КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК. 539.3

О.Шаблій, докт. фіз.-мат. наук; Л.Цимбалюк
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МІНІМІЗАЦІЯ ЕНЕРГІЇ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНІЙ ОБРОБЦІ ТОНКИХ СТЕРЖНІВ

В ряді випадків виконання технологічних операцій здійснюється шляхом нагрівання або охолодження елементів конструкцій, що мають форму стержнів (армуюча арматура, зуби ріжучих інструментів та інші). У статті показано, що нагрів таких деталей до необхідної температури за заданий час по оптимальному закону приводить до 25% економії енергії порівняно з нагрівом за допомогою теплових джерел з постійною питомою потужністю.

Умовні позначення:

T – температура в довільній точці стержня,

q_v – питома потужність теплових джерел,

α - коефіцієнт тепловіддачі,

λ - коефіцієнт теплопровідності,

a - коефіцієнт температуропровідності,

ρ - густина,

c – питома теплоємність матеріалу стержня.

У багатьох випадках у техніці виникає необхідність нагріву або охолодження стержнів. Так при виробництві будівельних панелей, арматурні стержні нагрівають для встановлення їх з попереднім натягом. Коли ж коротку деталь типу стержня потрібно встановити з натягом, її охолоджують.

На сучасному рівні здійснення таких технологічних процесів реалізується за допомогою постійних теплових джерел.

У даній статті на прикладі прямих стержнів показано, що досягнення певного рівня температури, необхідної для виконання технологічної операції, за заданий час можна досягти при значно менших енергетичних затратах.

Розглянемо тонкий короткий стержень прямокутного поперечного перерізу довжиною 2l, шириною b і висотою h.

Нехай на поверхнях стержня мають місце умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого T_c. Умови теплообміну на кінцях стержня однакові. Потрібно знайти такий закон зміни з часом потужності джерел, симетрично розміщених відносно середини стержня та їх розподіл по довжині стержня, який дозволяв би за заданий час τ довести температуру стержня до необхідної $T_з$, і при цьому сумарна затрачена потужність джерел була б мінімальною.

Внаслідок симетрії задачі достатньо розглянути половину стержня $(0 \le x \le l)$.

Температурне поле в такому стержні визначається в результаті розв’язання крайової задачі [1]

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - m^2 T_1\right] + \frac{q_v}{\rho c}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda} T_1 \quad \text{при } x=l, \tag{3}$$

$$T_1 = 0 \text{ при } t=0, \tag{4}$$

$$T_1 = T_з - T_c \text{ при } t=\tau, \tag{5}$$

де $T_1 = T - T_c$,

$$m^2 = \frac{2\alpha(b+h)}{\lambda bh}.$$

Зауважимо, що в даній постановці задачі вважається, що функція $T_з(x)$, в момент часу $t=\tau$ задовольняє рівняння теплопровідності (1) і сумісна з граничними умовами (2,3).

За критерій мінімізації виберемо міру відхилення функції $q_v(x,t)$ від нуля на всьому проміжку часу [0;t] і довжині стержня

$$I = \int_0^1 \int_0^\tau q_v^2 \, dt dx. \tag{6}$$

Використовуючи метод множників Лагранжа, з врахуванням умови (6) та рівняння (1), зведемо дану задачу до варіаційної на безумовний екстремум шляхом введення розширеного функціоналу

$$I_p = \int_0^1 \int_0^\tau \left\{ q_v^2 + \tilde{T}(t) \left[\frac{\partial T_1}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + am^2 T_1 - \frac{q_v}{\rho c} \right] \right\} dt dx, \tag{7}$$

де $\tilde{T}(t)$ – множник Лагранжа.

Необхідною умовою стаціонарності даного функціоналу є рівність першої варіації нулю:

$$\delta I_p = \frac{\partial I_p}{\partial T_1} \delta T_1 + \frac{\partial I_p}{\partial q_v} \delta q_v + \frac{\partial I_p}{\partial \tilde{T}} \delta \tilde{T} = 0.$$

Після низки перетворень, з використанням граничних (2),(3) і часових умов (4),(5), отримуємо повну систему рівнянь і співвідношень для розв'язання поставленої задачі

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - a \left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - m^2 T_1 \right] - \frac{q_v}{\rho c} = 0, \tag{1$'$}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + a \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} - am^2 \tilde{T} = 0, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0, \\ &\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\alpha}{\lambda} T_1 = 0 \text{ при } x=1, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$T_1=0 \text{ при } t=0, \qquad T_1=T_з-T_c \text{ при } t=\tau, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}=0 \quad \text{при } x=0, \qquad \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x}+a\frac{\alpha}{\lambda}\tilde{T}=0 \text{ при } x=1, \tag{11}$$

$$2q_v-\frac{\tilde{T}}{\rho c}=0, \tag{12}$$

в яких рівняння (1′) та умови (9), (10) записані для прямої задачі, а (8), (10), (11) – для спряженої, рівняння (12) – зв'язує пряму і спряжену задачі.

Розв'язок спряженої задачі (8,11) має вигляд

$$\tilde{T}=\sum_{k=1}^{\infty}c_{1k}\cos r_k x\ e^{-n_k t}, \tag{13}$$

де n_k=-a(r_k^2+m^2), r_k - корені рівняння $r_k \operatorname{tg} r_k l=\frac{\alpha}{\lambda}$.

Враховуючи вирази (12) і (13), отримаємо

$$q_v=\frac{\tilde{T}}{2\rho c}=\frac{1}{2\rho c}\sum_{k=1}^{\infty}c_{1k}\cos r_k x\ e^{-n_k t}. \tag{14}$$

Підставляючи вираз (14) в рівняння (1), отримаємо

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+am^2T_1=\frac{1}{2\rho^2c^2}\sum_{k=1}^{\infty}c_{1k}\cos r_k x\ e^{-n_k t}. \tag{15}$$

Розв'язок задачі (15,9) шукатимемо у вигляді суми функцій

$$T_1=\overline{T}_1+\overline{\overline{T}}_1, \tag{16}$$

де $\overline{T}_1$ - розв'язок відповідної однорідної задачі,

$\overline{\overline{T}}_1$ - окремий розв'язок даної неоднорідної задачі.

Розв'язок однорідної задачі має вигляд

$$\overline{T}_1=\sum_{p=1}^{\infty}c_{2p}\cos z_p x\ e^{n_p t}, \tag{17}$$

де n_p=-a(z_p^2+m^2), z_p - корені рівняння $z_p \operatorname{tg} z_p l=\frac{\alpha}{\lambda}$.

Частковий розв'язок задачі (15,9) будемо шукати у вигляді ряду

$$\overline{\overline{T}}_1=\sum_{p=1}^{\infty}T_{1p}(t)\cos z_p x.$$

Виконавши перетворення, маємо

$$\overline{\overline{T}}_1=\sum_{p=1}^{\infty}\left((M+c_{2p})e^{n_p t}-\frac{c_{1p}}{4\rho^2c^2n_p}\right)e^{-n_p t}\cos\ z_p x\,. \tag{18}$$

Враховуючи вирази (16), (17), (18), розв'язок задачі (15,9) запишемо у вигляді

$$T_1=\sum_{p=1}^{\infty}\left(M+\frac{c_{1p}}{4\rho^2c^2n_p}e^{-n_p t}\right)\cos\ z_p x\,.$$

Задовольнивши початкову умову (4), одержимо

$$T_1=2(T_з-T_c)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p\ \mathrm{sh}\ n_p t\ \sin\ z_p l\ \cos\ z_p x}{\mathrm{sh}\ n_p\tau\ (2z_p l+\sin\ 2z_p l)}, \tag{19}$$

тоді

$$q_v=\frac{\tilde{T}}{2\rho c}=4\rho c(T_з-T_c)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p\sin z_p l\cos z_p x\ e^{-n_p t}}{\mathrm{sh}\ n_p\tau\,(2z_p l+\sin 2z_p l)}\,. \tag{20}$$

Підрахунки за допомогою формул (19), (20) показують, що нагрів стержня до необхідної температури за оптимальним режимом приводить до 25% економії енергії порівняно з нагрівом за допомогою теплових джерел з постійною питомою потужністю.

Some manufacturing processes are carried out by heating or coding the elements of constructions which have the form of rods (armor armature, cutting instruments teeth, etc). It is shown in the article that the heating of such parts till the necessary temperature during the definite time according to the optimal law leads to 25% energy saving compared with the heating by means of the energy sources with the stable specific power.

Література

1. Лыков А.В., Теория теплопроводности – М.: Высшая школа, 1967. –599 с.

Одержано 12.01.1997 р.