left(\gamma_1^2 g_{1n} + \gamma_2^2 g_{2n}\right). \tag{21}$$

Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(d^2/dr^2 - \nu_1^2\right) u_1(r) \\ \left(\Lambda_\mu - \nu_2^2\right) u_2(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Інтегральний оператор $H_{\mu,1}$, згідно правила (19), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\mu,1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \int_{R_0}^{R_1} \ldots V_{\mu,1}(r,\beta_n)\sigma_1 dr & \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_{\mu,2}(r,\beta_n)\sigma_2 \operatorname{sh} r dr \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Нехай $\max\{\nu_1^2;\nu_2^2\} = \nu_1^2$. Покладемо $\gamma_1^2 = 0$, $\gamma_2^2 = \nu_1^2 - \nu_2^2 \geq 0$. Застосуємо, за правилом множення матриць, операторну матрицю-рядок (23) до системи (22). Внаслідок тотожності (21) маємо алгебраїчне рівняння:

$$\left(\beta_n^2 + \nu_1^2\right) u_n = g_n - \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_{\mu,1}(R_0,\beta_n) g_0 +$$
$$+ \sigma_2 \operatorname{sh} R_2 \left(\alpha_{22}^2\right)^{-1} V_{\mu,2}(R_2,\beta_n) g_3.$$

Звідси одержуємо:

$$u_n = \frac{g_n}{\beta_n^2 + \nu_1^2} - \frac{\sigma_1 V_{\mu,1}(R_0,\beta_n)}{\alpha_{11}^0\left(\beta_n^2 + \nu_1^2\right)} g_0 + \frac{\sigma_2 \operatorname{sh} R_2 V_{\mu,2}(R_2,\beta_n)}{\alpha_{22}^2\left(\beta_n^2 + \nu_1^2\right)} g_3. \tag{24}$$

Оператор $H_{\mu,1}^{-1}$ як обернений до (23) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{\mu,1}^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \cdots V_{\mu,1}(r,\beta_n)\left(\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2\right)^{-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \cdots V_{\mu,2}(r,\beta_n)\left(\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2\right)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (25), за правилом множення матриць, до матриці-елемента $[u_n]$, де u_n визначена формулою (24). У результаті елементарних перетворень отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1) – (3):

$$u_j(r) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{V_{\mu,j}(r,\beta_n)}{\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2} = \int_{R_0}^{R_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mu,j}(r,\beta_n) V_{\mu,1}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2 + \nu_1^2\right)\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2} \right) g_1(\rho)\sigma_1 d\rho +$$
$$+ \int_{R_1}^{R_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mu,j}(r,\beta_n) V_{\mu,2}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2 + \nu_1^2\right)\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2} \right) g_2(\rho)\sigma_2 \operatorname{sh} \rho d\rho +$$
$$+ \left(-\frac{\sigma_1}{\alpha_{11}^0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mu,j}(r,\beta_n) V_{\mu,1}(R_0,\beta_n)}{\left(\beta_n^2 + \nu_1^2\right)\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2} \right) g_0 + \left(\sigma_2 \frac{\operatorname{sh} R_2}{\alpha_{22}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\mu,j}(r,\beta_n) V_{\mu,2}(R_2,\beta_n)}{\left(\beta_n^2 + \nu_1^2\right)\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2} \right) g_3(\rho),$$
$$j = 1, 2. \tag{26}$$

Порівнюючи розв'язки (10) і (26) внаслідок єдиності, маємо наступні формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mu,1}(R_0,\beta_n)V_{\mu,j}(r,\beta_n)}{\alpha_{11}^0(\beta_n^2+\nu_1^2)\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2}=-\frac{c_{21}}{c_{11}}W_{\mu;1j}(r,\nu),\ j=1,2; \tag{27}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mu,2}(R_2,\beta_n)V_{\mu,j}(r,\beta_n)}{\alpha_{22}^2(\beta_n^2+\nu_1^2)\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2}=\operatorname{sh}R_2W_{\mu;2j}(r,\nu),\ j=1,2; \tag{28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\mu,j}(r,\beta_n)V_{\mu,k}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+\nu_1^2)\|V_\mu(r,\beta_n)\|^2}=\frac{1}{\sigma_k}H_{\mu;jk}(r,\rho,\nu);\ j,k=1,2; \tag{29}$$

Функції Гріна $W_{\mu;\,1j}(r,\ \nu)$ обчислюються за формулами (7), функції Гріна $W_{\mu;\,2j}(r,\ \nu)$ – за формулами (8), а функції впливу $H_{\mu;\,jk}(r,\ \rho,\ \nu)$ – за формулами (9). Оскільки вони не залежать від нерівностей $(\nu-\nu_j^2)\ge 0$, де $\nu^2=\max\{\nu_1^2;\nu_2^2\}$, то можна покласти $\nu_1^2=\nu_2^2\equiv\nu^2\ge 0$ ($\gamma_1^2=0,\gamma_2^2=0$ і $b_{jn}=\beta_n$).

З вищевикладеного випливає твердження.

Теорема. *Якщо вектор функція* $f(r)=\{g_1''(r);\ \Lambda_\mu[g_2(r)]\}$ *неперервна на множині* I_1, *вектор-функція* $g(r)$ *задовольняє крайові умови (2) та умови спряження (3) і виконується умова (6) однозначної розв'язності крайової задачі (1) – (3), то справджуються формули (27) – (29) підсумовування функціональних рядів.*

Зауважимо, що одержані суми поліпараметричних рядів неперервно залежать від параметрів, що беруть участь у формулюванні крайової задачі в припущенні, що виконані умови на коефіцієнти.

The class of the polyparametric functional series is summarized by the method of the comparison of the solutions built in the segment with one contact point for the separate system of one differential Fourier equation and one differential Legendres equation by the method of the Cauchy functions and by the method of the terminal hybrid integral transform of the Fourier – Legendres of the 2-nd kind type.

Література

1. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. – Львов, 1989. – 60 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики; 89.0).
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.

Одержано 04.07.2002 р.