УДК.519.242:628.322

З.Мазяк, докт. техн. наук; І.Карпінська; Н.Чорномаз

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ДЕСОРБЦІЇ ГАЗІВ КРАПЛЯМИ РІДИНИ ПРИ ОСНОВНОМУ ОПОРІ ПЕРЕНОСУ В ГАЗІ

Розроблено найбільш прогностичну структурну модель процесу десорбції з крапель у нерухомому газовому середовищі, що дозволяє обчислити концентрацію розчиненого газу в будь-який момент часу для крапель з відомим діаметром, що падають з висоти меншої ніж 5 м. Адекватність моделі перевірена на прикладі десорбції діоксиду вуглецю.

Умовні позначення

$C, C_s, C_п, \overline{C}$ - текуча, рівноважна, початкова та середня концентрації розчиненого газу в рідині, мольні частки;

$C_г$ – текуча концентрація у газовій фазі, мольні частки;

C_L – концентрація, перетворена за Лапласом, мольні частки;

L – символ прямого перетворення Лапласа;

s – оператор Лапласа;

$\tau, \tau_к$ - текучий, кінцевий час падіння крапель, сек.;

D – коефіцієнт дифузії, м^2/сек.;

R, r – радіус краплі та частини її об'єму з розчиненим газом, м;

$\beta_г$ - коефіцієнт масовіддачі у газовій фазі, м/сек.;

$Nu_m = \frac{\beta R}{D}$ - масообмінне число Нусельта (Шервуда);

$Fo_m = \frac{D\tau}{R^2}$ - масообмінне число Фур'є.

Процеси абсорбції та десорбції газів рідиною поширені у хімічній (сірководень, фтор), харчовій (діоксид вуглецю) промисловості [1-4] та в технологгії кондиціювання води (кисень повітря для знезалізнення та насичення води) [5,6].

Здебільшого вони відбуваються шляхом барботажу газу через рідину або розпиленням рідини у газі [7]. Як барботаж, так і розпилення, потребують великої витрати енергії, тому в багатотонажних виробництвах та в процесах очистки води використовують робризкування шляхом витікання невеликого (0,3 – 0,5 м) шару води через перфоровані пластини. У роботі [8] показано, що при витіканні води з отвору діаметром 1 мм утворюються краплі діаметром 3 – 4 мм. Це пояснюється тим, що струмина поділяється на окремі відрізки, які потім під дією сил поверхневого натягу формуються в краплі, що падають з постійною швидкістю.

Ця обставина свідчить про доцільність використання на практиці діаметрів отворів 4 – 6 мм, що формують краплі таких самих діаметрів [9] при меншій вартості перфорації та більшій надійності роботи при наявності твердих домішок. Природні підземні води містять розчинені гази, серед яких діоксид вуглецю CO_2 викликає корозію та заростання трубопроводів.

Для характеристики динаміки та кінетики процесу використовуємо лінійне диференціальне рівняння молекулярної дифузії, що для краплі записується так [2]:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right), \tag{1}$$

$$0 \le r \le R \ ; \quad 0 \le \tau \le \tau_k \ .$$

Для характеристики конкретного процесу необхідний частковий розв'язок рівняння (1). Для цього його необхідно доповнити відповідними крайовими умовами, що складаються на основі структури рівняння (1), з однієї початкової та двох граничних умов. Початкова умова загалом виглядає так:

$$C/_{\tau=0} = f(r). \tag{2}$$

При десорбції розчинений газ дифундує з основної маси рідини до поверхні, на якій існує рівноважна об'ємна концентрація в рідині C_s. Її можна визначити за коефіцієнтом розподілу m компонента між рідкою та газовою фазами C. У нашому випадку початкова умова подана константою :

$$C/_{\tau=0} = C_п \tag{3}$$

Оскільки інтенсивність масообміну на всій поверхні кулі наближено постійна, то розглядається симетрична задача, і однією граничною умовою є умова симетрії:

$$\left(\frac{\partial C_п}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \ . \tag{4}$$

Там, де r = R , можливо використати граничну умову третього роду, яка характеризує потік маси через зовнішню поверхню краплі у газовій фазі:

$$\beta_г\left(mC/_{r=R} - C_г\right) = -D\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R} \ . \tag{5}$$

Система рівнянь (1-5) дає потрібну характеристику. Рівняння (1) можна ще записати так:

$$\frac{\partial(rC)}{\partial \tau} = D\frac{\partial^2(r,C)}{\partial r^2} \quad , \tag{6}$$

оскільки

$$r\frac{\partial C}{\partial \tau} = D\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial(rC)}{\partial r}\right]\right\} = D\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r} + C\right) = D\left(r\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial r}\right) =$$

$$= D\left(r\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + 2\frac{\partial C}{\partial r}\right) \tag{7}$$

або

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right) \quad . \tag{8}$$

Застосовуємо перетворення Лапласа до рівняння (2.2.14) .

$$L\left[\frac{\partial(rC)}{\partial \tau}\right] = L\left[D\frac{\partial^2(rC)}{\partial r^2}\right] \tag{9}$$

Перетворимо за Лапласом ліву частину рівняння (9), використовуючи початкову умову (3) .

$$L\left[\frac{\partial(r,C)}{\partial \tau}\right] = r\left(sC_L - C_п\right) \tag{10}$$

Тоді праву частину рівняння (2.2.17) записуємо:

$$L\left[D\frac{\partial^2(rC)}{\partial r^2}\right]=D\frac{d^2(rC_L)}{dr^2} \quad , \tag{11}$$

а зображення рівняння (6) виглядає так:

$$D\frac{d^2(rC_L)}{dr^2}-srC_L+rC_n=0 \quad . \tag{12}$$

Рівняння (12) є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку. Його розв'язок має таку структуру:

$$rC_L-\frac{rC_n}{s}=Ach\sqrt{\frac{s}{D}}r+Bsh\sqrt{\frac{s}{D}}r \quad , \tag{13}$$

де A і B - константи, що визначаються з граничних умов.

Використовуючи граничну умову (4) і враховуючи, що концентрація у центрі кулі (r=0) та її зображення C_L не можуть бути величинами безмежно великими, тобто $\lim\limits_{r\to 0} rC_L \to 0$, тоді A=0. Тому рівняння (13) записуємо так:

$$C_L-\frac{C_n}{s}=Bsh\sqrt{\frac{s}{D}} \quad . \tag{14}$$

Постійна B у рівнянні (14) визначається з граничної умови (5), яку необхідно перетворити за Лапласом.

$$\frac{\partial C_L}{\partial r}(R,s)+\frac{\beta_г}{D}\left[mC_L(R,s)-\frac{C_г}{s}\right]=0 \quad . \tag{15}$$

На основі (14) маємо:

$$\frac{1}{R}B\sqrt{\frac{s}{D}}ch\sqrt{\frac{s}{D}}R-\frac{B}{R^2}sh\sqrt{\frac{s}{D}}R+\frac{\beta_г}{D}\left[\frac{mC_n}{s}+\frac{mB}{R}sh\sqrt{\frac{s}{D}}R-\frac{C_г}{s}\right]=0, \tag{16}$$

з цього рівняння отримаємо:

$$B=\frac{\frac{\beta_г}{D}R^2(C_г-mC_n)}{s\left[\sqrt{\frac{s}{D}}Rch\sqrt{\frac{s}{D}}R+\left(m\frac{\beta_г}{D}R-1\right)sh\sqrt{\frac{s}{D}}R\right]}. \tag{17}$$

Тоді на основі рівняння (14):

$$C_L-\frac{C_n}{s}=\frac{\frac{\beta_г}{D}R^2(C_г-mC_n)sh\sqrt{\frac{s}{D}}r}{rs\left[\sqrt{\frac{s}{D}}Rch\sqrt{\frac{s}{D}}R+\left(m\frac{\beta_г}{D}R-1\right)sh\sqrt{\frac{s}{D}}R\right]}=\frac{\phi(s)}{\psi(s)} \quad . \tag{18}$$

Праву частину рівняння (14) можна записати так:

$$\frac{\phi(s)}{\psi(s)}=\frac{(C_г-mC_n)\frac{\beta_г}{D}R^2\left(r+\frac{1}{3!}\frac{s}{D}r^3+\frac{1}{5!}\frac{s^2}{D^2}r^5+...\right)}{rs\left[\left(m\frac{\beta_г}{D}R-1\right)\left(R+\frac{1}{3!}\frac{s}{D}R^3+...\right)+\left(R+\frac{1}{2!}\frac{s}{D}R^3+\frac{1}{4!}\frac{s^2}{D^2}R^5+...\right)\right]} \tag{19}$$

Як випливає з рівняння (19), для зворотнього перетворення Лапласа можна використати другу теорему розкладу на основі коренів знаменника рівняння (18).

$$\psi(s)=rs\left[\left(m\frac{\beta_г}{D}R-1\right)sh\sqrt{\frac{s}{D}}R+\sqrt{\frac{s}{D}}Rch\sqrt{\frac{s}{D}}R\right]=0 \quad . \tag{20}$$

Рівняння (20) має корені:

s=0 (нульовий корінь).

безліч коренів s_n на основі :

$$\left(m\frac{\beta_г}{D}-1\right)sh\sqrt{\frac{s}{D}}R+\sqrt{\frac{s}{D}}Rch\sqrt{\frac{s}{D}}R=\left(m\frac{\beta_г}{D}-1\right)\frac{1}{i}\sin i\sqrt{\frac{s}{D}}R+\sqrt{\frac{s}{D}}R\cos i\sqrt{\frac{s}{D}}R=0 \;. \quad (21)$$

Впровадимо позначення $i\sqrt{\frac{s}{D}}R=\mu$, тоді $s_n=-\frac{D\mu_n^2}{R^2}$, де μ_n визначається з характеристичного рівняння на основі (21) :

$$(m\frac{\beta_г}{D}-1)\sin\mu_n+\mu_n\cos\mu_n=0 \;. \quad (22)$$

Згідно з рівнянням (19) для нульового кореня отримуємо :

$$\lim_{s\to 0}\frac{\phi(s)}{\psi'(s)}=\frac{C_г-C_n m}{m}=\frac{C_г}{m}-C_n \;. \quad (23)$$

Для решти коренів знаходимо:

$$\psi'(s)=r\left[\left(m\frac{\beta_г R}{D}-1\right)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{D}}Rch\sqrt{\frac{s}{D}}R+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{D}}Rch\sqrt{\frac{s}{D}}R+\frac{1}{2}\frac{s}{D}R^2sh\sqrt{\frac{s}{D}}R\right] \;. \quad (24)$$

При $s\to s_n$

$$\psi'(s_n)=\frac{1}{2}\frac{r\mu_n}{i}\left[\left(m\frac{\beta_г R}{D}-1\right)\cos\mu_n+\cos\mu_n-\mu_n\sin\mu_n\right]=\frac{r\mu_n}{2i}(m\frac{\beta_г R}{D}\cos\mu_n-$$
$$-\mu_n\sin\mu_n) \quad (25)$$

На основі (18) :

$$\phi(s_n)=(C_г-mC_n)\frac{\beta_г R^2}{Di}\sin\mu_n\frac{r}{R} \;. \quad (26)$$

Згідно з другою теоремою розкладу маємо:

$$L^{-1}\left[\frac{\phi(s)}{\psi(s)}\right]=\lim_{s\to 0}\frac{\phi(s)}{\psi'(s)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(s_n)}{\psi'(s_n)}\cdot\exp(s_n\cdot Fo_m) \;, \quad (27)$$

Тоді на основі рівнянь (18, 25, 26) отримуємо :

$$\frac{\phi(s_n)}{\psi'(s_n)}=\frac{(C_г-mC_n)\frac{\beta_г}{D}R^2\sin\mu_n\frac{r}{R}}{\frac{r\mu_n}{2}\left(m\frac{\beta_г}{D}r\cos\mu_n-\mu_n\sin\mu_n\right)} \;. \quad (28)$$

Розв’язок в оригіналі на основі (21) набирає вигляду:

$$C-C_n=\frac{C_г}{m}-C_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(C_г-mC_n)\frac{\beta_г}{D}R^2\sin\mu_n\frac{r}{R}}{r\mu_n\left(m\frac{\beta_г}{D}R\cos\mu_n-\mu_n\sin\mu_n\right)}\exp(-\mu_n^2 Fo_m). \quad (29)$$

Рівняння (29) описує розвиток поля концентрації в часі .

Для визначення середньої за об’ємом краплі концентрації $\overline{C}$ необхідно рівняння (29) проінтегрувати за радіусом з урахуванням сферичної системи :

$$\overline{C}=\frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 C dr \;. \quad (30)$$

Тоді :

$$\overline{C}=\frac{3}{R^3}\int_0^R r^2\frac{R^2\sin\left(\mu_n\frac{r}{R}\right)dr}{r}=3\frac{r}{\mu_n^2}(\sin\mu_n-\mu_n\cos\mu_n) \;. \quad (31)$$

На основі рівнянь (29-31) отримуємо :

$$\overline{C} = \frac{C_г}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(C_г - mC_n)\frac{\beta_г}{D}R(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n)}{\mu_n^3\left(m\frac{\beta_г}{D}R\cos\mu_n - \mu_n\sin\mu_n\right)} \times \exp\left(-\mu_n^2 Fo_m\right). \quad (32)$$

Експоненціальна функція у рівнянні (33) $\exp\left(-\mu_n^2 Fo_m\right)$ із зростанням μ_n і τ швидко зменшується . Тому на практиці у багатьох випадках можна для розрахунків використовувати тільки першу складову суми, оскільки наступні складові практично не впливають на результат.

Адекватність рівняння (32) перевірялася за експериментальними даними десорбції CO_2 з крапель діаметрами 4,7 – 5,2 мм розчинів у воді з початковими концентраціями $C_п$ = 40 – 200 мг/л при T = 293 К, D = $2{,}1\cdot10^{-9}$ м^2/с.

Оскільки вміст CO_2 у повітрі майже 0,04 % [5, 7], то практично можна вважати $C_г$ =0. Поділивши чисельник і знаменник правої частини на m та прологарифмувавши результат, одержимо лінійну залежність безрозмірної концентрації А від Fo_m:

$$\ln A = -\ln B \cdot \mu_n^2 Fo_m, \quad (33)$$

де $A = \dfrac{\overline{C}}{C_n}$; $B = \dfrac{6Nu_г(\mu_n\cdot\cos\mu_n - \sin\mu_n)}{m\mu_n^3(mNu_г\cdot\cos\mu_n - \mu_n\cdot\sin\mu_n)}$.

Експериментальні результати підтвердили залежність (33) при трьох коренях $\mu_n = \pi n$ з середньою різницею розрахункових та експериментальних даних 12,5 %, що задовольняє вимогам до технічних розрахунків.

The most prognostic structural mathematical model of desorption from drops in motionless gaseous medium has been developed. This model allows to calculate the concentration of dis-solved gas in any moment of time for drops of known diameter, which fall down from the less than 5 m height. Adequacy of the model has been verified on the example of carbon dioxide desorption from drops of water solution.

Література

1. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепломассопереноса.- М.: Госэнергоиздат, 1963. – 596 с.
2. Мазяк З.Ю. Тепло и массоперенос в пористых телах при переменных потенциалах в среде. – К.: Вища школа, 1979. – 232 с.
1. Александров И.А. Массопередача при ректификации и абсорбции многокомпонентных смесей. – Л.: Химия, 1979. - 320 с.
2. Федоткин И.М., Жарик Б.Н., Погоржельский М.Н. Интенсификация технологических процессов пищевых производств. – Київ: Техніка, 1984. – 176 с.
3. Рамм В.М. Абсорбция газов. – М.: Химия, 1976. – 655 с.
4. Кафаров В.В. Основы массопередачи. Системы газ – жидкость, пар – жидкость, жидкость – жидкость. 3 – е изд., перераб. – М.: Высшая школа,1979. – 439 с.
5. Кульский Л.А., Строкач П.П. Технология очистки природных вод. – Киев: Вища школа, 1986. – 352 с.
6. Карпінська І.А., Кравчук О.О., Слотюк О.Г. Гідродинаміка аераторів з розбризкуванням води через перфоровані днища// Вісник ТДТУ. – 1998. – Т. 3. – С. 125 –129.

Одержано 15.12.2000 р.