МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ПУЛЮЯ

КУРС ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
розділ
«ТЕОРІЯ МНОЖИН»

для студентів факультету
«Комп’ютерно - інформаційних систем і програмної інженерії»

Тернопіль 2023

УДК 519
К93

Курс лекцій з дисципліни «Дискретна математика» розділ «Теорія множин»

Для студентів факультету «Комп'ютерно- інформаційних систем і програмної інженерії»

Укладачі: Надія КРИВА
Наталія БЛАЩАК
Ірина ДІДИЧ
Рецензент Михайло МИХАЙЛИШИН

Розглянуто на засіданні кафедри МН протокол № 8 від 14 лютого 2023 р.

Затверджено на засіданні методичної ради факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії ТНТУ протокол № 4 від 12 квітня 2023 р.

Курс лекцій з дисципліни «Дискретна математика» розділ «Теорія множин»
для студентів факультету «Комп'ютерно- інформаційних систем і програмної інженерії» /
Упоряд.: Н.Р. Крива, Н.І. Блащак, І.С. Дідич – Тернопіль: ТНТУ, 2023. – 36 с.

ЗМІСТ

Вступ……..4
Лекція 1. Елементи теорії множин…….....5
Лекція 2. Відношення на множинах……13
Лекція 3. Приклади відношень.…….……..18
Лекція 4. Відношення часткового порядку.……..……22
Лекція 4. Відображення множин…… ……..29
Література……..34

ВСТУП

Дисципліна «Дискретна математика» входить до складу дисциплін циклу природничо-наукової підготовки бакалаврів спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія», 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» і є однією з базових математичних дисциплін цього циклу.

Матеріал, який пропонується для вивчення дисципліни, складається з таких розділів: «Основи теорії множин», «Комбінаторика», «Булева алгебра», «Елементи теорії графів ».

Для вивчення дисципліни «Дискретна математика» студент повинен мати знання математики в обсязі середньої школи і володіти базовими поняттями та методами лінійної алгебри та аналізу, що вивчаються в курсі «Вища математика».

У посібнику теоретичний матеріал із теорії множин структуровано за темами лекцій згідно з робочою програмою дисципліни «Дискретна математика». Означення проілюстровано прикладами, наведено доведення теорем. Перелік літератури містить підручники та посібники, які можна використати для більш глибокого вивчення деяких теоретичних положень теорії множин та їх практичного застосування.

Лекція 1. Елементи теорії множин

План

1. Загальні положення та означення теорії множин. Основні принципи
2. Термінологія. Порожня множина
3. Операції над множинами. Закони для операцій. Діаграми Ейлера-Венна

Виникнення теорії множин пов'язане з іменем німецького математика Георга Кантора (1845-1918), який, досліджуючи числові послідовності та тригонометричні ряди, наштовхнувся на задачі, пов'язані з необхідністю порівнювати нескінченні множини чисел. Кантор ввів поняття потужності (об'єму) та еквівалентності множин, дав узагальнене поняття натурального числа (трансфінітні числа). Теорія множин широко використовується в теорії й практиці математичної логіки, яка має першочергове застосування в програмуванні на електронно-обчислювальних машинах. Без теорії множин не можна було б вивчити такий важливий інструмент математики в кібернетиці, як теорію графів; теорія множин є ефективною базою теорії алгоритмів та ряду інших математичних методів кібернетики й автоматичних систем керування.

Надалі будемо вважати відомими поняття множин натуральних (N), цілих (Z), раціональних (Q), дійсних (R) і комплексних (C) чисел. Множини додатних чисел будемо позначати відповідно через Z^+, Q^+ , R^+.

1. Загальні положення та означення теорії множин. Основні принципи

Згідно з інтуїтивним представленням, за Кантором, множина – це будь-який набір певних і розрізнюваних між собою об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, що мислиться як єдине ціле. Ці об'єкти називаються елементами, або членами множини *S*. Наприклад, множина піщинок, множина парних чисел, множина точок у тривимірному просторі, множина кривих на площині і т.д.

Якщо предмет *x* є елементом множини *E*, то це записують так $x \in E$.

Якщо предмет *y* не є елементом множини *A*, то пишемо $y \notin A$.

Якщо множина *P* складається з елементів $x_1, x_2, ..., x_n$, то пишуть $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Для множини, що не містить жодного елемента (порожньої множини) будемо використовувати позначення $\varnothing$.

Наприклад, $A=\{a,b,c,d\}$ тут $b\in A$.

Елементи якоїсь множини самі можуть бути множинами.

Наприклад:

1) інститут – множина факультетів , кожен факультет складається з кафедр, кафедра з викладачів;

2) $E=\{\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}\}$ – множина, що складається з трьох елементів – множин;

3) зокрема, $\{\{1,3\}\}\neq\{1,3\}$, бо $\{\{1,3\}\}$ - одноелементна множина, елементом якої є множина, а $\{1,3\}$ - двоелементна множина, елементами якої є числа 1 і 3.

Під висловлюванням розуміють кожне розповідне речення, яке можна охарактеризувати як істинне або хибне, але не одне й інше одночасно. Тоді під формою від x розуміють скінченну послідовність, яка складається із слів та символів x, і якщо кожне входження x в цю послідовність замінити одним і тим же іменем деякого предмету відповідного роду, то в результаті одержимо висловлювання.

Наприклад,

1. 9 ділить x ;
2. $x^2+x+1>x$;
3. $x^2=25$.

Форму від x позначатимемо через $P(x)$.

В інтуїтивній теорії множин справедливі такі два принципи:

– дві множини рівні тоді й тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же елементів (принцип об'ємності). Якщо A, B - множини, то $A = B$ означає, що із $x\in A$ випливає $x\in B$, і з $y\in B$ випливає $y\in A$.

Наприклад: 1) A - множина всіх додатних парних чисел, B - множина додатних цілих чисел, кожне з яких представлене у вигляді суми двох додатних непарних цілих чисел. Маємо: $A = B$. Справді, із $x\in A$ випливає $x= 2m,\ m\in Z^+$, тобто $x= (2m-1)+1$, звідки виходить, що $x\in B$. Із $y\in B$ випливає, що $y=(2p-1)+(2q-1)$, тобто $y= 2(p+q- 1)$ де $p,q\in Z^+$, звідки виходить, що $y\in A$, що й треба було довести.

2) $A= \{2,4,6\}$, $B=\{6,4,2\}$; $A = B$.

– будь-яка форма $P(x)$ визначає деяку множину A за допомогою умови, згідно з якою елементи множини A є якраз ті предмети a , для котрих $P(a)$ є істинним висловлюванням (принцип абстракції). Це записується так:

$\{a \in A \mid P(a)\}$. P називають характеристичною властивістю (характеристичним предикатом) множини A.

Наприклад:

1) $\{x \mid x$ ділиться на 2 і x ділиться на $3\}$ – множина цілих чисел, кратних 6;

2) $\{x \mid x \in R,\ x \in [0,1]\}$ – множина всіх дійсних чисел, між 0 і 1.

3) $\{x \mid x = x_1,\ або\ x = x_2, ..., або\ x = x_n\} = \{x_1, x_2, ...x_n\}$;

4) $A = \{x | x \in A\}$;

5) $\{x | x \in Z,\ x^2\}$ – множина квадратів цілих чисел.

2. Термінологія. Порожня множина

Малими буквами латинського алфавіту позначатимемо елементи множини, великим – самі множини. Наприклад, якщо A – множина, a – елемент із множини A.

Далі часто використовуються такі логічні символи.

$\Rightarrow$ символ логічного слідування.

$\Leftrightarrow$ логічна еквівалентність.

Квантор загальності $\forall$: “для всякого елемента x множини E (всі елементи x)” пишуть $\forall x \in E$.

Квантор існування $\exists$: “Існує принаймні один елемент x множини E такий, що” пишуть $\exists x \in E$.

Принцип об’ємності тепер можемо записати так:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B\ і\ x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Важливою операцією теорії множин є включення:

$\subset$ - строге включення,

$\subseteq$ - не строге включення.

Означення. Якщо всі елементи із множини A належать множині B , то говорять, що A включено (знаходиться) в B , і записують $A \subseteq B$

Використовується також вираз: B містить A, або A є частина множини B , або A є *підмножина* множини B .

Зауваження. Запис $A \subseteq B$ означає, що можливий випадок $A = B$, а запис $A \subset B$ використовують для випадку $A \neq B$, що означає, що в B є принаймні один елемент, що не належить A . Якщо $A \subset B$, то множина A називається *власною підмножиною* множини B .

Наприклад, множина парних чисел є підмножиною множини цілих чисел.

Мають місце такі твердження:

1) $X \subseteq Y \;\; i \; Y \subseteq X \Leftrightarrow X = Y$

2) $X \subseteq Y \;\; i \; Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$

3) $X \subset Y \;\; i \; Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z$

Порожня множина $\varnothing$ – множина, яка не має елементів. Формально $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$

Наприклад, $A = \{x \mid x - \text{непарне число, що ділиться націло на } 2\} = \varnothing$

Для кожної множини *A* будемо мати $\varnothing \subseteq A$.

Твердження 1. Справджується така рівність:

$$A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B.$$

Доведення необхідності. Розглянемо будь-який елемент $x \in A$. Згідно з умовою $A \subset B$, множина *A* є підмножиною *B*, тому $x \in B$. З іншого боку, будь-який елемент $x \in B$ (оскільки $B \subset A$) належить також множині *A*, тобто $x \in A$. За означення рівності множин, маємо: *A=B.* Необхідність доведено.

Доведення достатності. Розглянемо будь-який елемент $x \in A$. Оскільки *A=B*, маємо $x \in B$. Тоді за означення включення множин $A \subset B$. Розглянемо будь-який елемент $x \in B$. Якщо $A = B$, то $x \in A$. За означенням включення $B \subset A$. Достатність доведено.

Твердження 2. Справджується така рівність:

$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

Твердження 3. Порожня множина єдина.

Доведемо єдність порожньої множини. Доведення проведемо від супротивного: припустимо, що існують дві порожні множини, тобто $\varnothing_1$ і $\varnothing_2$. Розглянемо два висловлення: $x \in \varnothing_1$ та $x \in \varnothing_2$. Обидва вони тотожньо хибні, тому $x \in \varnothing_1 \Leftrightarrow x \in \varnothing_2$. За означенням рівності множин маємо $\varnothing_1 = \varnothing_2$. Одержана суперечність доводить єдиність порожньої множини.

Якщо *A* – деяка множина, то через $B(A)$ позначаємо множину всіх її підмножин і називаємо множиною-степенем або булеаном множини *A*, тобто $B(A) = \{B | B \subseteq A\}$

Наприклад, $A = \{1,2,3\}$; тоді $B(A) = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{3\},\{2\},\varnothing\}$

Справедливе твердження: якщо *A* – скінченна множина з *n* елементів, то $B(A)$ містить 2^n елементів.

3. Операції над множинами. Закони для операцій. Діаграми Ейлера-Венна

Означення. *Об'єднанням* множин A та B ($A \cup B$) називають множину, що складається з тих і тільки тих елементів , які належать хоча б одній з цих множин, тобто

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\},$$

де символ "$\vee$" позначає логічну операцію диз'юнкції (логічне "або").

Наприклад, $\{1,2,3\} \cup \{1,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.

Означення. *Перерізом* множин A та B ($A \cap B$) називають множину, що складається з тих і тільки тих елементів , які належать одночасно множині A та множині B , тобто

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

де символ "$\wedge$" позначає логічну операцію кон'юнкції (логічне "і").

Наприклад, $\{1,2,3\} \cap \{1,3,4\}=\{1,3\}$.

Означення. Дві множини A та B називаються *розчленованими*, якщо $A \cap B = \varnothing$; система множин називається розчленованою, якщо будь-яка пара її різних елементів є розчленована.

Наприклад, $\{1,3,5\}$ і $\{2,4,6\}$ - розчленовані множини. Говорять також, що множини не перетинаються.

З цього означення випливає дуже важливе поняття - розбиття множини.

Означення. *Розбиттям* множини X називається така розчленована система S непустих і різних підмножин X_i множини X, що кожний елемент $x \in X$ є в той же час членом тільки одного елемента системи S.

Тобто, за означенням, система $S = \{X_i\}$ має задовольняти наступні умови:

1. $X_i \neq \varnothing$ для $\forall i$;
2. $X_i \cap X_j = \varnothing, i \neq j$;
3. $\bigcup_i X_i = X$.

Наприклад, { {1, 2}, {3},{4, 5} } є розбиттям множини {1, 2, 3, 4, 5}.

Означення. *Різницею* множин A та B ($A \backslash B$) називають множину, що складається з тих і тільки тих елементів , які належать множині A та не належать множині B , тобто

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Очевидно, що $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Наприклад, якщо $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, то $X \setminus A = \{1, 3, 5\}$.

Означення. *Симетричною різницею* множин A та B ($A \Delta B$) називають множину, що складається з тих і тільки тих елементів , які належать множині A та множині B, але не їм одночасно, тобто

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\},$$

де символ "$\oplus$" позначає логічну операцію виключної суми (логічне розділове "або").

Очевидно, що $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

З означення операції симетричної різниці випливає також така рівність:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Наприклад, $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1,3,4,5,7\}$, то $A \Delta B = \{2,5,7\}$.

Справедливі співвідношення:

1) $A \Delta B = B \Delta A$ 3) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

2) $A \Delta A = \varnothing$ 4) $A \Delta \varnothing = A$

Надалі будемо вважати, що всі множини, що розглядаються, є підмножинами деякої множини U, яку називають універсальною множиною або універсумом.

Означення. *Доповненням* множини A (відносно універсальної множини U), позначають $\overline{A}$, називають множину, що складається з тих і тільки тих елементів універсуму, які не належать множині A, тобто

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}.$$

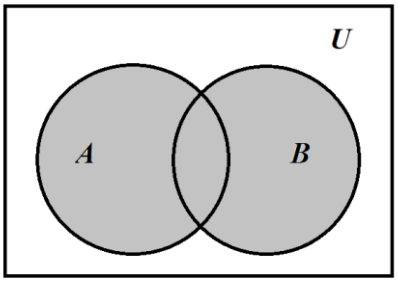
Зауваження. Результат операції доповнення суттєво залежить від вибору універсальної множини.

Якщо $U = R$, то $\overline{[0,1]} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;

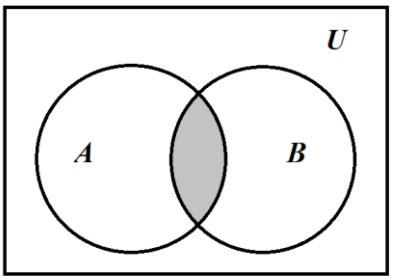
якщо ж $U = [0; +\infty)$, то $\overline{[0,1]} = (1; +\infty)$.

Часто для ілюстрації операцій над множинами використовують так звані діаграми Венна (нша назва – круги Ейлера) . При цьому універсальну множину позначають прямокутником, усі інші множини зображають кругами (або іншими фігурами) у ньому. Результат виконання операції зображають у вигляді заштрихованої області.

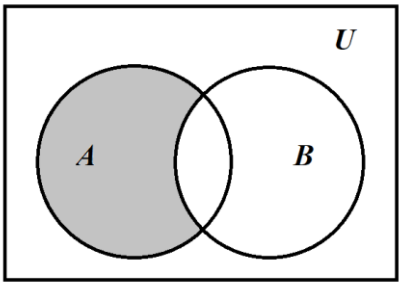
На рисунку зображено діаграми Венна, які ілюструють кожну з означених операцій.



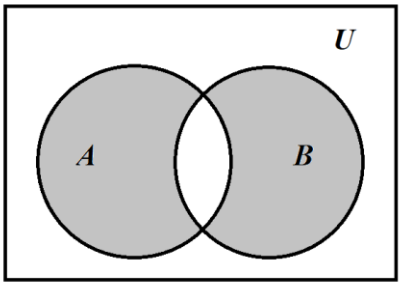
$A \cup B$



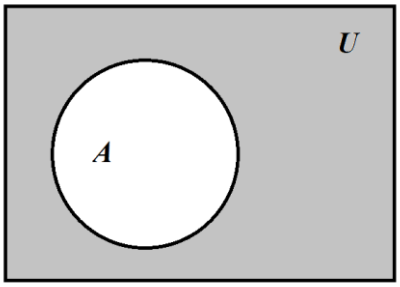
$A \cap B$



$A \setminus B$



$A \Delta B$



$\overline{A}$

Перелік законів, яким задовольняють операції над множинами, корисно здійснювати згідно з принципом двоїстості (дуальності), який базується на понятті двоїстого виразу.

Означення. Рівність (вираз, твердження) алгебри множин, одержана із заданої рівності (виразу, твердження) шляхом заміни всіх $\cup$ на $\cap$, $\cap$ на $\cup$, $\varnothing$ на U, U на $\varnothing$ називається двоїстою до даної.

Наприклад, $A \cup \overline{A} = U$ і $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Принцип двоїстості: для будь-якої теореми, сформульованої в термінах $\cap$, $\cup$ – двоїсте твердження також є теоремою.

Операції над множинами задовольняють наступні закони:

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (закони комутативності)

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (закони асоціативності)

3) $A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
(закони дистрибутивності)

4) $A\cup\varnothing=A$, $A\cap U=A$ (закони тотожності)

5) $A\cup\overline{A}=U$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$

6) Якщо для всіх A $A\cup B=A\Rightarrow B=\varnothing$ (самодвоїсті формули)
Якщо для всіх A $A\cap B=A\Rightarrow B=U$

7) Якщо $A\cup B=U$ і $A\cap B=\varnothing\Rightarrow B=\overline{A}$

8) $\overline{\overline{A}}=A$ (закон подвійного доповнення)

9) $\overline{\varnothing}=U$, $\overline{U}=\varnothing$

10) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ (закони ідемпотентність)

11) $A\cup U=U$, $A\cap\varnothing=\varnothing$ (закони домінування)

12) $A\cup (A\cap B)=A$, $A\cap (A\cup B)=A$ (закони поглинання)

13) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (закони де Моргана)

Доведемо, наприклад, тотожність 3: $A\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Для цього візьмемо будь-яке $x\in A\cup(B\cap C)$, тоді за означенням операцій “$\cup$” та “$\cap$” маємо $x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$. За законом дистрибутивності диз’юнкції відносно кон’юнкції $(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$, тобто $x\in\left(A\cup B\right)\wedge x\in\left(A\cup C\right)$ або $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Доведемо, що $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup (B\cap C)$. Для цього візьмемо будь-яке $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Звідси $(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$ або $x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$, тобто $x\in A\cup(B\cap C)$, що й потрібно було довести.

Доведемо, наприклад, властивість 10 (закон ідемпотентності (самопоглинання)):

$$A\cup A=(A\cup A)\cap U=(A\cup A)\cap(A\cup\overline{A})=A\cup(A\cap\overline{A})=A\cup\varnothing=A.$$

Твердження T_1, T_2, ..., T_n називаються попарно еквівалентними, якщо для будь-яких i та j

$T_i\Leftrightarrow T_j$, тобто, якщо $T_1\Rightarrow T_2\Rightarrow T_3\Rightarrow\ldots\Rightarrow T_{n-1}\Rightarrow T_n\Rightarrow T_1$.

Наприклад, T_1: $A\subseteq B$, T_2: $A\cap B=A$, T_3: $A\cup B=B$ - попарно еквівалентні твердження.

Лекція 2. Відношення на множинах

План

1. Упорядковані пари, трійки, n - ки
2. Декартів добуток множин
3. Бінарні відношення
4. Універсальне, порожнє та одиничне відношення
5. Переріз відношення. Фактор-множини
6. Графік відношення

1. Упорядковані пари, трійки, n- ки

Множини $\{1,5\}$ і $\{5,1\}$, що містять одні і ті самі елементи, рівні, причому порядок запису їх елементів не має значення. Проте, якщо розглядати на площині точки $A(1, 5)$ і $B(5, 1)$, то порядок запису їх координат (чисел 1 і 5) має принципове значення. Можна навести й інші приклади, коли треба враховувати порядок розміщення елементів множини (вектор на площині – упорядкована множина двох дійсних чисел; вектор у просторі - упорядкована множина трьох дійсних чисел і т.д.). У зв'язку з цим введемо поняття упорядкованої сукупності об'єктів, зокрема упорядкованої пари.

Означення. Упорядкованою парою елементів множини A назвемо об'єкт, що складається з двох, не обов'язково різних елементів множини A, які розташовані в певному порядку.

Якщо дані елементи є x та y то їх впорядковану пару позначимо $\langle x, y\rangle$, тобто $\langle x, y\rangle = \{\{x\},\{y\}\}$, де x - назвемо першою координатою, а y - другою координатою впорядкованої пари.

Наприклад, якщо $A = \{1,2,3,4,5\}$, то $\langle 3,4\rangle \neq \langle 4,3\rangle$. Упорядкованими парами є також $\langle 1,1\rangle$, $\langle 2,2\rangle, \langle 4,4\rangle \ldots$

Цілком аналогічно можна означити упорядковані трійки, n- ки елементів множини A.

2. Декартів добуток множин

Означення. Декартовим (прямим) добутком множин A і B називають множину всіх впорядкованих пар $\langle a,b\rangle$, де $a \in A$, $b \in B$ і позначають $A \times B$.

Отже, $A \times B = \{\langle a,b\rangle \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$. Тоді

$$A \times B = \{\langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 3,b\rangle\}.$$

Порядок входження пар може бути будь-яким, але розташування в кожній парі визначається порядком множин, що перемножуються. Тому $A \times B \neq B \times A$, тобто прямий добуток немає властивості комутативності.

Означення. Декартів добуток $A \times A$ називається декартовим квадратом і позначається A^2: $A^2 = A \times A$.

Операція декартового добутку множин узагальнюється на будь-яку їх кількість і записується у вигляді $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times .... \times A_n$, причому елементом декартового добутку n множин є впорядкована послідовність із n елементів $(a_1, a_2, ..., a_n)$, яка називається кортежем (або вектором) довжиною n.

Частковий випадок $\underbrace{A \times A \times .... \times A}_{n\ раз}$ позначають як A^n і називають n-тим степенем множини A.

3. Бінарні відношення

У математиці досить часто доводиться мати справу з тими чи іншими відношеннями між певними об'єктами.

Наприклад,

$a = b$; $a \le b$; $a \vdots b$; $A \subset B$; $p \perp t$; $(f(x) = 0) \Leftrightarrow (g(x) = 0)$ – рівняння $f(x) = 0$ рівносильне рівнянню $g(x) = 0$; « a і b – студенти однієї групи ».

У тому чи іншому відношенні можуть перебувати найрізноманітніші об'єкти. Але в кожному з розглядуваних відношень перебувають тільки два об'єкти. Такі відношення називають бінарними**.**

Досить часто нас цікавить не тільки об'єкти, які перебувають у бінарному відношенні, а й порядок їх розміщення: ($a \le b$; $a \vdots b$; $A \subset B$). Це означає, що

кожне бінарне відношення між об'єктами a і b можна розглядати як упорядковану пару $< a,b >$.

Наприклад, той факт, що 2 ділиться націло на -2, -1, 1, 2 можна записати у вигляді: <2,-2>, <2,-1>,<2,1>,<2,2>.

Отже, кожному конкретному бінарному відношенню можна поставити у відповідність певну множину упорядкованих пар, яку називатимемо графіком розглядуваного відношення.

Так, графіком відношення $2 \vdots a \ (a \in Z)$ є множина {<2,-2>, <2,-1>,<2,1>,<2,2>}.

Означення. Довільну множину R упорядкованих пар об'єктів певної природи називатимемо бінарним відношенням між цими об'єктами.

Використовуючи раніше введене поняття декартового добутку, бінарне відношення можемо означити наступним чином.

Означення. Бінарним відношенням R, що задане на множинах A та B називають довільну підмножину декартового добутку $A \times B$, тобто:

$$R \subset A \times B.$$

Найважливіші відношення мають певні назви і позначення:

Відношення рівності	$=$
паралельності	$\parallel$
перпендикулярності	$\perp$
подільності	$\vdots$
включення	$\subset$
конгруентності	$\cong$
подібності	$\sim$

Позначимо символом $D(R)$ сукупність лівих координат упорядкованих пар бінарного відношення R: $D(R)=\{a \mid \exists b, \langle a,b \rangle \in R\}$.

Множина $D(R)$ називається областю визначення відношення.

Аналогічно, множина $E(R)$ називається областю значення відношення R.

$$E(R)= \{b \mid \exists a, \langle a,b \rangle \in R\}$$

Наприклад, якщо $R = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,3 \rangle\}$, то $D(R)=\{1,2\}$, $E(R)= \{1,2,3\}$.

Множина $F(R)= D(R) \cup E(R)$ називається полем відношення R.

Так для розглядуваного відношення $F(R)= \{1,2,3\}$.

Нехай R - бінарне відношення в множині $A \cup B$.

Те що $\langle a,b \rangle \in R$ коротко записують так: aRb (елемент a перебуває у відношенні R з елементом b, або відношення R має місце між елементами a і b).

4. Універсальне, порожнє та одиничне відношення

Серед всіх відношень в множині X відрізняють такі:

1) Універсальне відношення в X – це $X \times X$;

Наприклад, якщо X={1,2}, то $X \times X = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle\}$.

2) Враховуючи, що довільна підмножина декартового добутку $A \times B$ є бінарним відношенням, приходимо до висновку, що порожню множину $\varnothing$ теж слід розглядати як певне бінарне відношення. Таке відношення називають порожнім, причому елементів, які перебувають у цьому відношенні не існує.

3)**Означення.** Відношення $i_x = \{\langle x, x \rangle \mid x \in X\}$ називають тотожне (або одиничне) відношення в X.

Очевидно, що для $\forall x, y \in X$: $x\, i_x\, y \Leftrightarrow x = y$.

Наприклад, якщо X={ 1, 2, 3, 4}, то $i_x = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$.

4) **Означення.** Відношення $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$ називають оберненим до R.

Наприклад, якщо $Q = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle\}$, то $Q^{-1} = \{\langle 2,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}$.

5. Переріз відношення. Фактор-множини

Нехай R – відношення від A до B (тобто $R \subset A \times B$) і $a \in A$. Позначимо через R_a сукупність усіх таких елементів $b \in B$, для яких $\langle a, b \rangle \in R$.

Визначена так множина R_a називається перерізом відношення R за елементом a. Отже, за означенням перерізу

$R_a = \{b \mid \langle a, b \rangle \in R\}$.

Наприклад, якщо $R = \{<1,2>, <2,1>, <1,3>, <2,3>, <3,4>\}$, $A = B = \{1,2,3,4\}$, то перерізом множини R за елементом a =1 $(1 \in A)$ є множина $\{2,3\}$, оскільки $\langle 1,2 \rangle \in R$ і $\langle 1,3 \rangle \in R$.

Отже, $R_1 = \{2,3\}$. Аналогічно $R_2 = \{1,3\}$, $R_3 = \{4\}$, $R_4 = \varnothing$.

Означення. Сукупність усіх перерізів відношення R $(R \subset A \times B)$ за елементами множини *A* називається фактором або фактор-множиною множини *B* за відношенням *R* і позначається B / R.

Отже, за означенням $B / R = \{R_a / a \in A\}$.

Так у попередньому прикладі $B / R = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$, або що те саме $B / R = \{\{2,3\}, \{1,3\}, \{4\}, \varnothing\}$.

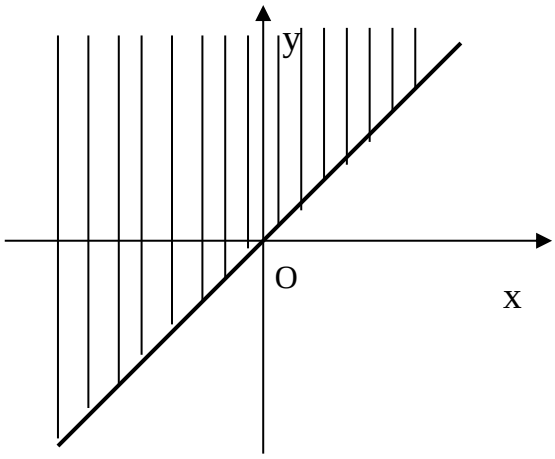
6. Графік відношення

Координатний спосіб задання бінарних відношень застосовується тоді, коли елементам множин *A* та *B* можна поставити у відповідність точки числової осі. Тоді множина *A* задається як підмножина осі *OX*, а множина *B* – як підмножина осі *OY*.

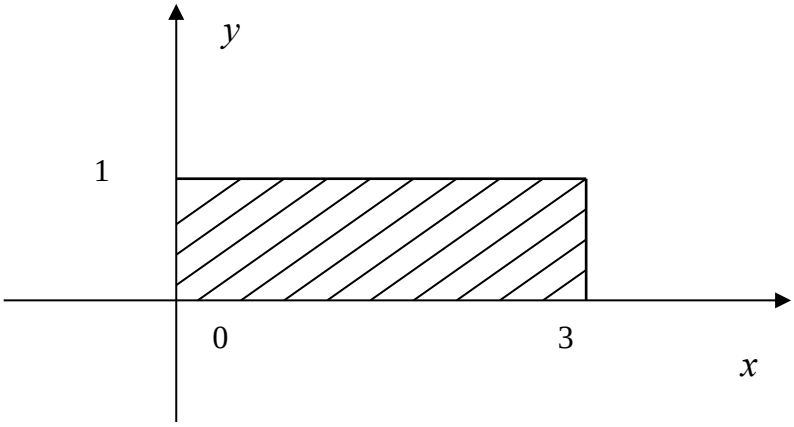
Означення. Множина точок координатної площини, яка відповідає елементам відношення R, називається графіком цього відношення.

Наприклад,

$R = \{ \langle x, y \rangle \in R \mid y \geq x \}$.



$R = \{ \langle x, y \rangle \in R \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ і } 0 \leq y \leq 1 \}$.



Лекція 3. Приклади відношень

План

1. Рефлексивне та іррефлексивне відношення
2. Симетричне та антисиметричне відношення
3. Транзитивне відношення
4. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентності

В загальному випадку є такі види відношень R в множині A :

1. Рефлексивне та іррефлексивне відношення.

Означення. Бінарне відношення R задане на множині A називається рефлексивним , якщо довільний елемент a з множини $F(R) = D(R) \cup E(R)$ перебуває у відношенні R сам з собою:

$$aRa \ (a \in F(R)).$$

Інакше кажучи, відношення R називається рефлексивним, якщо при будь-якому a з множини $F(R)$ $< a, a > \in R$.

Наприклад, відношення $Q = \{<1,1>, <1,2>, <2,2>, <2,3>, <3,3>\}$ рефлексивне у множині $A = \{1,2,3\}$, але не рефлексивне у множині $B = \{1,2,3,4\}$

Рефлексивними є наприклад, такі відношення: рівності (=), не більше ($\leq$), подільності ($\vdots$), рівносильності висловлювань ($\Leftrightarrow$), паралельності ($\|$), конгруентності ($\cong$) та подібності.

Прикладом рефлексивних відношень можуть служити такі бінарні відношення:

- пряма x паралельна прямій y в площині z;
- студент x — ровесник студента y.

Дійсно, в першому випадку з елементарної геометрії відомо, що дві прямі, які лежать в одній площині, паралельні, якщо вони або збігаються, або не мають жодної спільної точки, скільки б їх не продовжували. Оскільки пряма x збігається сама з собою, то пара (x, x) належить даному відношенню.

У другому випадку очевидно, що кожний студент — сам собі ровесник.

Означення. Бінарне відношення R називається іррефлексивним, якщо aRa не має сенсу.

Наприклад, відношення строгого порядку $x < x$ ($\neq, \perp$) на множині дійсних чи раціональних чисел не має сенсу, тому що воно завжди хибне.

Порожнє відношення $\varnothing$ теж вважається іррефлексивним.

2. Симетричне та антисиметричне відношення

Означення. Бінарне відношення R, задане на множині A, називається симетричним, якщо $a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$ $(R \subseteq R^{-1})$.

Прикладом симетричних відношень можуть служити такі бінарні відношення:

• пряма x перпендикулярна до прямої y в площині z;

• студент x є сусідом по парті студента y.

Дійсно, у першому випадку з елементарної геометрії відомо: якщо пряма x перпендикулярна до прямої y, то і пряма y перпендикулярна до прямої x.

У другому випадку всякий студент може впевнитися, що коли студент y є його сусідом, то сусідом студента y є він сам. Зауважимо, що наведені відношення не є рефлексивними.

Означення. Бінарне відношення R, задане на множині A, називається антисиметричним, якщо з aRb і bRa випливає $a = b$ $(R \cap R^{-1} \subseteq i_A)$.

Прикладом антисиметричного відношення може служити бінарне відношення включення для множин, тобто відношення "множина A є підмножиною множини B".

Справді, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то з аксіоми об'ємності випливає, що множини A і B складаються з одних і тих же елементів, тобто $A = B$.

3. Тразитивне відношення

Означення. Бінарне відношення R , задане на множині A, називається транзитивним, якщо з aRb і bRc випливає aRc $(R^2 \in R)$.

Прикладом транзитивних відношень можуть служити такі бінарні відношення:

• місто x зв'язане з містом y шосейною дорогою;

• студент x є ровесником студента y;

• трикутник x подібний трикутнику y;

• дійсне число x більше дійсного числа y.

Отже, у першому випадку, якщо між містами x *і* y є шосейна дорога і між містами y, c також є шосейна дорога, то ясно, що між містами x, c теж є шосейна дорога, яка, наприклад, пролягає через місто y.

В останніх трьох випадках транзитивність очевидна.

4. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентності

Означення. Відношення R в деякій множині A називається відношенням еквівалентності в цій множині, якщо воно рефлексивне, симетричне та транзитивне.

Наприклад:

а) відношення подібності в множині всіх трикутників на площині:

1) кожний трикутник подібний сам до себе (рефлексивність);

2) якщо один трикутник подібний до другого, то другий подібний до першого (симетричність);

3) якщо перший трикутник подібний до другого і другий трикутник подібний до третього, то перший трикутник подібний до третього (транзитивність).

б) відношення рівночисельності в довільній системі скінченних множин:

1) кожна множина має однакову кількість елементів сама з собою (рефлексивність);

2) якщо перша множина має однакову кількість елементів з другою множиною, то й друга множина має однакову кількість елементів з першою множиною (симетричність);

3) якщо перша множина має однакову кількість елементів з другою множиною і друга множина має однакову кількість елементів з третьою множиною то перша множина має однакову кількість елементів з третьою множиною (транзитивність).

Якщо R – відношення еквівалентності в множині A, то множину R – образів елемента $x \in X$ називають ***класом еквівалентності***, породженим елементом x, і позначають через $[x]$, тобто

$$[x]=\{y \mid yR\,x,\ y \in A,\ x \in A\}\ .$$

Наприклад, нехай A- множина мешканців міста Тернополя , а відношення R – проживання в одному будинку; тоді множина всіх мешканців окремого будинку є класом еквівалентності.

Класи еквівалентності мають такі властивості:

1) кожний елемент належить своєму класові еквівалентності $x \in [x]$;

2) якщо R – відношення еквівалентності в множині A, та xRy то $[x]=[y]$;

3) якщо R – відношення еквівалентності в множині A, то класи еквівалентності становлять розбиття множини A і, навпаки, якщо дано розбиття множини A, то цим самим визначено відношення еквівалентності на A.

4)

Наприклад,

1. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,

   $\rho=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<1,3>,<2,3>,<2,1>,<3,1>,$

   $<3,2>,<4,4>,<5,5>,<4,5>,<5,4>,<6,6>,<7,7>,<6,7>,<7,6>\}$;

R – відношення еквівалентності на множні A, класами еквівалентності служать множини

$\{1,2,3\}$, $\{4,5\}$, $\{6,7\}$, які в сукупності складають розбиття множини A ;

2. Навпаки, нехай тепер задано розбиття $M=\{\{a,b,c\},\{d\},\{e, f\}\}$ деякої множини $A=\{a,b,c,d,e,f\}$; тоді відповідне відношення R – еквівалентності на множині A має вигляд:

$R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,$
$<e,f>,<f,e>,<f,f>\}$

Лекція 4. Відношення часткового порядку

План

1. Відношення часткового, строгого та квазіпорядку
2. Найбільший та найменший, мінімальний та максимальний елемент множини
3. Найпростіші властивості частково упорядкованих множин
4. Приклади лінійно упорядкованих і частково упорядкованих множин
5. Цілком упорядкована множина

1. Відношення часткового, строгого та квазіпорядку

Означення. Бінарне відношення R, визначене на множині A, називається ***частковим порядком*** на A, якщо для будь-яких a, b, c із A виконуються властивості:

1) $a\,R\,a$ $\quad (i_A \subseteq R)$ (рефлексивність);

2) $a\,R\,b$ і $b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$ $\quad (R^2 \subseteq R)$ (транзитивність);

3) $a\,R\,b$ і $b\,R\,a \Rightarrow a = b$ $\quad (R \cap R^{-1} \subseteq i_A)$ (антисиметричність).

Частковий порядок на множині A, як правило, позначають символом $\le$. Якщо $a \le b$ для деяких $a, b \in A$, то говорять, що a менше або дорівнює b, а також, що a включається в b або дорівнює b.

Якщо $a \le b$ і $a \ne b$, то говорять, що a строго менше b $(a < b)$.

Означення. Транзитивне та іррефлексивне відношення називається відношедням строгого порядку. Це відношення позначають $<$.

Означення. Транзитивне та рефлексивне відношення називається відношенням квазіпорядку. Це відношення позначають $\preceq$.

З кожним відношенням часткового порядку $\le$ зв'язане відношення строгого порядку $<$ (цей порядок називають строгою частиною відношення $\le$):

$$(a < b) \Leftrightarrow a \le b \text{ і } a \ne b.$$

Навпаки, з кожним відношенням строгого порядку $<$ пов'язане відношення часткового порядку $\le$:

$$(a \le b) \Leftrightarrow a < b \text{ або } a = b.$$

2. Найбільший та найменший, мінімальний та максимальний елемент множини

Зафіксуємо строгий порядок розташування символів у довільному скінченому алфавіті $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, наприклад, покладемо, що $a_1<a_2<.....<a_n$. Тоді можна означити так званий лексикографічний порядок на множині A^m усіх слів довжиною m в алфавіті A, а саме : вважатимемо $a_{j_1}a_{j_2}....a_{j_m}<a_{i_1}a_{i_2}....a_{i_m}$ тоді і тільки тоді, коли $a_{j_s}=a_{i_s}$ для $s=1,2,...,k-1$ і $a_{j_k}<a_{i_k}$ для певного $k=1,2,...,m$.

Лексикографічний порядок можна поширити на множину A^* усіх слів у алфавіті A, якщо доповнити цей алфавіт додатковим («порожнім») символом p і вважати, що $p<a_i$, $i=1,2,....,n$. При порівнянні двох слів різної довжини спочатку слово меншої довжини доповнюється справа такою кількістю «порожніх» символів p, щоб зрівнятися за довжиною з другим словом, після чого обидва слова порівнюються за правилом порівнювання слів однакової довжини. Нехай $A=\{a,b,c\}$ і $a<b<c$, тоді

$aac<aba,\ abbc<abcb,\ ab<abab,\ b<cba$ і т.ін.

Лексикографічний порядок лежить в основі впорядкування всіх словників, енциклопедій, довідників, списків, таблиць тощо.

Нехай M – частково впорядкована множина і A – деяка не порожня підмножина множини M. Верхньою гранню підмножини $A\subseteq M$ у множині M називається елемент $b\in M$ такий, що $a\le b$ для всіх $a\in A$. Елемент b називається найбільшим елементом множини M, якщо b - верхня грань множини M. Відповідно елемент c частково впорядкованої множини M називається нижньою гранню підмножини $A\subseteq M$, якщо $c<a$ для будь-якого $a\in A$. Елемент c називається найменшим у множині M, якщо c - нижня грань множини M.

Означення. Елемент $x\in M$ називається максимальним у множині M, якщо не існує такого елемента $a\in M$, що $x<a$. Відповідно елемент $n\in M$ називається мінімальним у множині M, якщо не існує такого елемента $a\in M$, що $a<n$.

Очевидно, що коли в частково впорядкованій множині M існує найбільший елемент, то він є єдиним максимальним елементом цієї множини. Аналогічно найменший елемент множини M є єдиним мінімальним елементом цієї множини.

3. Найпростіші властивості частково упорядкованих множин.

Теорема 1. (принцип двоїстості). Відношення, обернене до відношення часткового порядку, теж, буде відношенням часткового порядку.

Доведення. Нехай R^{-1} — відношення, обернене до відношення R:

1) оскільки $i_A \subseteq R$, то $i_A = i_A^{-1} \subseteq R^{-1}$;

2) якщо $R \times R \subseteq R$, то $R^{-1} \times R^{-1} = (R \times R)^{-1} \subseteq R^{-1}$;

3) якщо $R \cap R^{-1} \subseteq i_A$, то $R^{-1} \cap R \subseteq i_A \supseteq R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1}$, що і потрібно було довести.

Відношення часткового порядку R^{-1} називається двоїстим до відношення часткового порядку R.

Означення . Відношення часткового порядку $\leq^{-1}$ називається двоїстим до відношення часткового порядку $\leq$.

Відношення $\leq^{-1}$ позначається $\geq$. Таким чином, $a(\leq^{-1})b$ означає $b \geq a$.

Якщо $a \leq b$ або $b \leq a$, то a, b називають елементами, порівнянними відносно порядку $\leq$.

З принципу двоїстості випливає, що коли в якому-небудь твердженні про частково упорядковану множину замінити частковий порядок на двоїстий до нього порядок, то одержане твердження теж буде справедливе.

Теорема 2. Всяка підмножина частково упорядкованої множини теж буде частково упорядкованою множиною.

(Доведення пропонується як вправа).

Теорема 3. В кожній частково упорядкованій множині існує не більше одного найменшого (а згідно з принципом двоїстості і найбільшого) елемента.

Доведення. Припустимо, що a і b — два найменші елементи в множині M. Тоді $a \leq b$, оскільки a — найменший елемент, і $b \leq a$, оскільки b — найменший елемент. Але тоді із транзитивності відношення випливає, що $a = b$.

Якщо довільні два елементи з множини M порівнюються між собою відносно $\leq$**,** то таке відношення називається лінійним порядком на M, а множина M — упорядкованою або лінійно упорядкованою**,** або ланцюгом**.**

Означення. Нехай M— частково упорядкована множина і a, $b \in M$. Говорять, що елемент b домінує над елементом a, якщо $b > a$ і для жодного елемента x із M не виконується, що $b > x > a$.

Наступна проста теорема показує, що відношення часткового порядку $\leq$ можна однозначно відновити за відношенням домінування в будь-якій скінченній частково упорядкованій множині.

Теорема 4. Нехай $a < b$ в скінченній частково упорядкованій множині M. Тоді в M існує хоча б один ланцюг, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ в якому кожний x_i домінує над x_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доведення індукцією за числом n елементів y, які задовольняють умову $a < y < b$

При $n = 0$ b домінує над a за означенням.

К р о к і н д у к ц і ї.

Припустимо, що теорема справедлива для всіх $m < n$. Розглянемо випадок $n = m$, де $n > 0$. Оскільки $n > 0$, то існує такий елемент $c \in M$, що $a < c < b$, і число елементів y, z, що задовольняють умови $a < y < c$ та $c < z < b$, не перевищує $n-1$. За припущенням індукції існують скінченні ланцюги, які зв'язують a і c та c і b, середні елементи яких знаходяться у відношенні домінування. З'єднавши ці два ланцюги, одержуємо шуканий ланцюг.

4. Приклади лінійно упорядкованих і частково упорядкованих множин

1. Множини $\boldsymbol{N}$, N^+, $\boldsymbol{Z}$ і множина $\boldsymbol{D}$ дійсних чисел з їх природним порядком; множину $\boldsymbol{N}$ часто називають натуральним рядом, а всяку її підмножину виду $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ — початковим відрізком або просто відрізком натурального ряду.

2. Множина точок числової осі (прямої).

3. Булеан $B(A)$, тобто множина всіх підмножин деякої множини A з відношенням множинного включення $\subseteq$ як відношенням часткового порядку.

4. Множина N^+ з відношенням $n < n_1 \Leftrightarrow n_1$ ділиться націло на n.

5. Цілком упорядкована множина.

Аксіома повної упорядкованості. Аксіома вибору

Лінійно упорядкована множина M називається повністю упорядкованою, якщо всяка її непуста підмножина A має найменший елемент. З поняттям повністю упорядкованої множини пов'язаний один з основних постулатів теорії множин.

Аксіома повної упорядкованості. Всяку непусту множину можна повністю упорядкувати.

Зауважимо, що ця аксіома логічно еквівалентна другій аксіомі теорії множин — аксіомі вибору .

Аксіома вибору. Якщо дана множина M, то існує функція f, яка ставить у відповідність кожній непустій підмножині A із множини M один визначений елемент $f(A)$ із множини A.

Логічну еквівалентність аксіом слід розуміти так: коли одну із них вибрати за аксіому, то другу можна строго довести як теорему, і навпаки. Так, якщо береться аксіома вибору, то аксіома повної упорядкованості стає твердженням, яке в теорії множин відоме як теорема Цермело.

Метод трансфінітної індукції.

Завдяки аксіомі повної упорядкованості багато властивостей повністю упорядкованих множин можна доводити методом трансфінітної індукції.

Теорема (метод трансфінітної індукції).

Нехай e — найменший елемент повністю упорядкованої множини M і $P(x)$ —деяка властивість елемента $x \in M$. Тоді, якщо з істинності $P(e)$ і $P(x)$ для всіх $x < a$ випливає істинність $P(a)$, то $P(x)$ істинне для всіх x із M.

Доведення. Припустимо супротивне: існує така непуста підмножина A елементів із M, що для всіх $y \in A$ властивість $P(y)$ хибна при виконанні умов теореми.

Нехай b — мінімальний елемент в A. Оскільки $P(e)$ істинне, то $b \neq e$ і $b > e$.

Із умов теореми випливає, що $P(x)$ істинне для всіх $x < b$, але тоді з цих же умов повинна випливати істинність і $P(y)$, а це суперечить нашому припущенню.

Теорема доведена.

Метод побудови за індукцією

Метод трансфінітної індукції дає можливість не тільки доводити властивості за індукцією, але і виконувати побудову за індукцєю або давати означення за індукцією.

Дійсно, нехай A— повністю упорядкована множина, і нехай потрібно визначити на цій множині функцію $f(x)$, яка ставить у відповідність кожному елементу x із A деякий елемент множини B. Припустимо також, що $f(x)$ повинна

задовольняти деякі рекурентні співвідношення, тобто співвідношення, які однозначно визначають для всякого $a \in A$ значення $f(a)$ за значеннями $f(b)$ для всіх $b < a$.

Теорема (метод побудови за індукцією).

Існує єдина функція $f(x)$, яка визначена на всій множині A, задовольняє вказані рекурентні співвідношення і набуває довільних заданих значень на мінімальному елементі множини A.

Доведення.

Покажемо спочатку єдиність такої функції.

Припустимо, що існує дві різні функції $f(x)$ і $g(x)$ на множині A, які задовольняють наші умови.

Нехай існує непуста підмножина елементів x із A, для яких $f(x) \neq g(x)$.

Оскільки A повністю упорядкована, то ця підмножина має мінімальний елемент a. Цей елемент не може бути мінімальним для всієї множини A, тому що тоді, за умовою, на цьому елементі $f(a)$ і $g(a)$ збігалися б. Отже, існує $b < a$, такий, що $f(b) = g(b)$.

За умовою теореми рекурентні співвідношення однозначно визначають значення наших функцій для $x = a$ за їх значеннями для всіх $b < a$, отже, $f(a) = g(a)$.

Одержана суперечність доводить єдиність $f(x)$.

Доведемо тепер існування функції.

Припустимо, що на мінімальному елементі множини A значення шуканої функції уже задано.

Позначимо через P таку властивість елемента $a \in A$: a має властивість P, якщо на множині C всіх таких x, що $x \leq a$, може бути визначена функція, яка задовольняє рекурентні співвідношення і набуває заданого значення на мінімальному елементі множини A.

За припущенням, P істинне на мінімальному елементі $a \in A$. Якщо елементи b і c задовольняють властивість P і $b < a$, то згідно з доведеною вище єдиністю шуканої функції не на множині A, а на множині $B = \{x \in A \mid x \leq b\}$ маємо $f_b(x) = f_a(x)$.

Звідси випливає, що коли всі елементи b, строго менші елемента a, мають властивість P, то і сам елемент a має цю властивість. Одержуємо функцію $f_a(x)$, яка задовольняє всі вимоги, якщо для всякого $b < a$ покласти, $f_a(b) = f_b(b)$ а за $f_a(a)$ взяти те значення, яке однозначно визначається за рекурентними співвідношеннями.

На основі методу трансфінітної індукції можна говорити, що для всіх a із A істинне $P(a)$. Покладаючи тепер $\forall a \in A \quad f_a(a) = f(a)$, визначаємо функцію $f(x)$, яка має необхідні властивості.

Теорема доведена.

Зауважимо, що метод трансфінітної індукції, як і метод побудови за індукцією, можна застосовувати і до частково упорядкованих множин. Обмежимося лише формулюваннями цих фактів.

Теорема (умова індуктивності). Всі елементи частково упорядкованої множини A мають властивість P, якщо:

1) всі мінімальні елементи із множини A задовольняють властивість P (в тому випадку, коли вони існують);

2) з того, що $P(x)$ істинне для всіх $x < a$, де $x, a \in A$, випливає істинність $P(a)$.

Теорема (побудова за індукцією). Існує єдина функція $f(x)$, яка визначена на всій множині A, задовольняє вказані рекурентні співвідношення і набуває довільних заданих значень на всіх мінімальних елементах множини A.

Лекція 5. Відображення множин

План

1. Функціональні бінарні відношення
2. Відображення і функції
3. Класифікація відображень
4. Умови існування оберненої функції
5. Композиція відображень

1. Функціональні бінарні відношення

Означення. Бінарне відношення R називається функціональним, якщо з aRb і aRc випливає $b = c$.

Інакше кажучи, відношення R називається функціональним, якщо R не містить різних упорядкованих пар з однаковими першими компонентами.

Наприклад, відношення

$R = \{<1,20>,<2,30>,<3,40>,<4,50>,<5,50>\}$ - функціональне,

відношення

$S = \{<m,1>,<n,0>,<n,1>,<p,1>,<g,0>\}$ не є функціональним.

Відношення $T = \{<x, x^2> / x \in R\}$ - функціональне, тоді як відношення $T^{-1} = \{<x^2, x> / x \in R\}$ не функціональне.

Справді, якщо $<a,b> \in T$ і $<a,c> \in T$, то $b = a^2$ і $c = a^2$ і, отже $b = c$. Коли $x = 1$, упорядкована пара $<1,1> = <1^2,1> \in T^{-1}$, а якщо $x = -1$, множина T^{-1} містить упорядковану пару $<1,-1> = <(-1)^2,-1>$. Отже, T^{-1} містить різні впорядковані пари $<1,1>$, $<1,-1>$ з однаковими першими компонентами, тобто T^{-1} не функціональне відношення.

2. Відображення і функції.

Означення. Функціональне відношення R від A до B (тобто $R \subset A \times B$) називають відображенням , якщо $D(R) = A$ ($D(R)$ - область визначення).

При цьому говорять, що R є відображення множини A в множину B і записують $R: A \to B$.

Якщо R є відображенням множини A в множину B, то множину A ($D(R) = A$) називають областю визначення відображення R, а множину $E(R)$ ($E(R) \subset B$) множиною значень цього відображення.

Досить поширеним є клас відображень, область визначення і множина значень яких – числові множини. Такі відображення, як правило, називають функціями. Функціями , наприклад, є розглянуті раніше відображення R і T.

З іншого боку, областю визначення і множиною значень деякого відображення R можуть бути геометричні об'єкти (фігури). У такому разі відображення R називають перетворенням (геометричним перетворенням). Прикладами геометричних перетворень можуть : поворот площини (зокрема центральна симетрія), перетворення подібності площини (зокрема гомотетія).

Відображення $R: A \to B$ називається

- *сюр'єктивним* (покривним відображенням, або відображенням множини A на множину B), якщо $E(R) = B$.
- *ін'єктивним* (взаємно однозначним відображенням множини A в множину B, або біоднозначним відображенням), якщо різним прообразам відповідають різні образи. Інакше кажучи, якщо з нерівності $a \neq b$ випливає нерівність $R(a) \neq R(b)$.
- *бієктивним* (взаємно однозначним відображенням множини А на множину В), якщо воно одночасно сюр'єктивне і ін'єктивне.

Теорема. Якщо R - бієктивне відображення множини A на множину B, то R^{-1} теж бієктивне відображення, але вже множини B на множину A. Інакше кажучи, якщо $R: A \to B$, то $R^{-1}: B \to A$.

Доведення.

Нехай R - бієктивне відображення множини A на множину B, тобто R - функціональне відношення від A до B причому $D(R) = A$, $E(R) = B$ і $R(a) \neq R(b)$, якщо $a \neq b$.

Покажемо насамперед, що обернене відношення теж функціональне.

Справді, нехай $< a,b > \in R^{-1}$ і $< a,c > \in R^{-1}$, тоді $< b,a > \in R$, $< c,a > \in R$, тобто $a = R(b)$ і $a = R(c)$. Отже $R(b) = R(c)$. Це можливо лише тоді, коли $b = c$ (якщо $b \neq c$, то $R(b) \neq R(c)$). Таким чином, якщо $aR^{-1}b$, $aR^{-1}c$, то $b = c$. Це означає, що відношення R^{-1} функціональне.

Крім того $D(R^{-1}) = E(R) = B$, $E(R^{-1}) = D(R) = A$.

Отже, R^{-1} є відображенням множини B в множину A ($R^{-1}: B \to A$).

Рівність $E(R^{-1}) = A$ означає, що відображення R^{-1} сюр'єктивне, тобто є відображенням на множині A.

Обгрунтуємо, що відображення R^{-1} є ін'єктивне.

Нехай $a \neq b$. Припустимо, що $R^{-1}(a) = R^{-1}(b) = c$, тобто $aR^{-1}c$, $bR^{-1}c$. Тоді cRa, cRb. Але відношення R функціональне. Тому останні співвідношення можливі лише тоді, коли $a = b$, а за умовою $a \neq b$. Отже, припущення про те, що $R^{-1}(a) = R^{-1}(b)$ неправильне.

Таким чином, якщо $a \neq b$, то $R^{-1}(a) \neq R^{-1}(b)$, тобто відображення R^{-1} ін'єктивне.

Крім того , як доведено, R^{-1} сюр'єктивне. Це означає, що R^{-1} бієктивне відображення множини B на множину A ($R^{-1}: B \to A$).

3. Умови існування оберненої функції

Відповідь на питання про існування оберненої функції дає попередня теорема: обернена функція існує тоді і тільки тоді, коли різним прообразам ($a \neq b$) відповідають різні образи ($f(a) \neq f(b)$), тобто кожного свого значення розглядувана функція набуває лише один раз.

Наприклад, розглянемо функції

$f_1 = \{< x, y > / y = x^2, x \in R\}$,

$f_2 = \{< x, y > / y = x^2, x \in [0, +\infty)\}$.

Для функції f_1 обернена не існує (наприклад, $f_1(-2) = f_1(2)$ - різним прообразам відповідають однакові образи) .

Для f_2 обернена існує , тому, що з того, що $a \neq b \Rightarrow f_2(a) \neq f_2(b)$.

Обернене відображення має властивості:

1) $(f^{-1})^{-1} = f$,

2) $f^{-1} f = i_X$, $f^{-1} f = i_Y$,

3) $(gf)^{-1} = f^{-1} g^{-1}$.

4. Композиція відображень

Означення. Якщо R та G однозначні відображення, то множина пар $\{< x,z > /$ існує таке y, що $xRy,\ yGz\ \}$ називається композицією цих відображень і позначається GR.

Зокрема, якщо $R: X \to Y$, $G: Y \to Z$, то $GR: X \to Z$, причому $G(Rx) = (GR)x$.

Теорема. Композиція довільних відображень теж є відображенням.

Доведення.

Доведемо, що композиція функціональних бінарних відношень теж є функціональним відношенням.

Якщо $SR = \varnothing$, то множина SR не містить різних упорядкованих пар з однаковими першими компонентами і отже, за означенням функціонального відношення, є функціональним відношенням у множині $\varnothing$.

Припустимо тепер, що $SR \neq \varnothing$ і впорядковані пари $< a,b >$ і $< a,c >$ належать множині SR.

За означенням композиції відношень, існують такі елементи α і β, що $aR\alpha,\ \alpha Sb,\ aR\beta,\ \beta Sc$.

Але відношення R функціональне, тому з $aR\alpha$ і $aR\beta$ випливає рівність $\alpha = \beta$.

αSb і $\alpha Sc \Rightarrow b = c$, оскільки S теж функціональне відношення.

Отже, якщо $aSRb$ і $aSRc$, то $b = c$. Це означає, що RS функціональне відношення, тобто відображення множини $D(RS) \to E(RS)$.

Теорема. Композиція бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

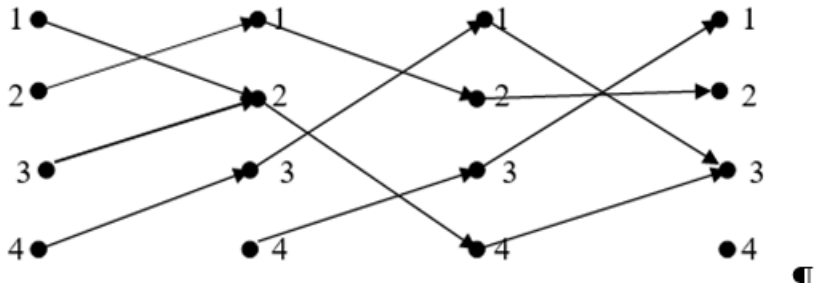
Наслідок. Якщо відображення $R: A \to B,\ S: B \to C$ бієктивні, то SR - бієктивне відображення множини A на множину C: ($SR: A \to C$).

Справді, якщо $E(R) = D(S) = B$; $D(RS) = D(R) = A$; $E(RS) = E(S) = C$.

Композиція відображень має властивості:

1) $RG \neq GR$,
2) $R(GH) = (RG)H$.

Наприклад, нехай R, G,H : $X \to X$, X={1,2,3,4}



$(GR)2 = G(R2) = G1 = 2$, $(RG)2 = R(G2) = R4 = 3$.

$R\,(GH)1 = R[G(H1)] = R[G3] = R1 = 2$, $(RG)H1 = (RG)3 = R(G3) = R1 = 2$.

Література

1. Нікольський Ю.В, Пасічник В.В, Щербина Ю.М. Дискретна математика. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
2. Кривий С.Л. Дискретна математика: підручник для студентів вищ. навч. закл.– Чернівці-Київ: Видавничий дім «Букрек», 2014. – 568 с.
3. М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.
4. Ю.В. Нікольський, Ю.М. Щербина. Збірник задач з дискретної математики. Львів, ЛДУ ім. І.Франка, 1998.
5. Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw-Hill, Inc, 1988.
6. Базилевич Л. Дискретна математика у прикладах і задачах : підручник / Л. Базилевич. – Л. : Видавець І. Е. Чижиков, 2013. – 487 с.
7. Карнаух Т. О. Вступ до дискретної математики / Т. О. Карнаух, А. Б. Ставровський. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2006. – 113 с.
8. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. –К.: Вид. дім дім "Києво-Могилянська Академія", 2009.
9. Матвієнко М. П. Дискретна математика : навч. посіб. / М. П. Матвієнко. – К. : Видавництво "Ліра-К", 2013. – 348 с.
10. Борисенко О. А. Дискретна математика : підручник О. А. Борисенко. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2007. – 255 с.
11. Ядренко М. Й. Дискретна математика : навч. посіб. М. Й. Ядренко. – К. : ВПЦ "Експрес", 2003. – 244 с.

ДЛЯ НОТАТОК

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Курс лекцій з дисципліни
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
розділ «ТЕОРІЯ МНОЖИН»

для студентів факультету
«Комп'ютерно- інформаційних систем і програмної інженерії»

Укладачі: Надія КРИВА
Наталія БЛАЩАК
Ірина Дідич

Підписано до друку _____ Формат 60х84 1/16. Ум. др. арк. 1. Друк лазерний. Замовлення № _____. Наклад 10 пр.
Віддруковано у видавництві ТНТУ