УДК 517.9

Мимрик У. – ст. гр. ЕТ-11
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МЕТОДИКА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Науковий керівник: к.т.н. Габрусєва І. Ю.

Mymryk U.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

METHODS OF APPROXIMATE SOLUTION FOR THE PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Supervisor: Habrusieva I. Yu.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, стержень, апроксимація, рівняння гіперболічного типу.
Keywords: heat equation, rod, approximation, hyperbolic partial differential equation

Розглянемо першу крайову задачу для рівняння теплопровідності [1]. Вона полягає у відшукання такої функції $u(x,t)$, що при $0 \le x \le a$ та $0 \le t \le T$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

початкові умови

$$u(x,0) = f\left(x\right),\ 0 \le x \le a \tag{2}$$

та крайові умови першого роду

$$u(0,t) = \mu_1\left(t\right),\ u(a,t) = \mu_2\left(t\right),\ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

До задачі (1) – (3), зокрема, приводить задача про розподіл тепла в однорідному стержні довжиною a, на кінцях якого підтримуються заданий температурний режим.

Побудуємо в області $D = \left\{\left(x,t\right), 0 \le x \le a, 0 \le t \le T\right\}$ рівномірну прямокутну сітку розміром $n \times m$ із кроком h по осі x та τ – по осі t

$$x_i = ih,\ i = 0,1,...,n,\ a = nh;$$

$$t_j = j\tau,\ j = 0,1,...,m,\ T = m\tau.$$

Апроксимацію рівняння (1) проводитимемо за допомогою чотири точкового шаблону [2] (рис. 1)

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\tau} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \tag{4}$$

де $u_{i,j}$ – це наближене значення функції $u(x,t)$ у вузлі (x_i, t_j).

Введемо позначення $\lambda = \dfrac{\tau}{h^2}$, тоді із співвідношення (4) одержимо

$$\lambda u_{i+1,j} - \left(1 + 2\lambda\right)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j} = -u_{i,j-1},\ i = 1,2,...,n-1. \tag{5}$$

Останнє співвідношення апроксимує (1) із похибкою $O\left(\tau + h^2\right)$ лише у внутрішніх вузлах сітки. Значення функції $u(x,t)$ для вузлів при $i = 0$ та $i = n$ задаються крайовими умовами (3) поставленої задачі

$$u_{0,j} = \mu_1\left(t_j\right),\; u_{n,j} = \mu_2\left(t_j\right).$$

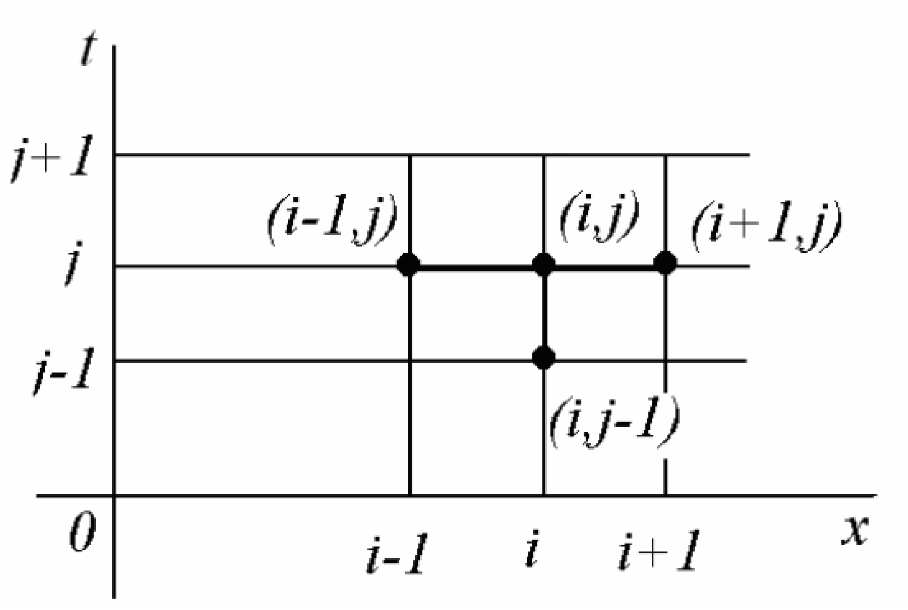

Рис. 1. Вузлова сітка

Побудована таким чином схема є неявною, тому значення $u_{i,j}$ потрібно шукати як розв'язок системи лінійних рівнянь (5). Для розв'язання даної системи можна використовувати будь-який метод, проте найбільш раціональним, на мою думку, буде метод прогонки (оскільки одержується тридіагональна матриця СЛАР). Таким чином ми знаходимо значення функції u для часового шару j, якщо відомі її значеня для шару $j-1$. Для нульового шару $\left(j=0\right)$ розв'язок є відомим із початкової умови (2)

$$u_{i,0} = f\left(x_i\right).$$

Відмінною особливістю даної схеми і її стійкість при довільних значеннях параметра $\lambda > 0$. Явна ж схема є стійкою лише при $\lambda < \frac{1}{2}$, тобто при $\tau < \frac{h^2}{2}$. Це означає, що обчислення за явною схемою доводиться проводити із дуже малим кроком τ, що в свою чергу приводить до значних витрат машинного часу. При обчисленнях за неявною схемою на одному кроці потрібно проводити більше операцій, проте можна як завгодно збільшити величину самого кроку τ без ризику порушити стійкість самої схеми. Це дає змогу значно зменшити витрати машинного часу, необхідного для розв'язання задачі.

Література

1. Габрусєв Григорій. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник / Г.В. Габрусєв. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. Івана Пулюя: 2014 – 84 ст.

2. Habrusiev H. Contact interaction of a predeformed plate which lies without friction on rigid base with a parabolic indenter / Hryhorii Habrusiev, Iryna Habrusieva // Scientific Journal of TNTU. — Tern. : TNTU, 2021. — Vol 102. — P. 87–95.