

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра електричної інженерії

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольних робіт з курсу

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Тернопіль
2023

Методичні вказівки для виконання контрольних робіт з курсу «Теоретичні основи електротехніки»

Укладач: к.ф.-м.н., доц. Закордонець В.С.

Рецензент: к.т.н., доцент, Л.Т. Мовчан Л.Т.

Відповідальний за випуск: к.ф.-м.н., доц. Закордонець В.С.

Затверджено на засіданні кафедри електричної інженерії
Тернопільського національного технічного університету
імені Івана Пулюя
Протокол № 10 від 25.05.23 р.

Схвалено й рекомендовано до друку на засіданні науково-методичної ради
факультету прикладних інформаційних технологій та електроінженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
Протокол № 11 від 07.06.23 р.

Посібник складено відповідно до навчальної програми з курсу «Теоретичні основи електротехніки» а також літературних джерел, наведених у переліку.

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки складаються з трьох розділів. У першому наведено основні формули та поняття теорії електромагнітного поля. У другому – приклади розв’язування типових задач, присвячених розрахунку електричного, магнітного та електромагнітного полів. Розглянуто основні методи розрахунку; метод суперпозиції, Гауса, рівнянь Пуассона та Лапласа для скалярного й векторного потенціалу, дзеркального зображення та ін.. У третьому – розміщено задачник, в якому наведено задачі, аналогічні тим, які розглянуто в другому розділі. Задачі подано в кількості, необхідній як для аудиторних, так і для домашніх завдань.

У кінці методичних вказівок наведено три контрольних роботи, кожна з яких складається з п’ятдесяти варіантів. Перша контрольна робота присвячена розрахунку електростатичного поля, друга – розрахунку поля постійного струму та магнітного поля, третя стосується розрахунку електромагнітного поля.

Методичні вказівки сприятимуть покращенню якості навчального процесу, поглибленню знань і навичок з курсу „Теоретичні основи електротехніки”.

ЗМІСТ

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ.....	6
1.1. Основні формули векторного аналізу	6
1.2. Електростатичне поле.....	7
1.3. Стаціонарне електричне поле.....	9
1.4. Магнітне поле.....	10
1.5. Електромагнітне поле.....	12
2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ.....	16
2.1. Розрахунок електростатичного поля.....	16
2.2. Розрахунок стаціонарного електричного поля.....	21
2.3. Розрахунок магнітного поля.....	25
2.4. Розрахунок електромагнітного поля.....	33
3. ЗАДАЧНИК.....	37
3.1. Розрахунок електростатичного поля.....	37
3.2. Розрахунок стаціонарного електричного поля.....	41
3.3. Розрахунок магнітного поля.....	45
3.4. Розрахунок електромагнітного поля.....	48
4. КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ.....	52
4.1. Контрольна робота №1.....	52
4.2. Контрольна робота №2.....	54
4.3. Контрольна робота №3.....	56
ДОДАТКИ.....	58
ЛІТЕРАТУРА.....	60

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

1.1. Основні формули векторного аналізу

Оператор набла

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1)$$

Градiєнт скалярної функції φ

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Дивергенція вектора \vec{E}

$$\text{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (3)$$

Ротор вектора \vec{E}

$$\text{rot} \vec{E} = [\nabla \vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}, \quad (4)$$

Потiк вектора \vec{E} крiзь поверхню \vec{S}

$$N = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E_n dS, \quad (5)$$

Теорема Гауса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV \quad (6)$$

Циркуляція вектора \vec{E} по замкненому контуру

$$C = \oint_S \vec{E} d\vec{L} = \oint_L E_L dL \quad (7)$$

Теорема Стокса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{L} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} \quad (8)$$

Лапсасiан довiльної скалярної функції

$$\text{div} \cdot \text{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (9)$$

Ротор градiєнта довiльної скалярної функції

$$\text{rot} \cdot \text{grad} \varphi = 0. \quad (10)$$

Дивергенція ротора довiльної векторної функції

$$\operatorname{div} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (11)$$

Дивергенція векторного добутку двох довільних векторів \vec{E} і \vec{H}

$$\operatorname{div} [\vec{E} \cdot \vec{H}] = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}. \quad (12)$$

Ротор від ротора довільної векторної функції

$$\operatorname{rot} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}. \quad (13)$$

1.2. Електростатичне поле

Електричне поле (статичне і стаціонарне) характеризується двома основними векторами: напруженістю електричного поля \vec{E} , та електричною індукцією \vec{D} .

Напруженість електростатичного поля визначається за силою \vec{F} , яка діє на нерухомий точковий заряд q

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (1)$$

Сила взаємодії точкових зарядів q_1 і q_2 в електростатичному полі визначається законом Кулона

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \quad (2)$$

де r - відстань між зарядами, \vec{e}_r - одиничний вектор, направлений від першого заряду до другого, ϵ - відносна діелектрична проникність оточуючого середовища, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ - електрична стала.

Напруженість поля точкового заряду q

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \quad (3)$$

\vec{e}_r - одиничний вектор, направлений від заряду величиною q в точку спостереження, r - відстань від заряду до точки спостереження.

Для діелектрика

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (4)$$

де \vec{P} - вектор електричної поляризації.

Для лінійного діелектрика

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}, \quad (5)$$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (6)$$

де χ_e - відносна діелектрична сприйнятність.

Електростатична теорема Гауса в інтегральній формі

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q, \quad (7)$$

і в диференціальній формі

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (8)$$

де q - алгебраїчна сума вільних зарядів, які знаходяться в об'ємі, обмеженому поверхнею інтегрування S , ρ - густина вільних зарядів.

Для електричного поля різниця потенціалів між точками a і b :

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{E} d\vec{L} \quad (9)$$

потенціал

$$\varphi = - \int \vec{E} d\vec{l} + C, \quad (10)$$

де $d\vec{l}$ - елемент шляху інтегрування, C - постійна інтегрування.

Потенціал поля точкового заряду q :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (11)$$

Критерій потенціальності електричного поля в інтегральній формі:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{L} = 0 \quad (12)$$

де l - контур інтегрування, і в диференціальній формі:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (13)$$

Скалярний потенціал електростатичного поля вводиться співвідношенням:

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \varphi. \quad (14)$$

В однорідному середовищі для потенціалу справедливі рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (15)$$

і Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (16)$$

де ρ - об'ємна густина заряду.

Для лінійного середовища справедливий принцип суперпозиції

$$\vec{E} = \sum_k \vec{E}_k, \quad (17)$$

$$\varphi = \sum_k \varphi_k, \quad (18)$$

де \vec{E}_k , φ_k - напруженість і потенціал, що створюються в точці спостереження k -тим точковим зарядом.

Для статичних полів на межі поділу двох діелектриків справедливі граничні умови:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (19)$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (20)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (21)$$

де D_n - нормальна до межі поділу середовищ складова вектора електричної індукції, σ - поверхнева густина заряду на межі поділу середовищ.

Енергію електричного поля можна визначити через вектори поля:

$$W = \int_V \frac{\vec{D}\vec{E}}{2} dV, \quad (22)$$

де V - об'єм, який займає поле.

1.3. Стаціонарне електричне поле

У провідному середовищі стаціонарне електричне поле призводить до появи просторово розподіленого струму, для якого справедливий закон Ома в диференціальній формі

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1)$$

де \vec{j} - густина струму, σ - питома провідність середовища.

Закон неперервності постійного струму в інтегральній формі

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0, \quad (2)$$

і в диференціальній формі

$$\text{div} \vec{j} = 0, \quad (3)$$

де \vec{j} - густина струму.

Потужність електричних втрат в одиниці об'єму

$$p = \vec{j}\vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}, \quad (4)$$

Граничні умови на поверхні поділу двох провідників

$$\vec{j}_{1n} = \vec{j}_{2n}, \quad \text{або} \quad \sigma_1 \vec{E}_{1n} = \sigma_2 \vec{E}_{2n}, \quad (5)$$

$$\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}, \quad (6)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (7)$$

де j_n і D_n - нормальні до межі поділу середовищ складові векторів густини струму й електричної індукції, E_τ - тангенціальна до межі поділу середовищ складова вектора напруженості електричного поля, φ - потенціал.

Магнітне поле

Магнітне поле характеризується двома основними векторами: магнітною індукцією \vec{B} , та напруженістю магнітного поля \vec{H} . Індукцію магнітного поля можна визначити по силі, яка діє на заряд q , який рухається з постійною швидкістю \vec{v} :

$$\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}], \quad (1)$$

або по силі, яка діє на лінійний провід довжиною l із струмом I :

$$\vec{F} = I \int_l [d\vec{l}\vec{B}], \quad (2)$$

де $d\vec{l}$, елемент довжини лінійного проводу.

Магнітна індукція, яка збуджується струмом описується законом Біо-Савара-Лапласа

$$\vec{B} = \int_V \frac{\mu\mu_0 [\vec{j}\vec{e}_r]}{4\pi r^2} dV, \quad (3)$$

де \vec{j} - густина струму, r - відстань від елемента об'єму dV до точки спостереження, \vec{e}_r - одиничний вектор, направлений від елемента об'єму в точку спостереження.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \quad (4)$$

де \vec{H} і \vec{M} - вектори напруженості магнітного поля і намагніченості, μ_0 - магнітна стала.

Для лінійного магнітного середовища

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (5)$$

де χ_m - магнітна сприйнятність, і

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad (6)$$

де μ - відносна магнітна проникність середовища.

Закон повного струму в інтегральній формі

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \int_S \vec{j} d\vec{S} = I \quad (7)$$

і в диференціальній формі

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (8)$$

де L контур інтегрування, S - поверхня інтегрування, \vec{j} - густина струму провідності.

Закон неперервності магнітного поля в інтегральній формі

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (9)$$

і в диференціальній формі

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (10)$$

де S - поверхня інтегрування.

Векторний магнітний потенціал вводиться співвідношенням

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (11)$$

Магнітний потік

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{L}. \quad (12)$$

В однорідному середовищі рівняння Пуассона для векторного потенціалу

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}. \quad (13)$$

Граничні умови:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (14)$$

де B_n - нормальна до межі поділу середовищ складова вектора індукції поля;

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (15)$$

де H_τ - тангенціальна до межі поділу середовищ складова вектора напруженості поля;

$$A_{1\tau} = A_{2\tau}, \quad (16)$$

де A_τ - тангенціальна до межі поділу середовищ складова векторного магнітного потенціалу.

Для лінійного середовища справедливий принцип суперпозиції

$$\vec{B} = \sum_k \vec{B}_k, \quad (17)$$

$$\vec{A} = \sum_k \vec{A}_k, \quad (18)$$

де B_k і A_k - складові, які відповідають струмам, що їх збуджують.

При розрахунках магнітного поля в лінійних середовищах часто застосовують метод дзеркальних зображень. Він особливо ефективний у випадку плоскої або циліндричної поверхні поділу між двома середовищами з різними магнітними проникностями.

Якщо границя плоска, то магнітне поле провідника зі струмом I у тому середовищі, в якому він розміщений, визначається струмом I і фіктивним струмом I_1 , розміщеним дзеркально-симетрично границі поділу середовищ. При цьому магнітна проникність всього простору повинна бути рівною магнітній проникності μ_1 тієї області, в якій знаходиться провідник зі струмом I і в якій за цією розрахунковою схемою визначається поле. Струм

$$I_1 = I \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \quad (19)$$

де μ_2 - магнітна проникність другого середовища.

В другому середовищі поле визначається фіктивним струмом I_2 , розміщеним там же, де струм I . Магнітна проникність всього простору дорівнює μ_2 . Струм

$$I_2 = I \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1}. \quad (20)$$

Поза провідниками зі струмом, для опису магнітного поля можна ввести скалярний магнітний потенціал φ_m

$$\vec{H} = -\text{grad}\varphi_m. \quad (21)$$

Магнітна напруга між точками a і b

$$U_m = \varphi_{ma} - \varphi_{mb} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}. \quad (22)$$

В однорідному середовищі для скалярного магнітного потенціалу справедливе рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (23)$$

Енергія магнітного поля

$$W = \int_V \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV, \quad (24)$$

де V - об'єм, який займає поле.

Електромагнітне поле

Повний струм

$$\vec{j}_n = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

Закон неперервності повного струму в інтегральній формі

$$\oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \quad (2)$$

і в диференціальній формі

$$\text{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3)$$

Закон повного струму в інтегральній формі

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \int_S \vec{j}_n d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (4)$$

Закон електромагнітної індукції

$$e = \oint_L \vec{E} d\vec{L} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (5)$$

Електромагнітне поле описується системою рівнянь Максвела

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (9)$$

і рівняннями зв'язку між векторами

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad (10)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \quad (11)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (12)$$

де \vec{j} - густина струму провідності, ρ - об'ємна густина вільного заряду, σ - питома провідність середовища, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

Електродинамічний скалярний і векторний потенціали із векторами поля пов'язані співвідношеннями

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (13)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (14)$$

де \vec{A} - електродинамічний векторний потенціал, φ - електродинамічний скалярний потенціал.

Електродинамічні потенціали задовольняють рівнянням Пуассона

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 \vec{A} = -\mu \mu_0 \vec{j}, \quad (15)$$

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \nabla^2 \varphi = -\varepsilon \varepsilon_0 \rho, \quad (16)$$

і пов'язані залежністю

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (17)$$

де

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (18)$$

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – швидкість світла у вакуумі.

Енергія електромагнітного поля

$$W_{em} = \int_V \frac{\vec{D}\vec{E}}{2} dV + \int_V \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV, \quad (19)$$

де V - об'єм, який займає поле.

Теорема Умова-Пойнтінга

$$-\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \sigma \vec{E}^2 dV + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}, \quad (20)$$

де

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}], \quad P_d = \int_V \sigma \vec{E}^2 dV, \quad P_{em} = \frac{\partial W_{em}}{\partial t}, \quad (21)$$

відповідно вектор Пойнтінга, P_d - потужність теплових втрат всередині об'єму V , обмеженому замкненою поверхнею S , P_{em} - зміна енергії електромагнітного поля в тому ж об'ємі.

Коефіцієнт поширення плоскої хвилі

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\mu_0(\sigma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)}, \quad (22)$$

коефіцієнт згасання

$$\alpha = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{(\omega\varepsilon\varepsilon_0)^2} + 1} - 1 \right)}, \quad (23)$$

коефіцієнт фази

$$\beta = \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{(\omega\varepsilon\varepsilon_0)^2} + 1} + 1 \right)}, \quad (24)$$

модуль і аргумент хвильового опору

$$z_x = \sqrt{\frac{(\mu\mu_0\omega)^2}{\sigma^2 + (\varepsilon\varepsilon_0\omega)^2}}, \quad \varphi_x = \arctg \frac{\alpha}{\beta}, \quad (25)$$

фазова швидкість

$$\mathcal{V}_f = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f = \frac{\lambda}{T}, \quad (26)$$

де ω - кутова частота, σ - коефіцієнт електропровідності, λ - довжина хвилі, T - період.

В ідеальному діелектрику $\sigma = 0$, і параметри хвилі мають вигляд:

коефіцієнт поширення

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}; \quad (27)$$

коефіцієнт згасання $\alpha = 0$;

коефіцієнт фази

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}, \quad (28)$$

довжина хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}, \quad (29)$$

модуль і аргумент хвильового опору

$$z_x = R_x = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}, \quad \varphi_x = 0, \quad (30)$$

фазова швидкість

$$g_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (31)$$

де c - швидкість світла.

В провідному середовищі $\sigma \gg \omega\varepsilon\varepsilon_0 \approx 0$ і параметри хвилі мають вигляд:
коефіцієнт поширення

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\omega\mu\mu_0\sigma} \cdot e^{j\pi/4} = k + jk = \sqrt{2}ke^{j\pi/4}; \quad (31)$$

коефіцієнт згасання і коефіцієнт фази

$$\alpha = \beta = k = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\sigma}{2}}; \quad (32)$$

довжина хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{\omega\mu\mu_0\sigma}}; \quad (33)$$

модуль і аргумент хвильового опору

$$z_x = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{\sigma}}, \quad \varphi_x = \frac{\pi}{4}; \quad (34)$$

фазова швидкість

$$g_f = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\mu_0\sigma}}; \quad (35)$$

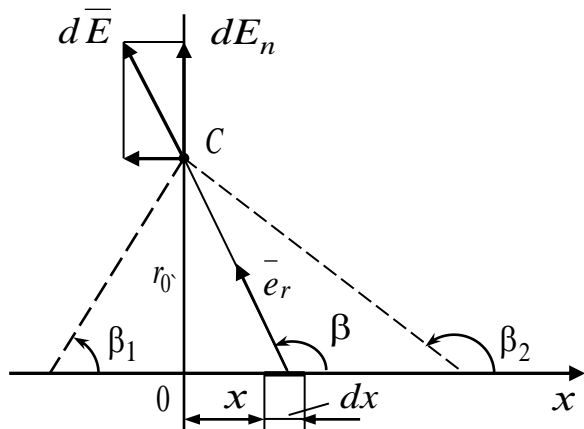
глибина проникнення хвилі в провідне середовище

$$\Delta = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\mu_0\sigma}}. \quad (36)$$

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

2.1. Розрахунок електростатичного поля

Задача 1. Тонкий стержень довжиною l несе рівномірно розподілений по довжині заряд з лінійною густиною τ . Знайти напруженість поля в точці C , яка знаходиться на відстані r_0 від відрізка, і яку з його лівого і правого кінців видно під кутами β_1 і β_2 .



Розв'язок. Виділимо на стержні нескінченно малу ділянку довжиною dx . Очевидно, що заряд $dq = \tau dx$, який там знаходиться, можна вважати точковим. Знайдемо напруженість, яку він створює в точці C :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\tau dx}{r^2} \vec{e}_r,$$

де r - відстань від виділеного елемента до точки C , \vec{e}_r - одиничний вектор, направлений в точку C .

Тангенціальна складова вектора $d\vec{E}$

$$dE_\tau = dE \cos(\pi - \beta) = -\frac{\tau \cos \beta}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dx,$$

а його нормальна складова

$$dE_n = dE \sin(\pi - \beta) = \frac{\tau \sin \beta}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dx.$$

Кут β будемо відраховувати від позитивного напрямку осі абсцис до позитивного напрямку радіуса r .

Із рисунка бачимо, що

$$r = \frac{r_0}{\sin \beta}, \quad x = r_0 \operatorname{cth}(\pi - \beta) = -r_0 \operatorname{cth} \beta, \quad dx = \frac{r_0 d\beta}{\sin^2 \beta}.$$

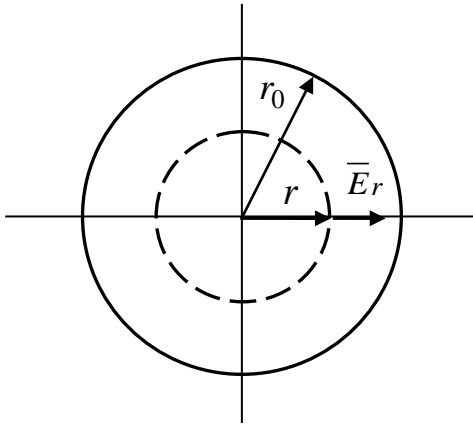
Після підстановки та інтегрування отримаємо:

$$E_\tau = \frac{-\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = \frac{-\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_0} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2);$$

$$E_n = \frac{\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_0} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2);$$

$$E = \sqrt{E_\tau^2 + E_n^2}.$$

Задача 2. Знайти напруженість і потенціал поля, створеного зарядженою кулею радіусом r_0 , всередині якої розподілений електричний заряд, об'ємна густина якого змінюється за законом $\rho = \rho_0 \left(r/r_0 \right)^2$.



Розв'язок. Згідно із умовами симетрії задачі бачимо, що напруженість поля направлена по радіусах r , проведених із центра кулі, тобто $E = E_r$.

Застосовуючи теорему Гауса для сферичних поверхонь з центром в початку координат, знаходимо:

а) для внутрішньої області ($r \leq r_0$)

$$N = \varepsilon\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = \\ = \int_V \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 dV = \int_0^r \frac{4\pi\rho_0}{r_0^2} r^4 dr = \frac{4\pi\rho_0 r^5}{5r_0^2},$$

звідки

$$E = E_r = \frac{\rho_0 r^3}{5\varepsilon\varepsilon_0 r_0^2},$$

б) для зовнішньої області ($r \geq r_0$), для будь-якої сфери, яка охоплює весь заряд

$$N = \varepsilon\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = \int_V \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 dV = \int_0^{r_0} \frac{4\pi\rho_0}{r_0^2} r^4 dr = \frac{4\pi\rho_0 r_0^3}{5},$$

звідки

$$E = E_r = \frac{\rho_0 r_0^3}{5\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Потенціал залежить тільки від радіуса і для внутрішньої області його визначаємо співвідношенням

$$\varphi(0) - \varphi(r) = \int_0^r E dr = \int_0^r \frac{\rho_0 r^3}{5\varepsilon\varepsilon_0 r_0^2} dr = \frac{\rho_0 r^4}{20\varepsilon\varepsilon_0 r_0^2},$$

аналогічно для зовнішньої області

$$\varphi(r_0) - \varphi(r) = \int_r^{r_0} E dr = \int_r^{r_0} \frac{\rho_0 r_0^3}{5\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho_0 r_0^3}{5\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right).$$

Вважаючи, що $\varphi(r) = 0$ при $r = \infty$, із попередньої формули знайдемо

$$\varphi(r_0) = \frac{\rho_0 r_0^2}{5\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Оскільки на межі першої і другої зон потенціал неперервний, то для $\varphi(0)$ отримаємо

$$\varphi(0) = \frac{\rho_0 r_0^2}{4\epsilon\epsilon_0}.$$

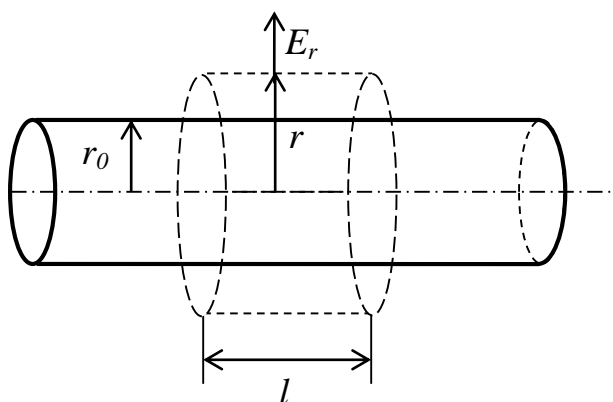
Знайдемо розподіл потенціалу у внутрішній області:

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{20\epsilon\epsilon_0} \left[5 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right].$$

Аналогічно, знайдемо розподіл потенціалу у зовнішній області:

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0 r_0^3}{5\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Задача 3. Уздовж довгої труби радіусом r_0 розподілений електричний заряд лінійною густиною τ . Знайти розподіл напруженості електричного поля, якщо відносна діелектрична проникність оточуючого середовища ϵ .



Розв'язок. Унаслідок циліндричної симетрії електричне поле має тільки радіальну складову $E = E_r$. Оточимо ділянку труби довжиною l коаксіальною циліндричною поверхнею радіусом r , яка обмежена з торців площинами, нормальними до осі.

Застосовуючи теорему Гауса і враховуючи, що в усіх точках циліндричної поверхні $E_r = E$ легко

знаходимо

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_r \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \int_l \tau dl = \frac{\tau l}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Звідси

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

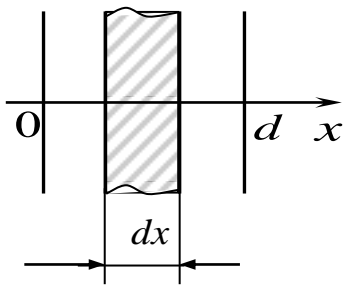
Потенціал залежить тільки від радіуса. Його визначаємо співвідношенням

$$\varphi(r_0) - \varphi(r) = \int_{r_0}^r E dr = \int_{r_0}^r \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Якщо прийняти потенціал на поверхні труби $\varphi(r_0) = 0$, то для розподілу потенціалу отримаємо

$$\varphi(r) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Задача 4. Потенціал між електродами плоского конденсатора змінюється за законом $\varphi = -ax^3 - bx - c$, де a, b і c - постійні. Електроди являють собою квадрати площею S , відстань між якими d . Простір між електродами заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю ϵ . Знайти об'ємний заряд між електродами конденсатора.



Розв'язок. Густина заряду між електродами знайдемо із рівняння Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0},$$

звідки

$$\rho = -\epsilon\epsilon_0 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -6a\epsilon\epsilon_0 x.$$

Між електродами конденсатора на відстані x від початку координат уявно виділимо шар товщиною dx і знайдемо його заряд

$$dq = \rho dV.$$

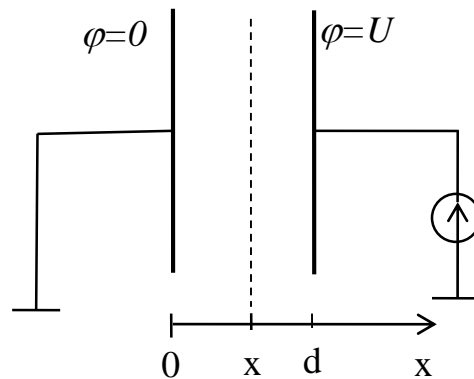
Заряд між електродами знайдемо шляхом інтегрування по об'єму конденсатора

$$q = \int_V \rho dV = \int_0^d (6a\epsilon\epsilon_0 S) x dx = 3a\epsilon\epsilon_0 S d^2.$$

Задача 5. Між електродами плоского конденсатора, відстань між якими d , знаходиться заряд з об'ємною густиною $\rho = -a\epsilon_0 x$, де a - постійна. Знайти закон зміни потенціалу між електродами, якщо лівий електрод конденсатора заземлений, а потенціал правого - U .

Розв'язок. Потенціал між електродами конденсатора задовольняє рівняння Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}.$$



Двічі інтегруючи його по координаті, розподіл потенціалу знайдемо у вигляді

$$\varphi(x) = -\frac{a}{6\epsilon} x^3 + C_1 x + C_2.$$

Постійні інтегрування C_1 і C_2 знайдемо із граничних умов

$$\varphi(0) = C_2 = 0,$$

$$\varphi(d) = -\frac{ad^3}{6\varepsilon} + C_1d + C_2 = U.$$

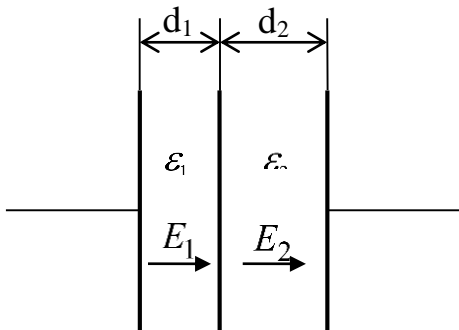
Звідси для постійних інтегрування отримаємо

$$C_1 = \frac{U}{d} + \frac{ad^2}{6\varepsilon}, \quad C_2 = 0.$$

Враховуючи величини C_1 і C_2 , розподіл потенціалу знайдемо у вигляді

$$\varphi(x) = \frac{ad^2}{6\varepsilon} x \left(1 - \frac{x^2}{d^2} \right) + U \frac{x}{d}.$$

Задача 6. Знайти напруженість електричного поля і ємність двошарового плоского конденсатора, якщо товщина першого шару діелектрика d_1 , а другого d_2 . Абсолютна діелектрична проникність першого шару ε_1 , а другого ε_2 . Вважати, що $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$, і $d_2 = 1.5d_1$.



Розв'язок. Нехай різниця потенціалів між електродами конденсатора дорівнює U . Спотворюючи дію країв конденсатора на поле враховувати не будемо. За цієї умови поле в кожному шарі можна вважати однорідним. Внаслідок того, що нормальна складова вектора \vec{D} неперервна,

$$D_1 = D_2.$$

Враховуючи, що $D_{1n} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1$, а $D_{2n} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2$, отримаємо

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2.$$

Друге рівняння, яке зв'яже E_1 і E_2 , складемо, виходячи з того, що

$$\int_0^{d_1} \vec{E}_1 d\vec{x} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 d\vec{x} = U,$$

або

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U.$$

Розв'язуючи спільно отримані рівняння, отримаємо

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2}, \quad E_2 = \frac{U}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} d_1 + d_2}.$$

Ємність двошарового конденсатора знайдемо як ємність двох послідовно з'єднаних конденсаторів C_1 і C_2 , де

$$C_1 = \varepsilon_1 \frac{S}{d_1}, \quad C_2 = \varepsilon_2 \frac{S}{d_2},$$

відповідно ємності першого і другого шарів конденсатора, S - площа електрода конденсатора.

Ємність двох послідовно ввімкнутих конденсаторів

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}.$$

2.2. Розрахунок стаціонарного електричного поля

Задача 1. Вугільна пластина являє собою $3/4$ диска з концентрично вирізаним круглим отвором. Внутрішній радіус диска r_1 , зовнішній - r_2 . Між краями, до яких приєднані мідні електроди, підтримується постійна різниця потенціалів U . Визначити мінімальну та максимальну густину струму в пластинці. Вважати, що товщина пластини постійна, а її питома провідність σ .

Розв'язок. Уявно, на відстані r від центра диска виділимо смугу товщиною dx . У межах смуги густина струму, а отже і напруженість електричного поля, будуть постійними. Напруженість знайдемо із закону Ома в диференціальній формі

$$E = \frac{j}{\sigma}.$$

Знайдемо напругу між краями

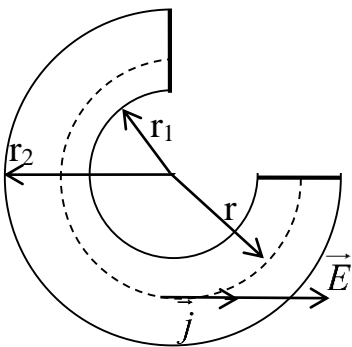
$$U = \int_0^{\frac{3}{4}2\pi r} \vec{E} d\vec{l} = E \frac{3}{2} \pi r.$$

З отриманих рівнянь для густини струму отримаємо

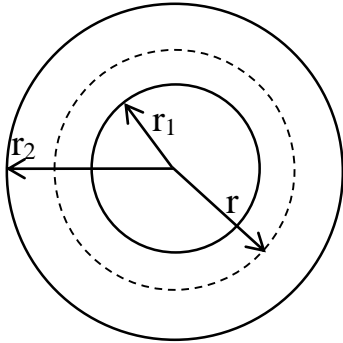
$$j = \frac{2U\sigma}{3\pi r}.$$

Максимальний і мінімальний струми відповідно будуть дорівнювати

$$j_{\min} = \frac{2U\sigma}{3\pi r_2}, \text{ і } j_{\max} = \frac{2U\sigma}{3\pi r_1}.$$



Задача 2. Циліндричний конденсатор має радіуси електродів $r_1 = 2$ см, $r_2 = 5$ см і довжину $l=2$ м. Питома провідність ізоляції $\sigma = 10^{-9}$ См/м. Визначити втрати в ізоляції конденсатора, якщо до нього прикладена напруга $U = 50$ кВ.



Розв'язок. Внаслідок симетричного розміщення електродів і ізоляції відносно осі кабелю вектори напруженості електричного поля і густини струму всюди направлені по радіусах і на однакових відстанях від осі будуть мати однакову величину. Всередині ізоляції конденсатора в напрямку осі проведемо циліндричну поверхню радіусом r ($r_1 \leq r \leq r_2$) і обчислимо потік через неї вектора густини струму

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = 2\pi r l j.$$

Отже,

$$j = \frac{I}{2\pi r l}, \quad E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \cdot 2\pi r l \sigma}.$$

Напругу між електродами знайдемо шляхом інтегрування

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{2\pi l \sigma r} dr = \frac{I}{2\pi l \sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Звідси, для розподілу напруженості отримаємо

$$E = \frac{I}{2\pi l \sigma r} = \frac{U}{r \cdot \ln(r_2/r_1)}.$$

В одиниці об'єму конденсатора виділяється потужність

$$p = \sigma E^2 = \frac{\sigma}{r^2} \left(\frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \right)^2.$$

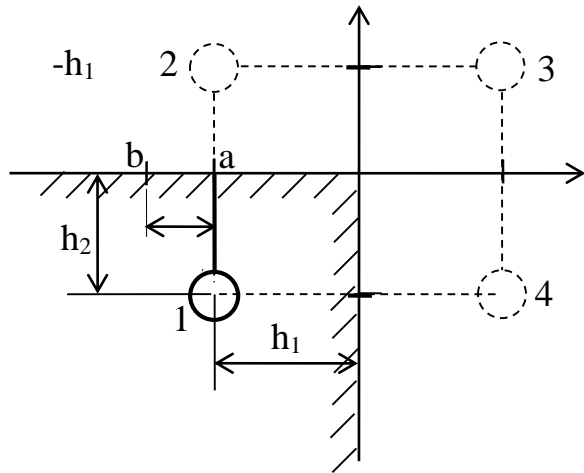
Втрати в циліндричному шарі радіуса r товщиною dr і довжиною l

$$dP = p \cdot dV = p \cdot 2\pi r l \cdot dr.$$

Втрати в усьому об'ємі ізоляції між електродами конденсатора

$$P = \int_V dP = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma}{r^2} \left(\frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \right)^2 \cdot 2\pi r l \cdot dr = \frac{2\pi \sigma l U^2}{\ln(r_2/r_1)} = 340 \text{ Вт}.$$

Задача 3. Вивести формули для обчислення опору заземлення і крокової напруги між точками а і б, якщо заземлювач виготовлений у вигляді металевої кулі радіусом r_0 , розміщеної в ґрунті з питомою провідністю $\sigma = 10^{-2}$ См/м, поблизу глибокого обриву. Довжина кроку $\lambda = 0.8$ м, $h_1 = 10$ м, $h_2 = 5$ м.



Розв'язок. Для визначення потенціалу кулі використаємо метод дзеркального зображення. Лінії струму на поверхні землі не мають нормальних складових. Вони йдуть вздовж поверхні. Тому електричне поле кулі в неоднорідному провідному середовищі буде аналогічним електричному полю чотирьох куль в однорідному середовищі тільки у тому випадку, коли на дзеркальних зображеннях будуть струми такого ж знаку, як на кульовому заземлювачі. Потенціал

поверхні кульового заземлювача можна знайти сумуючи потенціали, зумовлені кожною із куль

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4.$$

Радіус кулі значно менший від відстаней між кулями, тому при визначенні потенціалу, зумовленого будь якою із куль, можна знехтувати спотвореннями поля, яке вносять інші кулі. Розглядаючи поле ізольованого сферичного заземлювача радіуса r_0 із струмом розтікання I , необхідно уявно оточити заземлювач сферичною поверхнею радіуса $r > r_0$. Внаслідок симетрії густина струму на цій поверхні направлена нормально до неї (по радіусах сфери) і в усіх точках має величину

$$j = \frac{I}{4\pi r^2}.$$

За законом Ома в диференціальній формі напруженість поля на відстані r від заземлювача

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2},$$

і потенціал

$$\varphi = -\int E \cdot dr = \frac{I}{4\pi\sigma r} + C,$$

причому $C = 0$, якщо при $r = \infty$ потенціал $\varphi = 0$.

Тому в зображеній на рисунку системі чотирьох куль з однаковими струмами I отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{I}{4\pi\sigma r_0}; & \varphi_2 &= \frac{I}{4\pi\sigma 2h_2}; \\ \varphi_3 &= \frac{I}{4\pi\sigma 2\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}; & \varphi_4 &= \frac{I}{4\pi\sigma 2h_1}. \end{aligned}$$

Опір кульового заземлювача

$$R_3 = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{1}{8\pi\sigma} \left(\frac{2}{r_0} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right) = 17.5 \text{ Ом.}$$

Потенціал точки a знайдемо як суперпозицію потенціалів, які створює заземлювач і його зображення

$$\varphi_a = \frac{2I}{4\pi\sigma h_2} + \frac{2I}{4\pi\sigma \sqrt{h_2^2 + (2h_1)^2}} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + (2h_1)^2}} \right).$$

Аналогічно потенціал точки b

$$\varphi_b = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{h_2^2 + \lambda^2}} + \frac{1}{\sqrt{h_2^2 + (2h_1 + \lambda)^2}} \right).$$

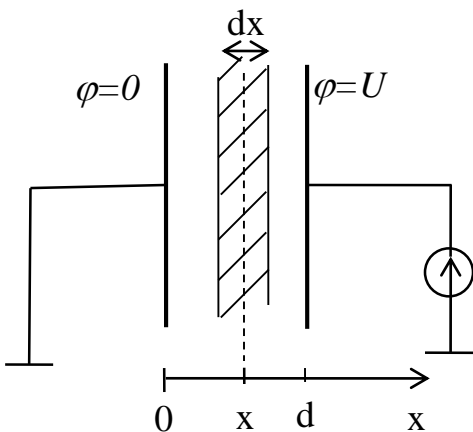
Напруга між точками a і b

$$U_{\kappa} = \varphi_a - \varphi_b = 0.07I.$$

Для того, щоб крокова напруга не переважала 150В, струм у заземлювачі не повинен перевищувати

$$I_{\max} = \frac{U_{\kappa}}{0.07} = 2140 \text{ А.}$$

Задача 4. В плоскому конденсаторі, до якого прикладена напруга U , внаслідок високої температури однієї з пластин питомий опір змінюється за законом $\rho = \rho_0 \left[1 + k(x/d) \right]$. Визначити опір ізоляції конденсатора та густину струму, якщо площа пластини S , а відстань між пластинами d . Знайти розподіли напруженості і потенціалу.



Розв'язок. Між пластинами конденсатора виділимо тонкий шар товщиною dx і знайдемо його опір

$$dR = \rho \frac{dx}{S} = \rho_0 \left(1 + k \frac{x}{d} \right) \frac{dx}{S}.$$

Визначимо опір ізоляції конденсатора

$$R = \int_0^d \rho_0 \left(1 + k \frac{x}{d} \right) \frac{dx}{S} = \frac{\rho_0 d}{2S} (k + 2).$$

Струм втеч через конденсатор та густину струму знайдемо із закону Ома в

інтегральній формі

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2US}{\rho_0 d(k+2)},$$

звідки

$$j = \frac{I}{S} = \frac{2U}{\rho_0 d(k+2)}.$$

Напруженість поля знайдемо із закону Ома в диференціальній формі

$$E = j\rho = \frac{2U}{d(k+2)} \left(1 + \frac{kx}{d}\right).$$

Знайдемо розподіл потенціалу

$$\varphi(x) = -\int E dx + C = -\int \frac{2U}{d(k+2)} \left(1 + \frac{kx}{d}\right) dx + C = -\frac{U}{k(k+2)} \left(1 + \frac{kx}{d}\right)^2 + C.$$

Використовуючи граничні умови знайдемо постійну інтегрування

$$\varphi(0) = -\frac{U}{k(k+2)} + C = 0,$$

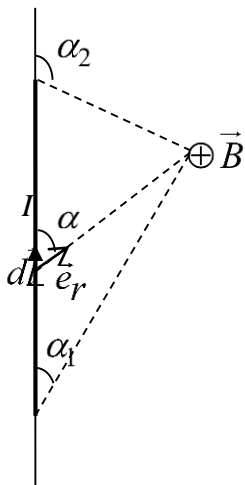
звідки

$$C = \frac{U}{k(k+2)}.$$

Для розподілу потенціалу отримаємо

$$\varphi(x) = \frac{U}{k(k+2)} \left[\left(1 + \frac{kx}{d}\right)^2 - 1 \right].$$

2.3. Розрахунок магнітного поля постійного струму



Задача 1. Визначити індукцію, яка створюється відрізком провідника із струмом I у точці, що знаходиться на відстані r_0 від його осі, якщо радіус-вектори, проведені з кінців провідника в дану точку, утворюють з напрямком струму кути α_1 і α_2 відповідно.

Розв'язок. Виділимо на провіднику нескінченно малу ділянку довжиною dl . Елементарну напруженість, яку вона створює в точці спостереження, знайдемо із закону Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I [d\vec{l} \vec{e}_r]}{4\pi r^2},$$

де r - відстань від виділеного елемента до точки спостереження, \vec{e}_r - одиничний вектор, направлений в точку спостереження. Для модуля елементарної індукції отримаємо

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl.$$

Як бачимо з рисунка,

$$r = \frac{r_0}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r}{\sin \alpha} d\alpha.$$

Підставляючи отримані співвідношення в формулу для dB , знайдемо

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I \sin^2 \alpha}{4\pi r_0^2} \frac{r_0}{\sin^2 \alpha} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r_0} d\alpha.$$

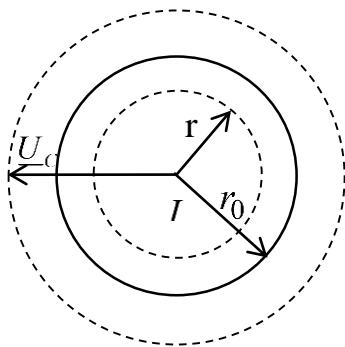
Індукцію, яка створюється відрізком провідника, визначимо шляхом інтегрування

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

У граничному випадку нескінченно довгого відрізка $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \infty$, $\cos \alpha_1 = 1$, $\cos \alpha_2 = -1$, тому

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}.$$

Задача 2. По прямому нескінченно довгому циліндричному проволу радіусом r_0 в напрямку від спостерігача протікає струм I . Використовуючи закон повного струму, знайти напруженість магнітного поля всередині і зовні проволу.



Розв'язок. Унаслідок симетрії, лінії вектора напруженості магнітного поля являють собою кола, центри яких лежать на осі циліндра. Очевидно, що на однакових відстанях від осі модуль напруженості поля однаковий. Розглянемо циркуляцію вектора напруженості вздовж силової лінії, яка знаходиться всередині проволу. Згідно із законом повного струму циркуляція буде дорівнювати струму, який охоплюється цим контуром.

$$\oint_L \vec{H}_1 d\vec{L} = I \frac{r^2}{r_0^2}$$

Враховуючи, що вектори \vec{H}_1 і $d\vec{l}$ мають однаковий напрямок отримаємо

$$\oint_L H_1 dL = H_1 \cdot 2\pi r = I \frac{r^2}{r_0^2}, \quad H_1 = \frac{Ir}{2\pi r_0^2}.$$

Найбільшою напруженість буде на поверхні провідника:

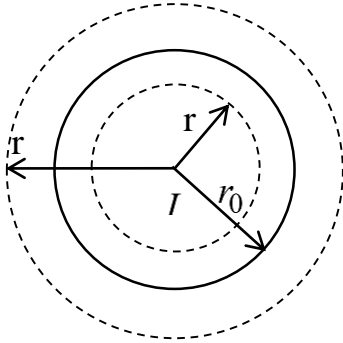
$$H_{1\max} = \frac{I}{2\pi r_0}.$$

Якщо контур інтегрування провести вздовж магнітної лінії, яка проходить зовні проводу, то циркуляція \vec{H}_2 буде дорівнювати струму в провіді:

$$\oint_L \vec{H}_2 d\vec{L} = H_2 \cdot 2\pi r = I \quad H_2 = \frac{I}{2\pi r}.$$

На границі $r = r_0$

$$H_1 = H_2 = \frac{I}{2\pi r_0} = H_{\max}.$$



Задача 3. По прямому нескінченному циліндричному проводу радіусом r_0 в напрямку від спостерігача протікає струм I . Знайти розподіл напруженості та векторного потенціалу магнітного поля всередині і зовні проводу. Задачу розв'язати за допомогою рівнянь Пуассона та Лапласа для векторного потенціалу.

Розв'язок. Вісь циліндричної системи координат Oz сумістимо з віссю проводу і направимо вздовж струму. Оскільки провідник симетричний, то струм по перерізу провідника розподілиться рівномірно. Густина струму в провіднику

$$\vec{j} = \vec{k} j_z = \vec{k} \frac{I}{\pi r_0^2}.$$

Так як напрямок векторного потенціалу співпадає з вектором густини струму, то векторний потенціал буде мати тільки одну проекцію A_z . Рівняння Пуассона в циліндричній системі координат для першої області ($0 \leq r \leq r_0$) буде мати вигляд

$$\nabla^2 A_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) = -\mu\mu_0 j_z,$$

причому A_z і j_z залежать тільки від r .

Двічі інтегруючи по радіусу і враховуючи, що $j = j_z$, отримаємо

$$A = A_z = -\frac{\mu\mu_0 j r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2.$$

Напруженість поля

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot} \vec{A}.$$

Враховуючи вираз для ротора в циліндричній системі координат і те, що $H = H_\psi$, $A = A_z$, для азимутальної складової напруженості магнітного поля отримаємо

$$H = H_\psi = -\frac{1}{\mu\mu_0} \frac{dA_z}{dr}.$$

Таким чином,

$$H = \frac{jr}{2} - \frac{C_1}{\mu\mu_0 r}.$$

Оскільки напруженість магнітного поля величина скінчена, то постійна інтегрування $C_1 = 0$. Приймаючи векторний потенціал на поверхні проводу таким, що дорівнює нулю, отримаємо:

$$C_2 = \frac{\mu\mu_0 jr_0^2}{4} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}.$$

Отже, для першої області

$$H_1 = H_\psi = \frac{jr}{2} = \frac{Ir}{2\pi r_0^2}.$$

Враховуючи величини постійних інтегрування C_1 і C_2 для розподілу векторного потенціалу в першій області, отримаємо

$$A_1 = A_z = -\frac{\mu\mu_0 r^2}{4} + \frac{\mu\mu_0 jr_0^2}{4} = \frac{\mu\mu_0 j (r_0^2 - r^2)}{4} = \frac{\mu\mu_0 I (r_0^2 - r^2)}{4\pi r_0^2}.$$

На осі векторний потенціал дорівнює:

$$A_0 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}.$$

У другій області ($r_0 \leq r < \infty$) струму немає і поле буде описуватися рівнянням Лапласа

$$\nabla^2 A_z = \frac{1}{r} \frac{d\left(r \frac{dA_z}{dr}\right)}{dr} = 0,$$

причому A_z залежать тільки від r .

Інтегруючи, для векторного потенціалу поза провідником отримаємо

$$A = A_z = C_3 \ln r + C_4.$$

Напруженість поля

$$H_2 = H_\psi = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dA_z}{dr} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{d(C_3 \ln r + C_4)}{dr} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{C_3}{r}.$$

Оскільки поверхневих струмів на границі немає, то азимутальна складова напруженості на поверхні проводу неперервна. При $r = r_0$ $H_1 = H_2$ і

$$\frac{I r_0}{2\pi r_0^2} = -\frac{C_3}{\mu_0 r_0},$$

звідки

$$C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}.$$

Враховуючи вигляд C_3 для напруженості магнітного поля в другій області отримаємо

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}.$$

Оскільки на поверхні провідника векторний потенціал дорівнює нулю, то

$$C_3 \ln r + C_4 = 0.$$

Враховуючи вираз для C_3 , отримаємо

$$C_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_0.$$

Враховуючи величини постійних інтегрування C_3 і C_4 для розподілу векторного потенціалу в другій області, отримаємо

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}.$$

Задача 4. Дослідити магнітне поле трубчатого провідника з внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім r_2 , по якому в напрямку від спостерігача протікає постійний струм I . При розв'язуванні задачі скористатися першим рівнянням Максвелла.

Розв'язок. Область, зайняту полем, можна розбити на три частини і для кожної з них записати перше рівняння Максвелла:

$$\text{при } 0 \leq r \leq r_1 \quad \text{rot } \vec{H}_1 = 0;$$

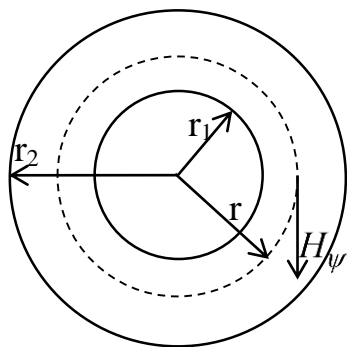
$$\text{при } r_1 \leq r \leq r_2 \quad \text{rot } \vec{H}_2 = \vec{j};$$

$$\text{при } r_2 \leq r \leq \infty \quad \text{rot } \vec{H}_3 = 0.$$

Вісь Oz циліндричної системи координат сумістимо з віссю проводу і направимо в напрямку струму. Внаслідок циліндричної симетрії вектор напруженості магнітного поля буде мати тільки азимутальну проекцію H_ψ , яка буде залежати тільки від радіальної координати r .

Вектор густини струму буде паралельним до осі Oz і дорівнює

$$\vec{j} = \vec{k} j_z = \vec{k} \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}.$$



Розгорнемо $\text{rot}\vec{H}$ в циліндричній системі координат

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \psi} - \frac{\partial H_\psi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\psi \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \vec{k} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rH_\psi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \psi} \right).$$

Враховуючи, що $H = H_\psi$, $j = j_z$, для трьох областей отримаємо:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_1)}{\partial r} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_2)}{\partial r} = j = \frac{I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_3)}{\partial r} = 0.$$

Після інтегрування визначимо напруженість магнітного поля в трьох областях

$$H_1 = \frac{C_1}{r}; \quad H_2 = \frac{Ir}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{C_2}{r}; \quad H_3 = \frac{C_3}{r}.$$

Для визначення постійних інтегрування C_1 , C_2 і C_3 врахуємо, що напруженість поля H величина скінчена. Крім того, оскільки на границі немає поверхневих струмів, азимутальна складова напруженості магнітного поля H_ψ – величина неперервна.

Постійна $C_1 = 0$, оскільки при $r = 0$, напруженість H_1 прямувала б до нескінченості. Отже, в області $0 \leq r \leq r_1$

$$H_1 = 0$$

і магнітного поля немає.

При $r = r_1$ повинна виконуватися рівність $H_1 = H_2$ або

$$H_2 = \frac{Ir_1}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{C_2}{r_1} = 0,$$

звідки

$$C_2 = -\frac{Ir_1^2}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}.$$

З урахуванням величини C_2 напруженість магнітного поля в області $r_1 \leq r \leq r_2$ дорівнює

$$H_2 = \frac{I(r^2 - r_1^2)}{2\pi r(r_2^2 - r_1^2)}.$$

При $r = r_2$ згідно із граничною умовою $H_2 = H_3$

$$\frac{I}{2\pi r_2} = \frac{C_3}{r_2}$$

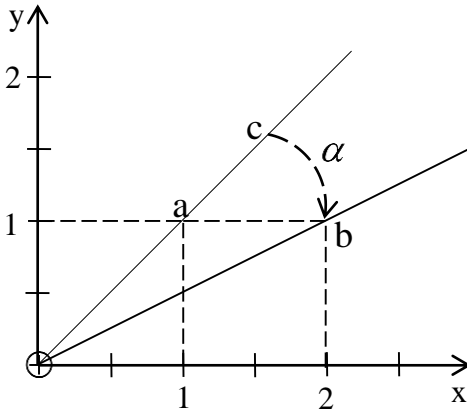
або

$$C_3 = \frac{I}{2\pi}.$$

Тоді, з урахуванням величини C_2 , в області $r_2 \leq r \leq \infty$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}.$$

Задача 5. Вздовж прямолінійного довгого проводу в напрямку від спостерігача протікає струм 36А. Визначити напруженість магнітного поля в точках a і b , координати яких $x_a = 1\text{см}$, $y_a = 1\text{см}$, $x_b = 1\text{см}$, $y_b = 2\text{см}$.



Розв'язок. В області поза струмами магнітна напруга не залежить від шляху інтегрування, тому

$$U_{mab} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l} = \int_a^c \vec{H} d\vec{l} + \int_c^b \vec{H} d\vec{l}.$$

Як бачимо з рисунка, на ділянці ac вектори \vec{H} і $d\vec{l}$ взаємно перпендикулярні, і $\vec{H} d\vec{l} = 0$, а на ділянці cb - взаємно паралельні, тому $\vec{H} d\vec{l} = H_c dl$. Таким чином

$$U_{mab} = \int_a^c \vec{H} d\vec{l} + \int_c^b \vec{H} d\vec{l} = \int_c^b H_c dl = H_c(cb).$$

Використовуючи закон повного струму знайдемо напруженість магнітного поля в точці c

$$H_c = \frac{I}{2\pi r_c},$$

де I - струм в провіднику, r_c - відстань від провідника до точки c .

Знайдемо довжину дуги (ab)

$$(ab) = r_c \cdot \alpha,$$

де $\alpha = \arctg 1 - \arctg 0.5 = \pi/10$.

Враховуючи сказане,

$$U_{mab} = H_c(ab) = \frac{I}{2\pi r_c} \cdot r_c \cdot \alpha = I \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{36}{20} = 1.8 \text{А}.$$

Задача 6. Прямолінійний довгий провід, уздовж якого протікає струм I_1 , розміщений в повітрі ($\mu_1 = 1$) паралельно до плоскої поверхні сталльної плити ($\mu_2 = 999$) у точці з координатами $x = 0$, $y = 2\text{см}$. Розрахувати напруженість

магнітного поля в точках a і b координати яких $x_a = 2\text{см}$, $y_a = 2\text{см}$, $x_b = 2\text{см}$, $y_b = -2\text{см}$.

Розв'язок. Застосуємо метод дзеркального відображення і знайдемо зображення струму I_1 в сталій плиті і в повітрі.

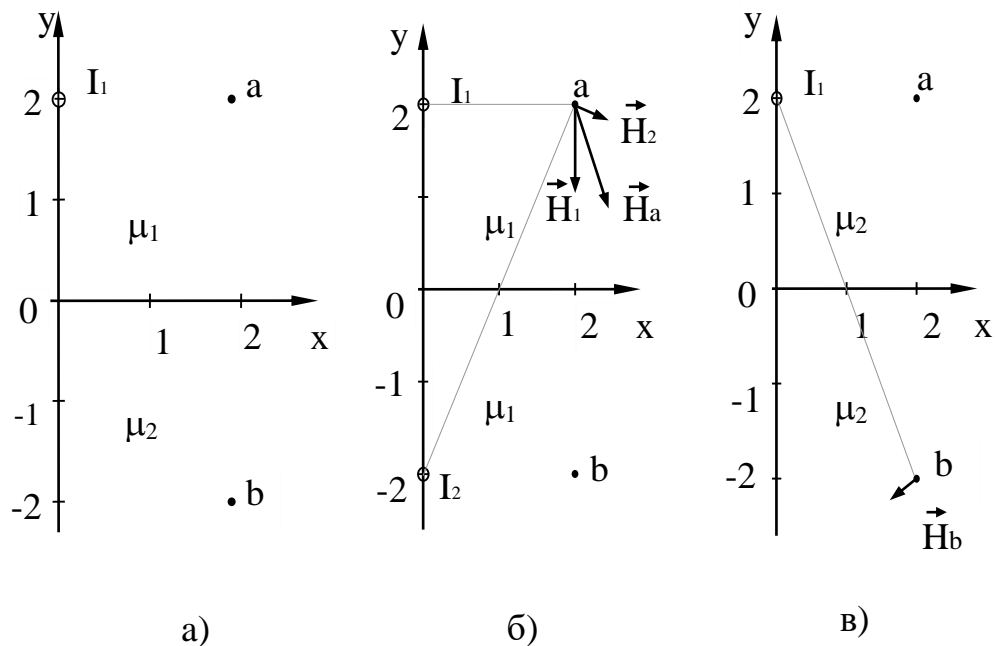
$$I_2 = I \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = 10 \frac{999 - 1}{999 + 1} = 9.98\text{A}.$$

$$I_3 = I \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = 10 \frac{2}{999 + 1} = 0.02\text{A}.$$

Напруженість магнітного поля в точці a знайдемо як суперпозицію напруженостей, які створюються струмами I_1 та I_2 . Як бачимо із рисунка b ,

$$\vec{H}_a = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

Згідно із законом повного струму

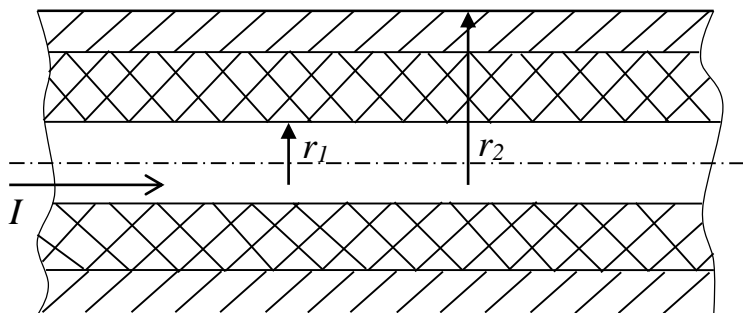


$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r_1} = \frac{10}{2\pi \cdot 0.02} = 79.5 \frac{\text{A}}{\text{м}}$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi r_2} = \frac{9.98}{2\pi \sqrt{(0.02)^2 + (0.04)^2}} = 35.4 \frac{\text{A}}{\text{м}}$$

2.4. Розрахунок електромагнітного поля

Задача 1. До коаксіального кабелю із зовнішнім радіусом жили r_1 та внутрішнім радіусом оболонки r_2 прикладена напруга U , під дією якої в кабелі протікає струм I . Знайти потужність, яка передається в ізоляції між жилою та оболонкою кабелю. Втратами потужності в кабелі знехтувати.



Розв'язок. В ізоляції коаксіального кабелю без втрат вектор \vec{E} має тільки радіальну складову

$$E_r = \frac{U}{r \ln(r_2/r_1)},$$

вектор \vec{H} - тільки азимутальну

$$H_\alpha = \frac{I}{2\pi r}.$$

Вектор Пойнтінга буде мати тільки поздовжню складову

$$\Pi = \Pi_z = E_r H_\alpha = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln(r_2/r_1)}.$$

В жилі й оболонці вектор Пойнтінга дорівнює нулю, оскільки $E = 0$. Потужність, яка передається всередині циліндричної поверхні радіусом r ($r_1 \leq r \leq r_2$),

$$P = \int_{r_1}^{r_2} \Pi \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln(r_2/r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = UI.$$

Задача 2. Визначити тангенс кута втрат α , який складає напруженість електричного поля з нормаллю до поверхні жили в точці, що належить поверхні жили коаксіального кабелю. Підрахувати величину потоку вектора Пойнтінга через бокову поверхню жили на довжині 1 м і порівняти його з втратами енергії в жилі на довжині 1 м. Радіус мідної жили $r_1 = 0.3$ см, внутрішній радіус оболонки $r_2 = 1$ см.

Напруга між жилою і оболонкою $U = 10^5$ В.

Розв'язок. Нормальна складова напруженості електричного поля на поверхні жили

$$E_n = \frac{U}{r_1 \ln(r_2/r_1)} = \frac{10^4}{0.003 \cdot \ln \frac{1}{0.3}} = 2.77 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Тангенціальна складова напруженості електричного поля на поверхні жили за законом Ома

$$E_{\tau} = \frac{I}{\pi r_1^2 \sigma} = \frac{50}{\pi \cdot 0.003^2 \cdot 5.8 \cdot 10^7} = 3.05 \cdot 10^{-2} \text{ В/м.}$$

Вектор напруженості електричного поля \vec{E} складає з нормаллю до поверхні жили кут α , тангенс якого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_{\tau}}{E_n} = 1.1 \cdot 10^{-7}.$$

Напруженість магнітного поля на поверхні жили має тільки тангенціальну складову. За законом повного струму

$$H = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{50}{2\pi \cdot 0.003} = 2650 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

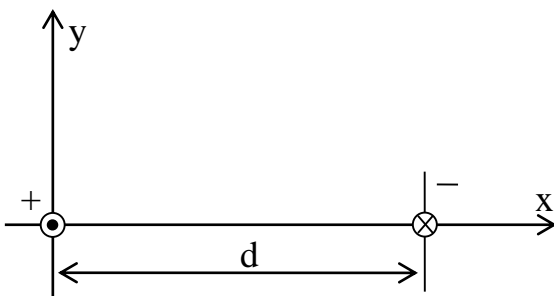
Для визначення величини потоку вектора Пойнтінга всередину жили на довжині 1м слід помножити складову вектора Пойнтінга $E_{\tau}H$, яка проникає всередину жили на величину бокової поверхні жили на довжині 1м,

$$E_{\tau}H \cdot 2\pi r_1 \cdot 1 = 3.05 \cdot 10^{-2} \cdot 2650 \cdot 2\pi \cdot 0.003 \cdot 1 = 1.523 \text{ Вт.}$$

Ця величина дорівнює втратам енергії в жилі кабелю на довжині в 1м,

$$P = I^2 R = I^2 \frac{l}{\sigma S} = \frac{50^2}{5.8 \cdot 10^7 \pi \cdot 0.003^2} = 1.523 \text{ Вт.}$$

Задача 3. По двопровідній лінії постійного струму передається потужність P при струмі I . Нехтуючи опором проводів, опір яких R_0 , знайти залежність вектора Пойнтінга від координати x уздовж лінії, яка з'єднує осі проводів



Розв'язок. На лінії, яка з'єднує осі проводів (вісь абсцис), складові вектора \vec{E} зумовлені кожним із проводів окремо, або збігаються за напрямком, або мають протилежний напрямок. Те саме стосується складових вектора \vec{H} . На основі електростатичної теореми Гауса поза проводами для вектора

\vec{E} , який має на осі x тільки складову E_x ,

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d} \right),$$

де $\tau = C_0 U$, і $C_0 = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln(d/r_0)}$ - ємність лінії на одиницю довжини.

На основі закону повного струму поза проводами для вектора \vec{H} , який має тільки одну складову H_y ,

$$H_y = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d} \right).$$

Вектор Пойнтінга поза проводами на осі x має складову

$$\Pi_z = E_x H_y = \frac{UI}{4\pi \ln(d/r_0)} \frac{d^2}{x^2 (x-d)^2}.$$

Всередині проводів $\Pi = 0$, так як $E = 0$.

Задача 4. Плоска хвиля частотою 5000 Гц падає на поверхню провідного середовища. Визначити глибину проникнення і фазову швидкість, якщо провідність середовища $\sigma = 10^7 \text{ См/м}$, а його магнітна проникність $\mu = 10^3$.

Розв'язок. Глибину проникнення визначимо зі співвідношення

$$\Delta = \frac{1}{k},$$

де

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0 \sigma}{2}} = 14100 \text{ м}.$$

Глибина проникнення $\Delta = 1/k = 7 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, тобто на відстані 0.007 см амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів зменшаться в 2.71 рази.

Фазову швидкість знайдемо із співвідношення

$$v = \frac{2\pi f}{k} = \frac{2\pi \cdot 5000}{14100} = 2.25 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 5. Між електродами плоского конденсатора знаходиться неідеальний діелектрик ($\sigma = 10^{-4} \text{ См/м}$, $\varepsilon = 6$). Конденсатор приєднаний до джерела синусоїдної напруги $u = U_m \sin \omega t$. Відстань між електродами $d = 3 \text{ см}$. Обчислити амплітуди густин струмів провідності та зміщення для частоти $f = 3 \cdot 10^5 \text{ Гц}$, якщо $U_m = 3000 \text{ В}$.

Розв'язок. Оскільки поле плоского конденсатора однорідне, то напруженість електричного поля визначимо зі співвідношення

$$E = \frac{u}{d} = \frac{U_m \sin 2\pi f \cdot t}{d}.$$

Густину струму провідності знайдемо із закону Ома

$$j = \sigma E = \frac{\sigma U_m}{d} \sin 2\pi f \cdot t = j_m \sin 2\pi f \cdot t,$$

де

$$j_m = \frac{U_m \sigma}{d} = \frac{3000 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-2}} = 10 \frac{A}{m^2}$$

амплітуда густини струму провідності.

Густину струму зміщення знайдемо зі співвідношення

$$\begin{aligned} j_{zm} &= \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \epsilon_0 E) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \epsilon_0 \frac{U_m \sin 2\pi f \cdot t}{d} \right) = \\ &= \frac{2\pi f \epsilon \epsilon_0 U_m}{d} \cos 2\pi f \cdot t = j_m^{zm} \cos 2\pi f \cdot t \end{aligned}$$

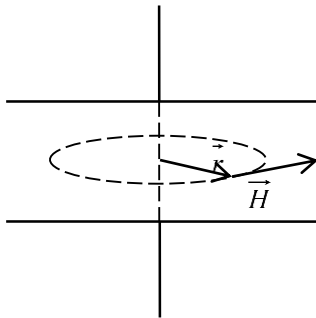
де

$$j_m^{zm} = \frac{2\pi f \epsilon \epsilon_0 U_m}{d} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3000}{3 \cdot 10^{-2}} = 10 \frac{A}{m^2},$$

амплітуда густини струму зміщення.

Задача 6. До плоского конденсатора з повітряною ізоляцією прикладена напруга $u = U_m \sin \omega t$. Електроди конденсаторів мають форму дисків і розміщені на відстані $d = 1 \text{ см}$. Знайти вираз для миттєвих значень напруженості магнітного поля в точках, які лежать між пластинами конденсатора на відстані r від осі симетрії,

якщо $U_m = 3000 \text{ В}$, а $\omega = 1000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.



Розв'язок. Для визначення густини струму провідності скористаємося розв'язком попередньої задачі

$$j_{zm} = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\omega \epsilon \epsilon_0 U_m}{d} \cos \omega \cdot t.$$

Уявно оточимо вісь конденсатора контуром радіуса r і застосуємо до нього закон повного струму

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = H 2\pi r = i,$$

де

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{S} = j_{zm} S = \frac{\omega \epsilon \epsilon_0 U_m}{d} \pi r^2 \cos \omega \cdot t$$

- струм, який охоплюється контуром, H - напруженість магнітного поля в точках контуру.

Із отриманих рівнянь визначаємо напруженість:

$$H \cdot 2\pi r = \frac{\omega \epsilon \epsilon_0 U_m}{d} \pi r^2 \cos \omega \cdot t,$$

$$H = \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0 U_m}{2d} r \cos \omega \cdot t =$$

$$= \frac{10^3 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-2}} \cdot r \cdot \cos \omega \cdot t = 4.425 \cdot 10^{-4} \cdot r \cdot (\cos \omega \cdot t) \frac{A}{m}$$

3. ЗАДАЧНИК

3.1. Розрахунок електростатичного поля

1. Тонкий стержень довжиною $l = 20 \text{ см}$ несе рівномірно розподілений по довжині заряд з лінійною густиною $\tau = 10^{-9} \text{ Кл/м}$. Визначити напруженість електричного поля в точці, яка віддалена від кінців стержня на відстані $r_1 = 25 \text{ см}$ і $r_2 = 15 \text{ см}$. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 2$.

2. Тонкий стержень довжиною $l = 15 \text{ см}$ несе рівномірно розподілений по довжині заряд $q = 10^{-9} \text{ Кл}$. Визначити електричну індукцію в точці, яка віддалена від кінців стержня на відстані $r_1 = r_2 = 15 \text{ см}$.

3. Металева рамка, що має форму квадрата зі стороною $a = 8 \text{ см}$ несе рівномірно розподілений по довжині заряд $q = 10^{-8} \text{ Кл}$. Визначити напруженість електричного поля в точці, яка віддалена від центра рамки на відстань $h = 12 \text{ см}$. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 2$.

4. Металева рамка, що має форму правильного шестикутника зі стороною $a = 4 \text{ см}$ несе рівномірно розподілений по довжині заряд з лінійною густиною $\tau = 2 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}$. Визначити напруженість електричного поля в точці, яка віддалена від вершин рамки на відстань $l = 9 \text{ см}$. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 2$.

5. Тонкий стержень довжиною $l = 20 \text{ см}$ несе рівномірно розподілений по довжині заряд з лінійною густиною $\tau = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}$. Визначити електричну індукцію в точці, яка віддалена від кінців стержня на відстані $r_1 = 20 \text{ см}$, і $r_2 = 15 \text{ см}$.

6. Ебонітова куля радіусом $r_0 = 2 \text{ см}$ несе рівномірно розподілений заряд, з об'ємною густиною $\rho = 2 \text{ мкКл/м}^3$. Визначити залежність напруженості електричного поля від відстані до центра кулі.

7. Ебонітова куля радіусом $r_0 = 2 \text{ см}$ несе рівномірно розподілений по об'єму заряд $q = 10^{-10} \text{ Кл}$. Визначити залежність напруженості електричного поля від відстані до центра кулі.

8. Довгий ебонітовий циліндр радіусом $r_0 = 1.5 \text{ см}$ несе рівномірно розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = 2 \text{ мкКл/м}^3$. Визначити залежність напруженості від відстані до осі циліндра. Крайовим ефектом знехтувати.

9. Довгий ебонітовий циліндр радіусом $r_0 = 2\text{см}$ несе рівномірно розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = 1.5\text{мкКл}/\text{м}^3$. Визначити залежність потенціалу від відстані до осі циліндра. Крайовим ефектом знехтувати.

10. Провідне кільце радіусом $r_0 = 10\text{см}$ несе заряд $q = 5 \cdot 10^{-9}\text{Кл}$. Знайти напруженість електричного поля на осі кільця, на відстані $h = 25\text{см}$ від центра. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 3$.

11. Провідне кільце радіусом $r_0 = 5\text{см}$ несе рівномірно розподілений довжині заряд з лінійною густиною $\tau = 10^{-9}\text{Кл}/\text{м}$. Знайти напруженість електричного поля на осі кільця, на відстані $h = 10\text{см}$ від центра. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 2$.

12. Провідне кільце радіусом $r_0 = 5\text{см}$ несе рівномірно розподілений довжині заряд $q = 8 \cdot 10^{-9}\text{Кл}$. Знайти напруженість електричного поля на осі кільця в точці, яка рівновіддалена від точок кільця на відстань $l = 9\text{см}$. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 8$.

13. Заряджений диск радіусом $r_0 = 6\text{см}$ несе рівномірно розподілений по поверхні заряд $q = 5 \cdot 10^{-6}\text{Кл}$. Знайти напруженість електричного поля на осі диска, на відстані $h = 8\text{см}$ від центра. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 8$.

14. Заряджений диск радіусом $r_0 = 3\text{см}$ несе рівномірно розподілений по поверхні заряд з поверхневою густиною $\sigma = 5 \cdot 10^{-4}\text{Кл}/\text{м}^2$. Знайти напруженість електричного поля на осі диска, на відстані $h = 4\text{см}$ від центра. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 1$.

15. Заряджений диск радіусом $r_0 = 6\text{см}$ несе рівномірно розподілений по поверхні заряд $q = 5 \cdot 10^{-6}\text{Кл}$. Знайти електричну індукцію на осі диска, на відстані $h = 5\text{см}$ від центра.

16. Показати, що електричне поле, утворене зарядженим диском, в граничному випадку переходить в електричне поле нескінченної площини.

17. Показати, що електричне поле, утворене зарядженим диском, в граничному випадку переходить в електричне поле точкового заряду.

18. Тонкий стержень довжиною $l = 30\text{см}$ несе рівномірно розподілений по довжині заряд з лінійною густиною $\tau = 10^{-9}\text{Кл}/\text{м}$. Визначити потенціал електричного поля в точці, яка віддалена від кінців стержня на відстані $r_1 = 25\text{см}$, і $r_2 = 15\text{см}$. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 2$.

19. Тонкий стержень довжиною $l = 20\text{см}$ несе рівномірно розподілений по довжині заряд $q = 10^{-8}\text{Кл}$. Визначити потенціал електричного поля в точці, яка

віддалена від кінців стержня на відстані $r_1 = 25\text{см}$, і $r_2 = 10\text{см}$. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 4$.

20. Ебонітова куля радіусом $r_0 = 2\text{см}$ несе рівномірно розподілений по об'єму заряд, з об'ємною густиною $\rho = 2\text{мкКл/м}^3$. Визначити залежність потенціалу електричного поля від відстані до центру кулі.

21. Тонкий стержень довжиною $l = 40\text{см}$ несе рівномірно розподілений по довжині заряд з лінійною густиною $\tau = 2 \cdot 10^{-10}\text{Кл/м}$. Визначити потенціал електричного поля в точці, яка віддалена від кінців стержня на відстані $r_1 = 25\text{см}$, і $r_2 = 15\text{см}$. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 2$.

22. Довгий циліндр радіуса $r_0 = 3\text{см}$, заряджений рівномірно з лінійною густиною $\tau = 10^{-8}\text{Кл/м}$. Визначити різницю потенціалів між двома точками, які знаходяться на відстані $r_1 = 3\text{см}$ і $r_2 = 8\text{см}$ від осі циліндра в його середній частині. Діелектрична проникність оточуючого середовища $\varepsilon = 8$.

23. Плоска скляна пластинка товщиною $d = 2\text{см}$ заряджена рівномірно з об'ємною густиною $\rho = 10\text{мкКл/м}^3$. Знайти різницю потенціалів між точкою, яка лежить на поверхні пластини, і точкою, яка знаходиться посередині пластини. Вважати, що розміри пластини великі в порівнянні з її товщиною.

24. Суцільна парафінова куля радіусом $r_0 = 4\text{см}$ рівномірно заряджена з об'ємною густиною $\rho = 1\text{мкКл/м}^3$. Визначити розподіл потенціалу всередині і зовні кулі.

25. Суцільна парафінова куля радіусом $r_0 = 2\text{см}$ рівномірно заряджена з об'ємною густиною $\rho = 2.5\text{мкКл/м}^3$. Визначити розподіл потенціалу всередині і зовні кулі.

26. Довгий ебонітовий циліндр радіусом $r = 1.5\text{см}$ несе рівномірно розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = 2\text{мкКл/м}^3$. Визначити залежність потенціалу від відстані до осі циліндра. Крайовим ефектом знехтувати.

27. Довгий ебонітовий циліндр зовнішній радіус якого $r_1 = 1.5\text{см}$ і внутрішній $r_2 = 1\text{см}$ несе рівномірно розподілений по об'єму заряд з об'ємною густиною $\rho = 2\text{мкКл/м}^3$. Визначити залежність потенціалу від відстані до осі циліндра. Крайовим ефектом знехтувати.

28. Потенціал між електродами плоского конденсатора змінюється по закону $\varphi = -ax^3 - bx - c$, де a , b і c постійні. Електроди являють собою квадрати площею $S = 3\text{см}^2$, відстань між якими $d = 2\text{мм}$. Простір між електродами заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$. Знайти об'ємний заряд між електродами конденсатора.

29. Потенціал між електродами плоского конденсатора змінюється по закону $\varphi = -ax^3 - bx^2$, де a , і b постійні. Електроди являють собою квадрати площею $S = 3\text{см}^2$, відстань між якими $d = 0.1\text{см}$. Простір між електродами заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 1$. Знайти об'ємний заряд між електродами конденсатора.

30. Потенціал між електродами плоского конденсатора змінюється по закону $\varphi = -ax^3 - c$, де a і c постійні. Електроди являють собою квадрати площею $S = 2\text{см}^2$, відстань між якими $d = 2\text{мм}$. Простір між електродами заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 1.5$. Знайти об'ємний заряд між електродами конденсатора.

31. У вакуумі на відстані $d = 2\text{мм}$ розміщені два плоских електроди. Правий електрод заземлений, а потенціал лівого $U = 220\text{В}$. Між пластинами розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = a\varepsilon_0x$, де $a = 30\text{кВ/см}^2$. Знайти закон зміни потенціалу.

32. У вакуумі на відстані $d = 3\text{мм}$ розміщені два плоских електроди. Лівий електрод заземлений, а потенціал правого $U = 100\text{В}$. Між пластинами розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = -a\varepsilon_0x^2$, де $a = 30\text{кВ/см}^3$. Знайти закон зміни потенціалу.

33. У вакуумі на відстані $d = 2\text{мм}$ розміщені два плоских електроди. Потенціали лівого і правого електродів відповідно рівні $\varphi_1 = 12\text{В}$ і $\varphi_2 = 24\text{В}$. Між пластинами розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = -a\varepsilon_0x$, де $a = 30\text{кВ/см}^2$. Знайти закон зміни потенціалу.

34. Знайти напруженість електричного поля і ємність двошарового плоского конденсатора, якщо товщина першого шару діелектрика $d_1 = 2\text{мм}$, а другого $d_2 = 1\text{мм}$. Абсолютна діелектрична проникність першого шару $\varepsilon_1 = 1$, а другого $\varepsilon_2 = 3$.

35. До плоского конденсатора з площею одного із електродів $S = 18\text{см}^2$ прикладена напруга $U = 220\text{В}$. Знайти напруженість електричного поля і ємність двошарового плоского конденсатора, якщо товщина першого шару діелектрика $d_1 = 1\text{мм}$, а другого $d_2 = 2\text{мм}$. Абсолютна діелектрична проникність першого шару $\varepsilon_1 = 2.5$, а другого $\varepsilon_2 = 1.5$.

3.2. Розрахунок електричного поля постійного струму

1. В провідному середовищі з питомою провідністю $\sigma = 3 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ потенціал змінюється за законом $\varphi = -10^{-2}(4x + 3y)$. Обчислити струм, який протікає через прямокутну площадку площею $S = 2\text{см}^2$, яка розміщена паралельно до осі Oz і складає кут $\alpha = \pi/6$ з віссю Ox .

2. В провідному середовищі з питомою провідністю $\sigma = 2 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ потенціал змінюється за законом $\varphi = -10^{-2}(3y + 4z)$. Обчислити струм, який протікає через прямокутну площадку площею $S = 2\text{см}^2$, яка розміщена паралельно до осі Ox і складає кут $\alpha = \pi/6$ з віссю Oz .

3. В провідному середовищі з питомою провідністю $\sigma = 4 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ потенціал змінюється за законом $\varphi = -10^{-2}(5x + 3z)$. Обчислити струм, який протікає через прямокутну площадку площею $S = 2\text{см}^2$, яка розміщена паралельно до осі Oy і складає кут $\alpha = \pi/3$ з віссю Oz .

4. В провідному середовищі з питомою провідністю $\sigma = 10^7 \text{ См/м}$ потенціал змінюється за законом $\varphi = -10^{-2}(3x + 5y)$. Обчислити струм, який протікає через прямокутну площадку площею $S = 3\text{см}^2$, яка розміщена паралельно до осі Ox і складає кут $a = \pi/4$ з віссю Oz .

5. В провідному середовищі з питомою провідністю $\sigma = 2 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ потенціал змінюється за законом $\varphi = -10^{-2}(x + 3y + 4z)$. Обчислити струм, який протікає через прямокутну площадку площею $S = 5\text{см}^2$, яка розміщена паралельно до осі Ox і складає кут $\alpha = \pi/3$ з віссю Oz .

6. Вугільна пластина являє собою $2/3$ диска з концентрично вирізаним круглим отвором. Внутрішній радіус диска $r_1 = 1\text{см}$ зовнішній $r_2 = 2\text{см}$. Між краями, до яких приєднані мідні електроди підтримується постійна різниця потенціалів $U = 0.5\text{В}$. Визначити мінімальну та максимальну густину струму в пластинці. Вважати, що товщина пластини постійна.

7. Стальна пластина являє собою $1/4$ диска з концентрично вирізаним круглим отвором. Внутрішній радіус диска $r_1 = 1.5\text{см}$ зовнішній $r_2 = 2\text{см}$. Між краями, до яких приєднані мідні електроди підтримується постійна різниця потенціалів $U = 0.05\text{В}$. Визначити мінімальну та максимальну густину струму в пластинці. Вважати, що товщина пластини постійна.

8. Алюмінієва пластина являє собою $3/4$ диска з концентрично вирізаним круглим отвором. Внутрішній радіус диска $r_1 = 1\text{см}$ зовнішній $r_2 = 2\text{см}$. Між краями, до яких приєднані мідні електроди підтримується постійна різниця

потенціалів $U = 0.02V$. Визначити мінімальну та максимальну густину струму в пластинці. Вважати, що товщина пластини постійна.

9. Вугільна пластинка являє собою $1/2$ диска з концентрично вирізаним круглим отвором. Внутрішній радіус диска $r_1 = 2\text{см}$ зовнішній $r_2 = 4\text{см}$. Між краями, до яких приєднані мідні електроди підтримується постійна різниця потенціалів $U = 1.5V$. Визначити мінімальну та максимальну густину струму в пластинці. Вважати, що товщина пластини постійна.

10. Стальна пластинка являє собою $1/2$ диска з концентрично вирізаним круглим отвором. Внутрішній радіус диска $r_1 = 2\text{см}$ зовнішній $r_2 = 2.5\text{см}$. Між краями, до яких приєднані мідні електроди підтримується постійна різниця потенціалів $U = 0.03V$. Визначити мінімальну та максимальну густину струму в пластинці. Вважати, що товщина пластини постійна.

11. В плоскому конденсаторі, до якого прикладена напруга $U = 2000V$, внаслідок високої температури однієї з пластин питомий опір змінюється за законом $\rho = \rho_0 [1 + 2(x/d)]$. Визначити опір ізоляції конденсатора та густину струму, якщо площа пластини $S = 2\text{см}^2$, а відстань між пластинами $d = 3\text{мм}$. Знайти розподіли напруженості і потенціалу. Вважати, що $\rho_0 = 2 \cdot 10^{10} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

12. В плоскому конденсаторі, до якого прикладена напруга $U = 2000V$, внаслідок високої температури однієї з пластин питома провідність змінюється за законом $\sigma = \sigma_0 [1 + 3(x/d)]$. Визначити провідність ізоляції конденсатора та густину струму, якщо площа пластини $S = 3\text{см}^2$, а відстань між пластинами $d = 3\text{мм}$. Знайти розподіли напруженості і потенціалу. Вважати, що $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ См/м}$.

13. В плоскому конденсаторі, до якого прикладена напруга $U = 2000V$, внаслідок високої температури однієї з пластин питома провідність змінюється за законом $\sigma = \sigma_0 [1 + (x/d)]$. Визначити провідність ізоляції конденсатора та густину струму, якщо площа пластини $S = 3\text{см}^2$, а відстань між пластинами $d = 2\text{мм}$. Знайти розподіли напруженості і потенціалу. Вважати, що $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ См/м}$.

14. Визначити опір і провідність ізоляції сферичного конденсатора, якщо радіуси внутрішньої і зовнішньої обкладинок рівні відповідно r_1 і r_2 . Питома провідність ізоляції змінюється за законом $\sigma = \sigma_0 (r/r_1)^2$.

15. Визначити опір і провідність ізоляції циліндричного конденсатора довжиною l , якщо радіуси внутрішнього і зовнішнього електродів рівні відповідно r_1 і r_2 . Питомий опір ізоляції змінюється за законом $\rho = \rho_0 (r/r_1)^2$.

16. В плоскому конденсаторі, до якого прикладена напруга $U = 2000V$, внаслідок високої температури однієї з пластин питомий опір змінюється за

законом $\rho = \rho_0 [1 + 2(x/d)]$. Визначити втрати в ізоляції конденсатора, якщо площа пластини $S = 2\text{см}^2$, а відстань між пластинами $d = 3\text{мм}$. Вважати, що $\rho_0 = 2 \cdot 10^{10} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

17. Циліндричний конденсатор має радіуси електродів $r_1 = 2\text{см}$, $r_2 = 2.8\text{см}$, і довжину $l = 0.2\text{м}$. Питома провідність ізоляції змінюється за законом $\sigma = \sigma_0 (r/r_1)^2$, де $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ См/м}$. Визначити втрати в ізоляції конденсатора, якщо до нього прикладена напруга $U = 20\text{кВ}$.

18. Сферичний конденсатор має радіуси електродів $r_1 = 2\text{см}$, і $r_2 = 2.8\text{см}$. Питомий опір ізоляції змінюється за законом $\rho = \rho_0 (r/r_1)$, де $\rho_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Визначити втрати в ізоляції конденсатора, якщо до нього прикладена напруга $U = 10\text{кВ}$.

19. Визначити радіус r_0 напівсферичного металевих заземлювача, зануреного в глинистий ґрунт, якщо через заземлювач протікає постійний струм 314А , а максимальна крокова напруга не перевищує 150В . Крок людини прийняти рівним 0.8м . Питома провідність ґрунту $\sigma = 5 \cdot 10^{-4} \text{ См/м}$.

20. Напівсферичний металевий заземлювач радіусом $r_0 = 0.5\text{м}$ занурений в ґрунт з питомою провідністю $\sigma = 5 \cdot 10^{-4} \text{ См/м}$. Через заземлювач протікає постійний струм $I = 314\text{А}$. На яку відстань l до заземлювача може наблизитися тварина, якщо допустима безпечна напруга для неї рівна $U_m = 20\text{В}$, а довжина кроку $l = 1\text{м}$.

21. Знайти опір заземлення і максимальну крокову напругу, якщо заземлювач виготовлений у вигляді металеві кулі радіусом $r_0 = 0.5\text{м}$, розміщеної в ґрунті з питомою провідністю $\sigma = 10^{-2} \text{ См/м}$ на глибині $h = 1.5\text{м}$.

22. Знайти опір заземлення і максимальну крокову напругу, якщо заземлювач виготовлений у вигляді металеві кулі радіусом $r_0 = 0.5\text{м}$, розміщеної в ґрунті з питомою провідністю $\sigma = 10^{-2} \text{ См/м}$ на глибині $h_1 = 1.5\text{м}$ на відстані $h_2 = 3\text{м}$ від краю глибокої прірви.

23. Знайти опір заземлення і максимальну крокову напругу, якщо заземлювач виготовлений у вигляді металеві труби радіусом $r_0 = 2.5\text{см}$ забитої в ґрунт з питомою провідністю $\sigma = 2 \cdot 10^{-2} \text{ См/м}$ на глибину $h_1 = 1.5\text{м}$.

24. В морську воду з питомою провідністю σ вертикально опущені дві металеві труби довжиною l і зовнішнім радіусом r_0 . Осі труб знаходяться на відстані $d \ll r_0$. Визначити опір між трубами.

25. Водонагрівач являє собою металевий заземлений бак радіуса $r_2 = 25\text{см}$ і висотою $h = 0.3\text{м}$. Дно і кришка бачка виготовлені з діелектрика. Для нагрівання

води в бак коаксіально з ним вставлений циліндричний електрод радіуса $r_1 = 2.5\text{см}$. Водонагрівач приєднаний до джерела напруги з постійною напругою $U = 220\text{В}$. Знайти залежність питомої потужності p від радіуса, якщо питома провідність води $\sigma = 5 \cdot 10^{-2} \text{См/м}$.

26. Коаксіальний кабель з радіусом внутрішньої жили r_1 і зовнішньої оболонки r_2 ввімкнутий під постійну напругу U . Визначити струм втеч I через недосконалу ізоляцію кабелю, якщо довжина кабелю l , а питома провідність ізоляції змінюється за законом $\sigma = \sigma_0(r/r_1)$.

27. Коаксіальний кабель довжиною l має два шари ізоляції. Питомі провідності внутрішнього і зовнішнього шарів діелектриків відповідно рівні σ_1 і σ_2 . Радіуси внутрішньої жили r_1 , циліндричної поверхні, яка поділяє діелектрики r_2 , зовнішньої оболонки r_3 мають наступні розміри: $r_2 = er_1$, $r_3 = er_2$ (e - основа натуральних логарифмів). Визначити опір ізоляції кабелю.

28. Плоский конденсатор має два шари недосконалої ізоляції. Питомі провідності внутрішнього і зовнішнього шарів діелектриків відповідно рівні $\sigma_1 = 10^{-10} \text{См/м}$ і $\sigma_2 = 10^{-9} \text{См/м}$. Відношення радіусів обкладинок конденсатора і циліндричної поверхні, яка поділяє діелектрики, рівне: $r_2 = er_1$, $r_3 = er_2$ (e - основа натуральних логарифмів). Довжина конденсатора $l = 12\text{см}$. Визначити на яку напругу може бути ввімкнутий конденсатор, щоб струм втеч через нього не перевищував $I_m = 1.5\text{мкА}$.

29. Циліндричний конденсатор має два шари недосконалої ізоляції. Питомі провідності внутрішнього і зовнішнього шарів діелектриків відповідно рівні $\sigma_1 = 10^{-10} \text{См/м}$ і $\sigma_2 = 10^{-9} \text{См/м}$. Відношення радіусів обкладинок конденсатора і циліндричної поверхні, яка поділяє діелектрики, рівне: $r_2 = er_1$, $r_3 = er_2$ (e - основа натуральних логарифмів). Довжина конденсатора $l = 12\text{см}$. Визначити на яку напругу може бути ввімкнутий конденсатор, щоб струм втеч через нього не перевищував $I_m = 1.5\text{мкА}$.

30. Сферичний конденсатор має два шари недосконалої ізоляції. Питомі провідності внутрішнього і зовнішнього шарів діелектриків відповідно рівні $\sigma_1 = 10^{-10} \text{См/м}$ і $\sigma_2 = 10^{-9} \text{См/м}$. Відношення радіусів електродів конденсатора і сферичної поверхні, яка поділяє діелектрики, рівне: $r_2 = er_1$, $r_3 = er_2$ (e - основа натуральних логарифмів). Визначити на яку напругу може бути ввімкнутий конденсатор, щоб струм втеч через нього не перевищував $I_m = 1.5\text{мкА}$.

3.3 Розрахунок магнітного поля

1. По ділянці тонкого прямолінійного провідника довжиною $l = 40\text{см}$ протікає струм $I = 30\text{А}$. Визначити індукцію магнітного поля в точці, яка віддалена від кінців ділянки на відстані $r_1 = 25\text{см}$, і $r_2 = 15\text{см}$. Магнітна проникність оточуючого середовища $\mu = 1$.

2. По ділянці тонкого прямолінійного провідника довжиною $l = 40\text{см}$ протікає струм $I = 30\text{А}$. Визначити напруженість магнітного поля в точці, яка віддалена від кінців ділянки на відстані $r_1 = 15\text{см}$, і $r_2 = 25\text{см}$.

3. По тонкому мідному кільцю радіусом $r_0 = 4\text{см}$ протікає струм $I = 10\text{А}$. Розрахувати індукцію магнітного поля в точці, яка віддалена на відстань $h = 4\text{см}$ від центру кільця. Магнітна проникність оточуючого середовища $\mu = 1$.

4. По тонкому мідному кільцю радіусом $r_0 = 3\text{см}$ протікає струм $I = 5\text{А}$. Розрахувати індукцію магнітного поля в центрі кільця. Магнітна проникність оточуючого середовища $\mu = 50$.

5. По тонкому мідному кільцю радіусом r_0 протікає струм I . Розрахувати індукцію магнітного поля на осі кільця, якщо магнітна проникність оточуючого середовища μ .

6. По тонкому мідному кільцю радіусом $r_0 = 3\text{см}$ протікає струм $I = 4\text{А}$. Розрахувати напруженість магнітного поля на осі кільця в точці, яка віддалена від точок кільця на відстань $l = 12\text{см}$.

7. По рамці, що має форму квадрата із стороною $a = 3\text{см}$ протікає струм $I = 2\text{А}$. Обчислити напруженість магнітного поля в центрі рамки.

8. По рамці, що має форму правильного трикутника із стороною $a = 5\text{см}$ протікає струм $I = 3\text{А}$. Обчислити напруженість магнітного поля в центрі рамки.

9. По рамці, що має форму правильного шестикутника із стороною $a = 3\text{см}$ протікає струм $I = 2\text{А}$. Обчислити напруженість магнітного поля в центрі рамки.

10. Індукція магнітного поля в центрі кругового витка радіусом $r_0 = 3\text{см}$ рівна $B = 0.2\text{Тл}$. Знайти індукцію магнітного поля в центрі кругового витка на відстані $h = 4\text{см}$ від його площини.

11. По прямому циліндричному сталевому проволу радіусом $r_0 = 3\text{мм}$ протікає постійний струм $I = 5\text{А}$. Використовуючи закон повного струму розрахувати індукцію магнітного поля всередині і зовні проволу. Магнітна проникність проволу $\mu = 300$.

12. По прямому циліндричному мідному проволу радіусом $r_0 = 3\text{мм}$ протікає струм, який рівномірно розподілений по перерізу з густиною $j = 10^5\text{А/м}^2$. Використовуючи закон повного струму розрахувати напруженість магнітного поля всередині і зовні проволу.

13. По прямому циліндричному сталевому проволу радіусом $r_0 = 5\text{мм}$ протікає постійний струм $I = 25\text{А}$. Використовуючи перше рівняння Максвелла розрахувати напруженість магнітного поля всередині і зовні проволу.

14. По прямому циліндричному сталюму проводу радіусом $r_0 = 0.5\text{см}$ протікає постійний струм $I = 30\text{А}$. Використовуючи перше рівняння Максвела розрахувати індукцію магнітного поля всередині і зовні проводу. Магнітна проникність поводу $\mu = 300$.

15. По прямому циліндричному сталюму проводу радіусом $r_0 = 3\text{мм}$ протікає постійний струм $I = 30\text{А}$. Використовуючи рівняння Пуассона і Лапласа для векторного потенціалу розрахувати напруженість магнітного поля всередині і зовні проводу. Магнітна проникність сталі $\mu = 400$.

16. По прямому циліндричному мідному проводу радіусом $r_0 = 5\text{мм}$ протікає постійний струм $I = 15\text{А}$. Використовуючи рівняння Пуассона і Лапласа розрахувати індукцію магнітного поля всередині і зовні проводу.

17. По прямому циліндричному сталюму проводу радіусом $r_0 = 5\text{мм}$ протікає постійний струм $I = 20\text{А}$. Використовуючи рівняння Пуассона і Лапласа знайти закон зміни векторного потенціалу всередині і зовні проводу.

18. По прямому циліндричному сталюму проводу радіусом $r_0 = 5\text{мм}$ протікає постійний струм $I = 100\text{А}$. Використовуючи рівняння Пуассона і Лапласа розрахувати векторний магнітний потенціал всередині і зовні проводу.

19. Визначити векторний потенціал однорідного магнітного поля в циліндричних координатах, якщо магнітна індукція направлена паралельно до осі Oz і рівна $B = 1.2\text{Тл}$.

20. Вздовж прямолінійного довгого проводу в напрямку від спостерігача протікає струм 24А . Визначити напруженість магнітного поля в точках a і b координати яких $x_a = 2\text{см}$, $y_a = 1\text{см}$, $x_b = 1\text{см}$, $y_b = 2\text{см}$.

21. Вздовж прямолінійного довгого проводу в напрямку до спостерігача протікає струм 36А . Визначити напруженість магнітного поля в точках a і b координати яких $x_a = 1\text{см}$, $y_a = 1\text{см}$, $x_b = 1\text{см}$, $y_b = 2\text{см}$.

22. В частині простору поза струмами скалярний магнітний потенціал змінюється за законом $\varphi_m = -10^{-1}(5x + 4y)\text{А}$. Обчислити магнітний потік, який протікає через прямокутну площадку площею $S = 3\text{см}^2$, яка розміщена паралельно до осі Ox і складає кут $\alpha = \pi/6$ з віссю Oz . Магнітну проникність середовища прийняти рівною $\mu = 50$

23. В частині простору поза струмами скалярний магнітний потенціал змінюється за законом $\varphi_m = -10^{-2}(2x + 5y)\text{А}$. Обчислити магнітний потік, який протікає через прямокутну площадку площею $S = 2\text{см}^2$, яка розміщена паралельно до осі Ox і складає кут $\alpha = \pi/4$ з віссю Oy . Магнітну проникність середовища прийняти рівною $\mu = 5$

24. Довжина середньої лінії залізного сердечника тороїду рівна $l = 25\text{см}$, довжина повітряного проміжку $\delta = 3\text{мм}$. Площа поперечного перерізу сердечника

рівна $S = 6\text{см}^2$. Визначити, яка магніторушійна сила необхідна для створення магнітного потоку $\Phi = 0.005\text{Вб}$, якщо відомо, що магнітна проникність матеріалу сердечника $\mu = 500$.

25. Довжина середньої лінії залізного сердечника тороїду $l = 24\text{см}$, довжина повітряного проміжку $\delta = 3\text{мм}$. Число витків в обмотці тороїду $n = 1500$. Знайти напруженість магнітного поля H_δ в повітряному проміжку при силі струму в обмотці тороїду $I = 1\text{А}$.

26. Довжина залізного сердечника тороїду рівна $l = 24\text{см}$, довжина повітряного проміжку $\delta = 2\text{мм}$. Величина магніторушійної сили в обмотці тороїду $F = 200\text{А}$. У скільки разів зменшиться напруженість магнітного поля в повітряному проміжку, якщо при тій самій магніторушійній силі збільшити довжину повітряного проміжку в два рази.

27. Через центр залізного кільця ($\mu = 500$) перпендикулярно до його площини проходить довгий прямолінійний провід, по якому протікає струм $I = 25\text{А}$. Кільце має прямокутний переріз, розміри якого $r_1 = 18\text{мм}$, $r_2 = 24\text{мм}$ і $h = 5\text{мм}$. Знайти магнітний потік, який пронизує поперечний переріз кільця.

28. Через центр мідного кільця ($\mu = 1$) перпендикулярно до його площини проходить довгий прямолінійний провід, по якому протікає струм $I = 12\text{А}$. Кільце має прямокутний переріз, розміри якого $r_1 = 12\text{мм}$, $r_2 = 18\text{мм}$ і $h = 5\text{мм}$. Знайти магнітний потік, який пронизує поперечний переріз кільця.

29. Через центр мідного кільця ($\mu = 1$) перпендикулярно до його площини проходить довгий прямолінійний провід, по якому протікає струм $I = 12\text{А}$. Кільце має круговий переріз розміри якого $r_1 = 12\text{мм}$, $r_2 = 18\text{мм}$ і $r_0 = 5\text{мм}$. Знайти магнітний потік, який пронизує поперечний переріз кільця.

30. По мідному проволу ($\mu = 1$) радіусом $r_0 = 1\text{см}$ протікає струм $I = 2\text{А}$. Знайти залежність векторного потенціалу від відстані до осі проволу.

31. По сталевому проволу ($\mu = 500$) радіусом $r_0 = 0.5\text{см}$ протікає струм $I = 2\text{А}$. Знайти залежність векторного потенціалу від відстані до осі проволу.

32. Прямолінійний довгий провід, вздовж якого протікає струм $I_1 = 5\text{А}$, розміщений в повітрі ($\mu_1 = 1$) паралельно до плоскої поверхні сталеві плити ($\mu_2 = 999$) в точці з координатами $x = 0$, $y = 3\text{см}$. Розрахувати напруженість магнітного поля в точках a і b координати яких $x_a = 3\text{см}$, $y_a = 2\text{см}$, $x_b = 3\text{см}$, $y_b = -2\text{см}$.

33. Прямолінійний довгий провід, вздовж якого протікає струм $I_1 = 12\text{А}$, розміщений в повітрі ($\mu_1 = 1$) паралельно до плоскої поверхні сталеві плити ($\mu_2 = 499$) в точці з координатами $x = 0$, $y = 1\text{см}$. Розрахувати напруженість магнітного поля в точках a і b координати яких $x_a = 2\text{см}$, $y_a = 1\text{см}$, $x_b = 2\text{см}$, $y_b = -1\text{см}$.

34. На сталений тороїдальний сердечник, що має внутрішній радіус $r_1 = 3\text{см}$ і зовнішній $r_2 = 5\text{см}$ намотана обмотка, що має $n = 500$ витків. Обчислити енергію магнітного поля тороїда, якщо магнітна проникність сталі $\mu = 300$, а через обмотку протікає струм $I = 0.5\text{А}$.

35. На сталений тороїдальний сердечник, що має внутрішній радіус $r_1 = 8\text{см}$ і зовнішній $r_2 = 12\text{см}$ намотана обмотка, що має $n = 1000$ витків. Обчислити енергію магнітного поля тороїда, якщо магнітна проникність сталі $\mu = 300$, а через обмотку протікає струм $I = 1.5\text{А}$.

3.4. Розрахунок електромагнітного поля

1. Визначити тангенс кута втрат, який складає напруженість електричного поля з нормаллю до поверхні жили в точці, що належить поверхні жили коаксіального кабелю. Підрахувати величину потоку вектора Пойнтінга через бічну поверхню жили на довжині 5м і порівняти його з втратами енергії в жилі на довжині 5м . Радіус алюмінієвої жили $r_1 = 0.5\text{см}$, внутрішній радіус оболонки $r_2 = 1\text{см}$. Напряга між жилою та оболонкою $U = 10^6\text{В}$.

2. Між електродами плоского конденсатора знаходиться неідеальний діелектрик ($\sigma = 10^{-4}\text{См/м}$, $\varepsilon = 6$). Конденсатор приєднаний до джерела синусоїдної напруги $u = 3000\sin\omega t\text{В}$. Обчислити амплітуду густини струму провідності та амплітуду густини струму зміщення для частоти $f = 3 \cdot 10^5\text{Гц}$, якщо відстань між електродами $d = 1\text{см}$.

3. До плоского конденсатора з повітряною ізоляцією прикладена напряга $u = U_m \sin\omega t$. Електроди конденсатора мають форму дисків і розміщені на відстані $d = 3\text{см}$. Знайти миттєву напруженість магнітного поля в точках, які лежать між пластинами конденсатора на відстані r від осі симетрії, якщо $U_m = 3000\text{В}$, а $\omega = 1000\text{рад/с}$.

4. Плоска електромагнітна хвиля поширюється в середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$ і провідністю $\sigma = 10^{-4}\text{См/м}$. Визначити відношення амплітуд густини струму зміщення і густини струму провідності для частот $f_1 = 15 \cdot 10^3\text{Гц}$, $f_1 = 15 \cdot 10^5\text{Гц}$, $f_1 = 15 \cdot 10^7\text{Гц}$.

5. В середовищі з провідністю $\sigma = 10^{-3}\text{См/м}$, відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$ і відносною магнітною проникністю $\mu = 1.5$ напруженість електричного поля змінюється за законом $E = 2\sin(3\pi \cdot 10t + \psi)\text{В/м}$. Визначити амплітуду густини струму зміщення і амплітуду густини струму провідності.

6. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f = 10^7\text{Гц}$ поширюється в середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 8$ і провідністю $\sigma = 10^{-3}\text{См/м}$.

Визначити довжину хвилі і порівняти її з довжиною хвилі в ідеальному діелектрику з проникністю $\varepsilon = 1$.

7. Плоска електромагнітна хвиля поширюється в середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 12$ і провідністю $\sigma = 4 \cdot 10^{-2} \text{ Сл/м}$. Визначити відношення амплітуд густини струму зміщення і густини струму провідності для частот $f_1 = 10^3 \text{ Гц}$, $f_1 = 10^5 \text{ Гц}$, $f_1 = 10^7 \text{ Гц}$.

8. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f = 10^7 \text{ Гц}$ поширюється в середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$ і провідністю $\sigma = 10^{-3} \text{ Сл/м}$. Визначити відстань у напрямку поширення хвилі на якій амплітуда напруженості електричного поля зменшиться в 100 разів.

9. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f = 10^7 \text{ Гц}$ поширюється в середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$ і провідністю $\sigma = 10^{-4} \text{ Сл/м}$. Визначити відстань у напрямку поширення хвилі на якій амплітуда напруженості магнітного поля зменшиться в 10^3 разів.

10. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f = 10^7 \text{ Гц}$ поширюється в середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$ і провідністю $\sigma = 10^{-4} \text{ Сл/м}$. Визначити відстань у напрямку поширення хвилі на якій амплітуда напруженості магнітного поля зменшиться в 10 разів.

11. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f_1 = 10^7 \text{ Гц}$, поширюється в необмеженому діелектрику з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. В момент часу $t = 0$ $E = E_m = 2 \text{ мВ/м}$. Знайдіть напруженість E в момент часу $t = 1 \text{ мкс}$. у точці, віддаленій від даної в напрямку поширення на відстань 300 м.

12. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f_1 = 10^7 \text{ Гц}$, поширюється в необмеженому діелектрику з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. В момент часу $t = 0$ $E = E_m = 5 \text{ мВ/м}$. Знайдіть напруженість H в момент часу $t = 1 \text{ мкс}$. у точці, віддаленій від даної в напрямку поширення на відстань 30 м.

13. Визначити хвильовий опір для міді на частоті $f = 10^{10} \text{ Гц}$. Провідність міді прийняти рівною $\sigma = 57 \cdot 10^6 \text{ Сл/м}$.

14. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f_1 = 10^7 \text{ Гц}$, поширюється в необмеженому діелектрику з діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$. В момент $t = 0$ $E = E_m = 2 \text{ мВ/м}$. Знайти довжину хвилі.

15. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f_1 = 10^7 \text{ Гц}$, поширюється в необмеженому діелектрику з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. В момент $t = 0$ $E = E_m = 2 \text{ мВ/м}$. Знайти коефіцієнт фази.

16. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f_1 = 10^7 \text{ Гц}$, поширюється в необмеженому діелектрику з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. В момент $t = 0$ $E = E_m = 2 \text{ мВ/м}$. Знайти фазову швидкість.

17. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f_1 = 10^7 \text{ Гц}$, поширюється в необмеженому діелектрику з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. В момент часу $t = 0$ $E = E_m = 2 \text{ мВ/м}$. Знайти хвильовий опір.

18. Плоска електромагнітна хвиля проникає в товсту металеву плиту ($\sigma = 2 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\mu = 1$). Фазовий фронт хвилі паралельний до поверхні плити. На глибині $z_1 = 1 \text{ мм}$ миттєва величина магнітної індукції $B = 12.56 \sin(\omega_1 t + 30^\circ) \text{ Тл}$. Кутова частота $\omega_1 = 314 \text{ рад/с}$. Знайти миттєву густину струму на глибині $z_2 = 5 \text{ мм}$, якщо кутова частота стане рівною $\omega_2 = 282 \text{ рад/с}$.

19. Плоска електромагнітна хвиля проникає із повітря в провідне середовище ($\sigma = 2 \text{ См/м}$, $\mu = 1$). Фазовий фронт хвилі паралельний до поверхні середовища. На відстані 10 см від поверхні напруженість електричного поля змінюється за законом $E_1 = E_m \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В/м}$. У момент часу $t = 0$ на глибині $z_2 = 25 \text{ см}$ $E_2 = -10 \text{ В/м}$. Знайти напруженості магнітного поля H_0 і H_1 , в момент часу $t_1 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$, якщо частота $f = 10^7 \text{ Гц}$.

20. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f = 10^5 \text{ Гц}$ падає на поверхню провідного середовища. Визначити глибину проникнення, якщо провідність середовища $\sigma = 2 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, а відносна магнітна проникність $\mu = 1$.

21. Плоска електромагнітна хвиля частотою $f = 10^5 \text{ Гц}$ падає на поверхню провідного середовища. Визначити глибину і фазову швидкість, якщо провідність середовища $\sigma = 2 \cdot 10^3 \text{ См/м}$, а відносна магнітна проникність $\mu = 10$.

22. В середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 1$, в площині $z = 0$ напруженість електричного поля плоскої хвилі змінюється за законом $E = E_m \sin(\omega t + \psi)$, де $E_m = 0.2 \text{ В/м}$, $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\psi = 30^\circ$. Знайти миттєву напруженість магнітного поля в площині $z = 0.5 \text{ км}$.

23. В середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 1$, в площині $z = 0$ напруженість електричного поля плоскої хвилі змінюється за законом $E = E_m \sin(\omega t + \psi)$, де $E_m = 0.2 \text{ В/м}$, $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\psi = 30^\circ$. Знайти миттєву напруженість магнітного поля в площині $z = 0.5 \text{ км}$.

24. В середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 8$, в площині $z = 0.1 \text{ м}$ напруженість електричного поля плоскої хвилі змінюється за законом $E = E_m \sin(\omega t - \psi)$, де $E_m = 0.2 \text{ В/м}$, $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\psi = 30^\circ$. Знайти миттєву величину вектора Пойнтінга в площині $z = 0.5 \text{ км}$.

25. Перпендикулярно до напрямку поширення плоскої електромагнітної хвилі розміщена масивна стальна стіна. Незначна доля енергії падаючої хвилі проникає в стіну, а основна частина енергії відбивається від неї. Яку відстань пройде хвиля, яка проникла всередину стіни за той же час, за який відбита хвиля в повітрі пройде відстань l метрів? Знайдіть довжину хвилі в повітрі і в стальній стіні.

4. КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

Контрольна робота №1

Задача 1. В середовищі з діелектричною проникністю ε потенціал електричного поля описується функцією $\varphi = a(x)^m + b(y)^n + c(z)^k$, де a, b, c -

сталі. Визначити розподіли напруженості, електричної індукції та об'ємної густини заряду. Знайти густину енергії електростатичного поля та з'ясувати його характер.

Задача 2. В діелектрику, обмеженому сферою радіуса r_0 розподілений вільний заряд, густина якого змінюється за законом $\rho = \rho_0(r/r_0)^k$, де ρ_0 - стала. Знайти розподіли електричної індукції, напруженості і потенціалу поля всередині і зовні сфери. Визначити густину заряду на поверхні сфери, якщо відносна діелектрична проникність діелектрика ε_1 , а оточуючого середовища ε_2 . (Величину r_0 взяти в сантиметрах).

Задача 3. Між електродами плоского конденсатора знаходиться неідеальний діелектрик, в якому розподілений заряд з об'ємною густиною $\rho = -\rho_0(x/d)^k$, де ρ_0 - стала. Знайти розподіл потенціалу і напруженості електричного поля між електродами, якщо відносна діелектрична проникність діелектрика $\varepsilon = \varepsilon_1$, а потенціали лівого і правого електродів відповідно рівні φ_1 , та φ_2 .

Задача 4. Між електродами плоского конденсатора знаходиться неідеальний діелектрик, потенціал в якому змінюється за законом $\varphi = -\varphi_0(x/d)^k$, де φ_0 - стала. Відстань між електродами конденсатора, які мають форму квадратів площею $S = 5 \text{ см}^2$, рівна $d = 0.5 \text{ мм}$. Знайти вільний заряд, який знаходиться між електродами, якщо відносна діелектрична проникність діелектрика $\varepsilon = \varepsilon_2$.

Задача 5. Паралельно до плоскої поверхні поділу двох діелектриків знаходиться заряджений провід, уздовж якого рівномірно з лінійною густиною τ розподілений лінійний заряд. Діелектричні проникності середовищ рівні відповідно ε_1 та ε_2 . Визначити напруженість та потенціал електростатичного поля в точці з координатами $K(m, n)$, якщо координати проводу $P(0, h)$. (Координати точок взяти в сантиметрах).

Таблиця до контрольної роботи №1

№ Вар	m	n	k	$\rho_0 \times 10^5$ (Кл/м ³)	r_0	ε_1	ε_2	φ_0 (В)	φ_1 (В)	φ_2 (В)	$\tau \times 10^3$ (Кл/м)	h
1	-1	1	1	2	5	1	2	1	2	0	6	4
2	1	-1	2	3	8	2	3	2	0	2	7	1
3	-1	-2	3	4	2	3	4	4	0	3	8	2
4	1	2	4	5	3	4	5	10	4	0	4	3

5	-1	-2	5	6	4	5	4	6	0	8	5	4
6	1	2	4	2	5	4	3	10	6	0	1	5
7	-1	-2	3	3	6	3	2	10	0	4	2	4
8	1	-1	2	4	7	2	1	10	10	0	3	3
9	-1	1	1	5	4	1	2	14	0	4	4	2
10	1	-1	2	6	3	2	3	10	14	0	5	1
11	-1	1	3	7	2	3	4	10	2	0	4	2
12	1	-1	4	4	4	4	5	2	0	8	3	3
13	-1	1	5	3	5	5	6	4	0	4	2	4
14	1	-1	6	2	6	6	7	12	4	0	1	5
15	-1	1	7	4	1	7	6	6	0	6	2	6
16	1	-1	6	5	2	6	5	3	6	0	3	7
17	-1	1	5	6	2	5	1	10	0	4	4	6
18	1	-1	4	1	3	1	2	4	10	4	5	5
19	-1	1	3	2	4	2	3	14	0	6	6	1
20	1	-1	2	2	5	3	4	5	14	0	7	2
21	-1	1	1	3	6	4	5	5	2	0	6	3
22	1	-1	2	4	2	5	4	2	0	8	5	4
23	-1	1	3	5	3	4	3	4	0	6	1	5
24	1	-2	4	6	4	3	2	8	4	0	2	4
25	-1	2	5	2	5	2	1	6	0	6	3	3
26	1	-2	4	3	6	1	2	6	6	0	4	2
27	-1	-1	3	4	7	2	3	10	0	4	5	1
28	1	2	2	5	4	3	4	4	10	0	4	2
29	-1	1	1	6	3	4	5	14	0	8	3	3
30	1	-1	2	7	2	5	6	3	14	0	2	4
31	-1	1	3	4	4	6	7	7	2	0	1	5
32	1	-1	4	3	5	7	6	2	0	6	2	6
33	-1	-2	5	2	6	6	5	4	0	4	3	7
34	1	2	6	4	5	5	1	9	4	0	4	6
35	-1	-2	7	5	6	1	2	6	0	6	5	5
36	1	-1	6	6	2	2	3	2	6	8	6	1
37	-2	-1	5	1	3	3	4	10	0	3	7	2
38	2	1	4	2	4	4	5	5	10	0	6	3
39	-2	-1	3	5	5	5	4	14	0	5	5	4
40	2	1	2	6	6	4	3	5	14	0	1	5
41	-2	1	1	7	7	3	2	6	2	0	2	4
42	2	-1	2	4	4	2	1	2	0	6	3	3
43	-2	-2	3	3	3	1	2	4	0	8	4	2
44	2	2	4	2	2	2	3	6	4	0	5	3
45	-2	-2	5	4	4	3	4	6	0	6	4	6
46	2	-1	6	5	5	4	5	4	6	0	3	4
47	-2	-1	2	6	6	5	6	10	0	8	2	3
48	2	1	3	1	5	6	7	2	10	0	8	6
49	-2	-1	4	2	4	7	6	14	0	6	6	8
50	2	1	2	5	3	6	8	2	14	0	4	2

Контрольна робота №2

Задача 1. Потенціал постійного електричного поля, створеного в провідному середовищі з питомою провідністю σ , змінюється за законом $\varphi = U \left[(x/r_1)^m + (y/r_1)^n + (z/r_1)^k \right]$. Знайти густину струму та напруженість

електричного поля. Обчислити потужність, яка виділяється в одиниці об'єму провідного середовища.

Задача 2. Сферичний заземлювач знаходиться в ґрунті на глибині h . До заземлювача підводиться постійний струм I . Визначити опір заземлювача та напругу дотику, якщо провідність ґрунту $2 \cdot 10^{-2} \text{ См/м}$. Знайти крокову напругу на відстані h від заземлювача. Як зміниться опір і максимальна крокова напруга, якщо на відстані $k \times h$ від основи заземлювача утвориться глибоке вертикальне провалля?

Задача 3. В плоскому конденсаторі, до якого прикладена напруга U , внаслідок високої температури одного з електродів питомий опір діелектрика змінюється за законом $\rho = \rho_0 \left[1 + k(x/d)^m \right]^n$, де d - відстань між електродами. Визначити опір ізоляції конденсатора, питому потужність теплових втрат, розподіл напруженості електричного поля і потенціалу, якщо $\rho_0 = 10^{10} \text{ Ом}\cdot\text{м}$, $d = 0.5 \text{ мм}$, а площа електродів $S = 3 \text{ см}^2$.

Задача 4. По тонкому прямому проволу довжиною h протікає струм I . Визначити магнітну індукцію в точці, яку з лівого кінця проволу видно під кутом α , і яка віддалена від його осі на відстань r_0 .

Задача 5. Уздовж металевої труби протікає постійний струм I . Внутрішній і зовнішній радіуси труби відповідно рівні r_1 та r_2 . Знайти розподіл напруженості та магнітної індукції в трубі та поза нею. Обчислити магнітну напругу між точками з координатами $M(m, n)$ і $N(m, k)$, якщо питома провідність металу σ . Вважати, що струм направлений від спостерігача для парних номерів варіантів та до спостерігача для непарних.

Таблиця до контрольної роботи №2

№ Вар	m	n	k	r_0 см	r_1 мм	r_2 мм	h см	U В	I А	α рад
1	0	1	1	10	20	25	100	100	20	$\pi/6$
2	1	0	2	20	25	30	150	200	30	$-\pi/4$
3	2	-1	3	25	15	20	180	300	40	$\pi/3$
4	1	1	4	20	25	40	200	400	50	$-\pi/2$
5	2	0	5	10	10	15	130	500	40	$\pi/6$
6	0	-1	6	15	15	25	110	400	30	$-\pi/4$

7	0	1	1	20	20	25	120	300	20	$\pi/3$
8	1	0	2	25	25	30	130	200	10	$-\pi/2$
9	2	-1	3	10	15	20	140	100	20	$\pi/6$
10	1	1	4	20	25	40	150	200	30	$-\pi/6$
11	2	0	5	25	10	15	160	300	40	$\pi/4$
12	0	-1	6	20	15	25	170	400	50	$-\pi/3$
13	1	1	1	10	20	25	110	500	60	$\pi/2$
14	2	0	1	15	25	30	180	600	70	$-\pi/6$
15	0	-1	2	20	15	20	200	700	60	$\pi/6$
16	0	1	3	25	25	40	100	600	50	$-\pi/4$
17	1	0	4	20	10	15	150	500	10	$\pi/3$
18	2	-1	5	10	15	25	180	100	20	$-\pi/2$
19	1	1	6	15	20	25	200	200	30	$\pi/6$
20	2	0	1	20	25	30	130	300	40	$-\pi/6$
21	0	-1	2	25	15	20	110	400	50	$\pi/4$
22	1	1	3	10	25	40	120	500	40	$-\pi/3$
23	2	0	4	20	10	15	130	400	30	$\pi/2$
24	0	-1	5	25	15	25	140	300	20	$-\pi/6$
25	1	1	6	20	20	25	150	200	10	$\pi/6$
26	2	0	1	10	25	30	160	100	20	$-\pi/4$
27	0	-1	2	15	15	20	170	200	30	$\pi/3$
28	0	1	3	20	25	40	110	300	40	$-\pi/2$
29	1	0	4	25	10	15	180	400	50	$\pi/6$
30	2	-1	5	20	15	25	200	500	60	$-\pi/6$
31	1	1	6	10	20	25	100	600	70	$\pi/4$
32	2	0	1	15	25	30	150	700	60	$-\pi/3$
33	0	-1	2	20	15	20	180	600	50	$\pi/2$
34	2	1	3	25	25	40	200	500	10	$-\pi/6$
35	0	0	4	10	10	15	130	100	20	$\pi/6$
36	0	1	5	20	15	25	110	200	30	$-\pi/4$
37	1	0	6	25	20	25	120	300	40	$\pi/3$
38	2	-1	1	20	25	30	130	400	50	$-\pi/2$
39	1	1	2	10	15	20	140	500	40	$\pi/6$
40	2	0	3	15	25	40	150	400	30	$-\pi/6$
41	0	-1	4	20	10	15	160	300	20	$\pi/4$
42	2	1	5	25	15	25	170	200	10	$-\pi/3$
43	0	0	6	10	20	25	110	100	20	$\pi/2$
44	0	-1	1	15	25	30	180	200	30	$-\pi/6$
45	1	1	2	20	15	20	200	300	40	$\pi/6$
46	2	0	3	25	25	40	100	400	50	$-\pi/4$
47	1	-1	4	10	10	15	130	500	60	$\pi/3$
48	2	1	5	15	15	25	140	600	70	$-\pi/2$
49	0	0	6	20	20	30	150	700	60	$\pi/6$
50	2	-1	2	25	15	20	180	600	80	$-\pi/4$

Контрольна робота №3

Задача 1. До коаксіального кабелю із зовнішнім радіусом жили r_1 та внутрішнім радіусом оболонки r_2 прикладена напруга U , під дією якої в кабелі протікає струм I . Обчислити залежність вектора Пойнтінга від відстані до осі кабелю. Знайти потужність, яка передається в ізоляції між жилою та оболонкою. Втратами потужності знехтувати.

Задача 2. Між електродами плоского конденсатора знаходиться неідеальний діелектрик провідність якого $\sigma = 4 \cdot 10^n \text{ См/м}$, а відносна діелектрична проникність $\varepsilon = n$. Конденсатор приєднаний до джерела синусоїдної напруги $u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \pi n/2)$. Обчислити амплітуди густин струмів провідності та зміщення для частоти f , якщо відстань між електродами $d = n \text{ мм}$. Як зміняться амплітуди струмів, якщо частота збільшиться в n разів, а провідність зменшиться в n разів? Зробіть висновки.

Задача 3. До плоского конденсатора, між електродами якого знаходиться діелектрик з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = n$ прикладена напруга $u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \pi n/2)$ частотою f . Електроди мають форму дисків, які розміщені на відстані $d = n \text{ мм}$. Знайти залежність миттєвої напруженості магнітного та електричного поля від відстані до осі конденсатора.

Задача 4. Плоска електромагнітна хвиля частотою f падає на поверхню середовища з питомою провідністю σ і відносною магнітною та електричною проникністю відповідно μ та ε . Визначити коефіцієнти згасання та фази, хвильовий опір, фазову швидкість, та глибину проникнення. Як зміняться ці параметри, якщо частота збільшиться, а провідність зменшиться в n разів?

Задача 5. Плоска електромагнітна хвиля частотою f падає на поверхню середовища з питомою провідністю $\sigma = 4 \cdot 10^n \text{ См/м}$, і відносною магнітною та електричною проникністю відповідно μ та ε . Якщо вибрати систему прямокутних декартових координат так, що площина uOz буде паралельна до фронту хвилі, то в точках $x_1 = r_1$ густина струму визначається виразом $j_{x1} = j_m \sin(\omega t)$. Знайти миттєві значення напруженості електричного і магнітного поля, та вектор Пойнтінга в точках площини $x_2 = r_2$.

Таблиця до контрольної роботи №3

№ Вар	r_1 см	r_2 мм	U В	I А	n	$f \times 10^{-5}$ Гц	ε мм	μ см	j_m А/мм ²
1	10	20	1000	20	2	1	2	100	4000
2	20	25	2000	30	3	2	3	150	5000
3	25	15	3000	40	4	3	4	180	6000
4	20	25	4000	50	5	4	5	200	7000
5	10	10	5000	40	6	5	6	130	6000
6	15	15	4000	30	7	6	7	110	5000
7	20	20	3000	20	8	1	8	120	1000
8	25	25	2000	10	9	2	9	130	2000
9	10	15	1000	20	10	3	10	140	1000
10	20	25	2000	30	2	4	9	150	2000
11	25	10	3000	40	3	5	8	160	3000
12	20	15	4000	50	4	6	7	170	4000
13	10	20	5000	60	5	1	6	110	5000
14	15	25	6000	70	6	1	5	180	4000
15	20	15	7000	60	7	2	4	200	3000
16	25	25	6000	50	8	3	3	100	6000
17	20	10	5000	10	9	4	2	150	5000
18	10	15	1000	20	10	5	2	180	1000
19	15	20	2000	30	2	6	1	200	2000
20	20	25	3000	40	3	1	2	130	1000
21	25	15	4000	50	4	2	3	110	2000
22	10	25	5000	40	5	3	4	120	3000
23	20	10	4000	30	6	4	5	130	4000
24	25	15	3000	20	7	5	6	140	5000
25	20	20	2000	10	8	6	7	150	4000
26	10	25	1000	20	9	1	8	160	3000
27	15	15	2000	30	10	2	9	170	2000
28	20	25	3000	40	2	3	10	110	1000
29	25	10	4000	50	3	4	9	180	2000
30	20	15	5000	60	4	5	8	200	3000
31	10	20	6000	70	5	6	7	100	4000
32	15	25	7000	60	6	1	6	150	1000
33	20	15	6000	50	7	2	5	180	2000
34	25	25	5000	10	8	3	4	200	3000
35	10	10	1000	20	9	4	3	130	4000
36	20	15	2000	30	10	5	2	110	5000
37	25	20	3000	40	2	6	2	120	4000
38	20	25	4000	50	3	1	1	130	3000
39	10	15	5000	40	4	2	10	140	2000
40	15	25	4000	30	5	3	9	150	1000
41	20	10	3000	20	6	4	8	160	2000
42	25	15	2000	10	7	5	7	170	3000
43	10	20	1000	20	8	6	6	110	4000
44	15	25	2000	30	9	1	5	180	5000
45	20	15	3000	40	10	2	4	200	6000
46	25	25	4000	50	2	3	3	100	7000
47	10	10	5000	60	3	4	2	130	6000
48	15	15	6000	70	4	5	2	140	5000
49	20	20	7000	60	5	6	1	150	1000
50	25	15	6000	80	6	2	5	180	2000

ДОДАТКИ

Величини параметрів плоских хвиль для різних середовищ

Параметр	Середовище		
	Напівпровідник	Діелектрик	Провідник
$\underline{\gamma}$	$\alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\varepsilon\varepsilon_0)}$	$j\beta$	$k + jk = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$
α	$\frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} + 1 \right)} - 1 \right)}$	0	$\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$
β	$\frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} + 1 \right)} + 1 \right)}$	$\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{v}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$
Z_x	$\sqrt[4]{\frac{(\omega\mu_0)^2}{\sigma^2 + (\omega\varepsilon\varepsilon_0)^2}}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu}{\sigma}}$
φ_x	$0 < \arctg \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
λ	$\frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_f}{f} = v_f T$	$\frac{c}{f\sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{f\mu_0\sigma}}$
v_f	$\frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$	$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}}$

Диференціальні оператори векторного аналізу в різних системах координат

	Система координат		
	Декартова	Циліндрична	Сферична
$grad\varphi = \nabla\varphi$	$\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$	$\vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{e}_\psi\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$	$\vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \vec{e}_\psi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}$
$div\vec{A} = \nabla\vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}$
$rot\vec{A} = [\nabla\vec{A}]$	$\vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$	$\vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\psi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \vec{k}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\psi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\psi}\right)$	$\vec{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\psi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\psi}\right) + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\psi} - \frac{\partial(rA_\psi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\psi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$
$div(drad\varphi) = \nabla^2\varphi$	$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}$

Вимоги до виконання та оформлення контрольних робіт

Виконані контрольні роботи повинні відповідати таким вимогам:

- основні моменти розв'язку повинні бути детально пояснені;
 - рисунки і графіки повинні бути виконані охайно, в зручному для читання масштабі;
 - в зошиті слід залишити поля шириною не менше 4см для зауважень викладача;
 - розрахунки повинні бути виконані з точністю до другої значущої цифри;
 - контрольні роботи повинні бути датовані й підписані студентом;
 - не зараховані контрольні роботи слід виконати наново і представити на додаткову перевірку разом з попередньою роботою та зауваженнями викладача.
- Виправляти помилки у перевірених раніше роботах неможна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2018. 416 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола: Підручник для бакалаврів. М. Видавництво “Юрайт”, 2016. – 702 с.
3. Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола. Навчальний посібник. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 312 с.
4. Титаренко М.В. Електротехніка. – Київ.: «Кондор», 2013 р. – 238 с.
5. Паначевний Б.І., Свергун Ю.Ф. Загальна електротехніка. – Київ: «Каравела», 2004. – 640 с.
6. Малинівський С. М. Загальна електротехніка. – Львів: Бескид Біт, 2003. - 640 с.
7. Бойко В.С. Теоретичні основи електротехніки. Київ: „Політехніка”, 2004. - 272с.