УДК 536.2

Островський О. - ст.гр. КТ-21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОГО БРУСА

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Шелестовський Б.Г.

Ostrovskyi O.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

SOLUTION OF THE PROBLEM ON THE SQUARED BEAM CONDUCTIVITY

Supervisor: Shelestovskyi B.

Ключові слова: температура, рівняння теплопровідності
Key words: temperature. heat conductivity equation

Розглянемо довгий прямокутний брус, одна із граней якого підтримується при заданій температурі, а на інших гранях температура дорівнює нулю. Потрібно знайти усталену температуру в довільній точці бруса. Із симетрії бруса ясно, що температура не залежить від *z*, тому можна обмежитись розглядом перерізу в площі xoy.

Температура *T (x, y)* задовольняє рівняння теплопровідності:

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

та краєвим умовам:

$$T\big|_{x=0} = 0, \quad T\big|_{x=a} = f(y), \tag{2}$$

$$T\big|_{y=0} = 0, \quad T\big|_{y=b} = 0. \tag{3}$$

Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$T(x, y) = X(x)Y(y) \tag{4}$$

Диференціюємо (4) два рази по *x* і *y* та підставимо у (1):

$$X''Y + XY'' = 0$$

Розділивши останню рівність на $X \cdot Y$, відокремимо змінні:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2,$$

де λ – стала, приходимо до звичайних диференціальних рівнянь:

$$X'' - \lambda^2 X = 0, \tag{5}$$

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0. \tag{6}$$

Розв'язок рівнянь (5) і (6) запишемо у вигляді:

$$Y(y) = \cos\lambda y + D\sin\lambda y, \tag{7}$$

$$X(x) = A \cdot ch\lambda x + Bsh\lambda x. \tag{8}$$

Задовольняючи граничні умови (3), отримаємо:

$$Y(0) = C = 0, \quad Y(y) = D\sin\lambda y,$$

$$Y(b) = D\sin\lambda b = 0, \quad \lambda b = \pi n, \quad n = 1, 2, 3...$$

$$\lambda_n = n\frac{\pi}{b}.$$

Підставляючи ці дискретні значення параметра λ в (7) та (8), маємо:

$$X_n = A_n ch\frac{n\pi x}{b} + B_n sh\frac{n\pi x}{b}, \tag{9}$$

$$Y_n = D_n \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{10}$$

Отримали сукупність функцій $T_n(x, y)$, які задовольняють рівняння (1) та умови (3).

$$T_n(x, y) = \left(M_n ch\frac{n\pi x}{b} + N_n sh\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{11}$$

Покладаючи $M_n = 0$, задовольнимо першій умові (2).

$$T_n(x, y) = N_n \cdot sh\frac{n\pi x}{b} \cdot \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{12}$$

Сукупність функцій (12) задовольняє рівняння (1) та трьом нульовим граничним умовам.

Для того, щоб задовольнити другу умову (2), візьмемо розв'язок рівняння (1) у вигляді ряду:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n sh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{13}$$

і підберемо коефіцієнти N_n так, щоб ряд при $x \to a$ збігався до функції $f(y)$

$$T\Big|_{x=a} = \sum_n N_n sh\frac{n\pi a}{b} \cdot \sin\frac{n\pi y}{b} = f(y) \tag{14}$$

Звідси видно, що сталі множники $N_n sh\frac{n\pi a}{b}$ повинні бути коефіцієнтами розкладу в ряд Фур'є функції $f(y)$ по синусам:

$$N_n = \frac{f_n}{sh\frac{n\pi a}{b}}, \quad f_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy. \tag{15}$$

Підставляючи значення коефіцієнтів N_n в ряд (1), отримаємо шуканий розподіл температур.

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{sh\frac{n\pi x}{b}}{sh\frac{n\pi a}{b}}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{16}$$