МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. ФІЗИКА

УДК 319.216

С.Лупенко, М.Приймак, канд. техн. наук; Л.Щербак, докт. техн. наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Розглянуто задачі, що виникають при моделюванні лінійних періодичних випадкових процесів на ПЕОМ. Подано приклад моделювання реалізацій дискретного лінійного періодично корельованого випадкового процесу і обчислені статистичні оцінки його характеристик.

При розв'язуванні задач статистичного моделювання виникає необхідність моделювання випадкових сигналів $\{\xi(\omega,t),\ t\in T,\ \omega\in\Omega\}$ з наперед заданими статистичними характеристиками [1,2]. Певною мірою це стосується і задач моделювання стохастичних сигналів з періодичними характеристиками. Такі сигнали є в акустиці (шуми кавітації, віброакустичні шуми), електротехніці (навантаження енергосистем, магнітні шуми феромагнетиків при їх циклічному перемагнічуванні), біомедицині (електрокардіосигнал, фонокардіосигнал, балістокардіосигнал). У даній роботі розглядаються деякі методи статистичного моделювання стохастичних процесів з періодичними ймовірнісними характеристиками на основі лінійних періодичних випадкових процесів (ЛПВП).

Відомо, що лінійний випадковий процес $\{\xi(\omega,t),\ t\in T,\ \omega\in\Omega\}$ подають у вигляді стохастичного інтегралу [3]

$$\xi(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,\tau)d\eta(\omega,\tau),\ \ t\in T, \tag{1}$$

де $\varphi(t,\tau)$ - невипадкова числова функція, яка для кожного $t\in T$ приймає скінченні значення рівномірно по τ, $\varphi(t,\tau)\in L_2$; $\forall t\in T$, $\eta(\omega,\tau)$ - стохастично неперервний сепарабельний випадковий процес із незалежними приростами, що задовольняє умову $P\{\eta(\omega,\tau)=-\eta(\omega,-\tau)\}=1$ і $P\{\eta(\omega,0)=0\}=1$. Ядро стохастичного інтегралу (1) має фізичну інтерпретацію імпульсної реакції лінійної зі змінними в часі параметрами системи. Випадковий процес $\eta(\omega,\tau)$ називають породжуючим випадковим процесом. Узагальнена похідна від породжуючого процесу - білий шум $\zeta(\omega,\tau)$. Таким чином, (1) можна трактувати як випадковий процес, який виникає на виході лінійної системи при дії вхідного білого шуму $\zeta(\omega,\tau)$.

Для процесу (1) записана його багатовимірна характеристична функція, логарифм якої [3]:

$$\begin{aligned}&\ln f(u_1,u_2,...,u_n;t_1,t_2,...,t_n)=\\&=i\sum_{k=1}^{n}u_k\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t_k)d\mu(\tau)-\sum_{k,j=1}^{n}u_ku_j\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau,t_k)\varphi(\tau,t_j)d\sigma(\tau)+\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{ix\sum u_k\phi(\tau,t_k)}-1-\frac{ix}{1+x^2}\sum_{k=1}^{n}u_k\varphi(\tau,t_k)\right]d_xd_\tau L(x,\tau).\end{aligned} \tag{2}$$

Із (2) видно, що характеристична функція лінійного випадкового процесу визначається параметрами породжуючого процесу $\{\mu(\tau),\sigma(\tau),L(x,\tau)\}$ і ядром $\varphi(t,\tau)$.

На основі результатів роботи [4] та [5] ЛПВП можна задати трьома варіантами. Лінійний процес (1) є T-періодичним $(T>0)$, коли виконуються такі умови [4]:

1. Для процесу (1) одночасно виконуються умови періодичності його ядра і породжуючого процесу:

а) $$\varphi(t,\tau)=\varphi(t+T,\tau+\alpha T), \alpha\in(-\infty,\infty), \tag{3}$$

тобто $\varphi(t,\tau)$ - ядро нестаціонарної лінійної системи;

б) $$\begin{aligned} d\chi_1(\tau)&=d\chi_1(\tau+\alpha T),\\ d\chi_2(\tau)&=d\chi_2(\tau+\alpha T),\\ \partial_x\partial_\tau L(x,\tau)&=\partial_x\partial_\tau L(x,\tau+\alpha T), \end{aligned} \tag{4}$$

де $\chi_1(\tau),\chi_2(\tau)$ - перші дві кумулянтні функції процесу $\eta(\omega,\tau)$, а $L(x,\tau)$- його пуасонівський спектр стрибків у формі Леві (неоднорідний породжуючий процес).

Параметр α має значення відношення періоду приростів породжуючого процесу до періоду лінійного процесу. З іншого боку він визначається співвідношенням $\alpha=tg\psi$, тобто є кутовим коефіцієнтом прямої в площині τOt, вздовж якої $\varphi(t,\tau)$ є періодичною функцією.

1. Для процесу (1)

а) $\varphi(t,\tau)=\varphi(t-\tau)\in L_2(-\infty,\infty)$ - ядро стаціонарної лінійної системи,

б) виконуються умови (4) при умові, що $\alpha=1$. Тобто $\eta(\omega,\tau)$ - породжуючий процес з незалежними Т-періодичними приростами.

2. Для процесу (1)

а) $\varphi(t,\tau)=\varphi(t+T,\tau)$,

б) $$\chi_1(\tau)\equiv\mu; \chi_2(\tau)=\sigma^2, L(x,\tau)\equiv L(x), \tag{5}$$

тобто породжуючий процес $\eta(\omega,\tau)$ є однорідним.

Для моделювання лінійних випадкових процесів на ПЕОМ використовують їх дискретні моделі, які можна подати у вигляді

$$\xi(\omega,i)=\sum_{j=0}^{i}\varphi(j,i)\zeta(\omega,j), i=\overline{0,M-1}, \tag{6}$$

де випадкова послідовність $\{\zeta(\omega,j), j=0,1,2,...,i\}$ є дискретним білим шумом – процесом з незалежними (некорельованими) значеннями.

На ПЕОМ необхідно отримати реалізації (6), які можна подати у вигляді послідовності:

$$\xi_\omega(i)=\sum_{j=0}^{i}\varphi(j,i)\zeta_\omega(j), i=\overline{0,M-1}, \tag{7}$$

де $\{\xi_\omega(i), i=\overline{0,M-1}\}$ - реалізація дискретного лінійного випадкового процесу (6) при фіксованій елементарній події $\omega\in\Omega$, $\{\zeta_\omega(j), j=0,1,2,...,i\}$ - реалізація дискретного білого шуму.

Враховуючи (7) і приймаючи до уваги (3), (4) та (5), моделюючий алгоритм для реалізацій дискретних ЛПВП можна представлений трьома варіантами:

1. Коли $\varphi(j,i)$ є періодичною невипадковою послідовністю, а $\{\zeta_\omega(j), j=0,1,2,...,i\}$ - реалізація періодичного дискретного білого шуму.

2. Коли $\varphi(j,i) = \varphi(i-j)$, а $\{\zeta_{\omega}(j), j = 0,1,2,...,i\}$ - реалізація періодичного дискретного білого шуму, тобто [6]

$$\xi_{\omega}(i) = \sum_{j=0}^{i} \varphi(i-j)\zeta_{\omega}(j). \tag{8}$$

3. Коли $\varphi(j,i)$ - періодична невипадкова послідовність, а $\{\zeta_{\omega}(j), j = 0,1,2,...,i\}$ - реалізація стаціонарного дискретного білого шуму.

Як видно з (6), для моделювання дискретного лінійного випадкового процесу необхідно задати послідовність відліків $\varphi(j,i)$ та ймовірнісні характеристики дискретного білого шуму $\{\zeta(\omega, j), j = 0,1,2,...,i\}$.

Моделювання реалізацій дискретних білих шумів з заданими статистичними характеристиками базується на алгоритмі:

$$\zeta_{\omega}(j) = F_j[\alpha_{\omega}(k)], \tag{9}$$

де $\{\alpha_{\omega}(k)\}$ - реалізація дискретного стаціонарного білого шуму $\{\alpha(\omega,k)\}$ з рівномірним на півінтервалі [0,1) розподілом, на називається базовим білим шумом; $F_j[\cdot]$ - в загальному випадку параметричний оператор, що визначається типом функції розподілу модельованого білого шуму $\zeta(\omega, j)$ та методом його моделювання. В свою чергу для моделювання реалізацій базового білого шуму широко використовуються методи формування псевдовипадкових чисел, алгоритми яких можна записати у вигляді рекурентного співвідношення для його відліків:

$$\alpha_{\omega}(k+1) = G[\alpha_{\omega}(k)], \tag{10}$$

де $G[\cdot]$ - оператор, що відображає конкретний алгоритм перетворення одного з методів псевдовипадкових чисел. Серед відомих методів формування базової послідовності псевдовипадкових чисел можна назвати: метод середніх квадратів, лишків, збурень, конгруентний метод.

Необхідним елементом статистичного моделювання є перевірка якості в статистичному сенсі послідовності значень базового білого шуму. Такими перевірками реалізацій базового білого шуму є: перевірка на некорельованість, періодичність, відповідність заданому типові функції розподілу ймовірностей.

Використовуючи розглянуті вище методи моделювання стохастично періодичних послідовностей, подамо приклад статистичного моделювання дискретного лінійного періодично корельованого випадкового процесу на ПЕОМ:

1. Згенеровано $N = 15000$ реалізацій дискретного періодичного білого шуму по $M = 500$ відліків у кожній. Множину згенерованих реалізацій можна розглядати як реалізації випадкового M -вимірного випадкового вектора.

Математичне сподівання згенерованого дискретного процесу визначається виразом:

$$a_x(j) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{40\pi \cdot j}{M}\right), j = \overline{0, M-1}. \tag{11}$$

Дисперсія дискретного періодичного білого шуму:

$$D_x(j) = \frac{1}{12}\sin^2\left(\frac{40\pi \cdot j}{M}\right), j = \overline{0, M-1}. \tag{12}$$

Кореляційна функція дискретного періодичного білого шуму:

$$R_x(g,j) = \frac{1}{12} \cdot \delta(g-j) \cdot \sin\left(\frac{40\pi \cdot j}{M}\right) \cdot \sin\left(\frac{40\pi \cdot g}{M}\right), \quad j, g = \overline{0, M-1}, \tag{13}$$

де $\delta(g-j)$ - символ Кронекера, що залежить від різниці двох аргументів.

Отже, результатом моделювання реалізацій дискретного періодичного білого шуму з вищеподаними характеристиками є двовимірна матриця $X(i,j), i=\overline{0,N-1}, j=\overline{0,M-1}$, де i - номер реалізації, j - відповідає номерові відліку реалізації.

2. У результаті лінійного перетворення згенерованих реалізацій дискретного періодичного білого шуму згідно з алгоритмом (8) сформовано ансамбль реалізацій дискретного ЛПВП, що зручно записати як матрицю $Y(i,j), i=\overline{0,N-1}, j=\overline{0,M-1}$ розміру $M \times N$. Імпульсна перехідна характеристика лінійної стаціонарної перетворюючої системи описується виразом:

$$\varphi(j) = e^{-10 \cdot j} \tag{14}$$

3. Ансамблі згенерованих реалізацій дискретних періодичного білого шуму і ЛПВП підлягають статистичному аналізові, метою якого є отримання статистичних оцінок математичного сподівання, дисперсії, нормованої кореляційної функції змодельованих процесів. Статистичний аналіз проводився шляхом усереднення по ансамблю реалізацій.

Статистичні оцінки математичного сподівання згенерованих дискретних процесів обчислюються за формулою:

$$\hat{a}_x(j) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x(i,j),\ \ j = \overline{0,M-1} \tag{15}$$

Статистичні оцінки дисперсії:

$$\hat{D}_x(j) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x(i,j) - \hat{a}_x(j))^2,\ \ j = \overline{0,M-1}, \tag{16}$$

Статистичні оцінки нормованої кореляційної функції:

$$\hat{R}_x(g,j) = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{1}{\max \hat{D}_x(j)} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} (x(i,g) - \hat{a}_x(g)) \cdot (x(i,g) - \hat{a}_x(g)), g, j = \overline{0,M-1}, \tag{17}$$

Графік перших 100 відліків статистичної оцінки математичного сподівання згенерованого періодичного білого шуму подано на рисунку 1. Графік перших 100 відліків статистичної оцінки дисперсії процесу подано на рисунку 2.

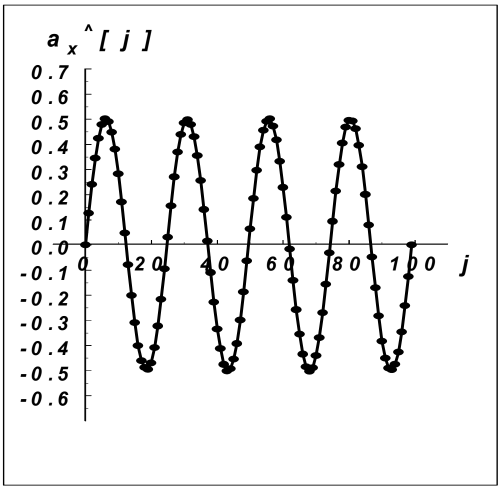


Рис.1

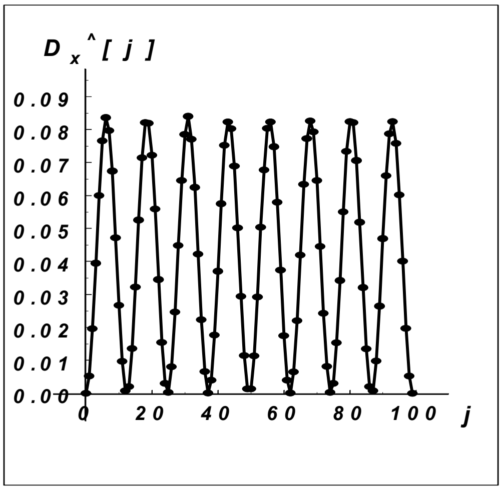


Рис.2

На рисунку 3 подано графік перерізу масиву оцінки нормованої кореляційної функції змодельованого дискретного періодичного білого шуму, аналіз якого показує, що цей шум можна вважати δ - корельованим. Графік оцінки нормованої кореляційної функції, що є двовимірною, подано на рисунку 4. Для цієї функції властива періодичність вздовж головної діагоналі, що, по суті, означає періодичність дисперсії.

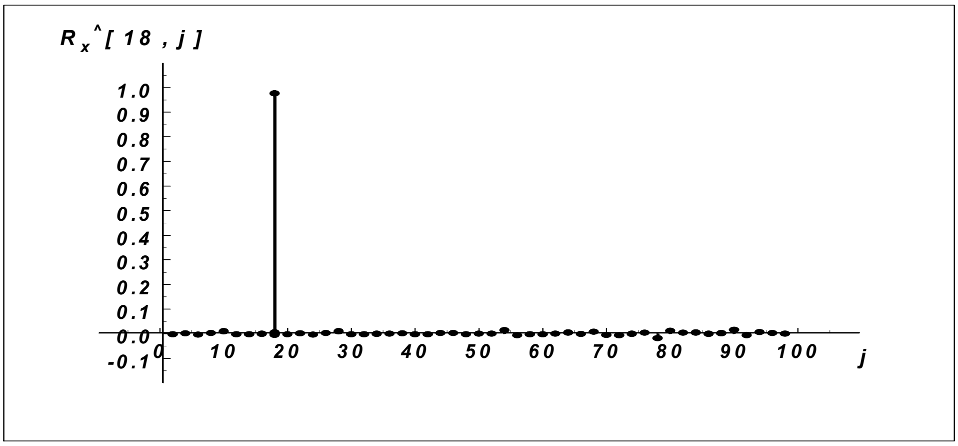


Рис. 3

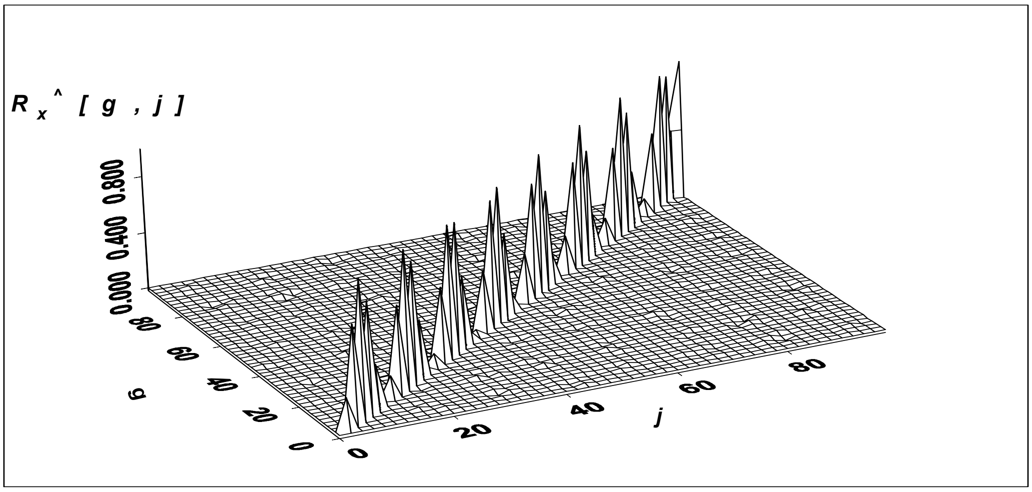
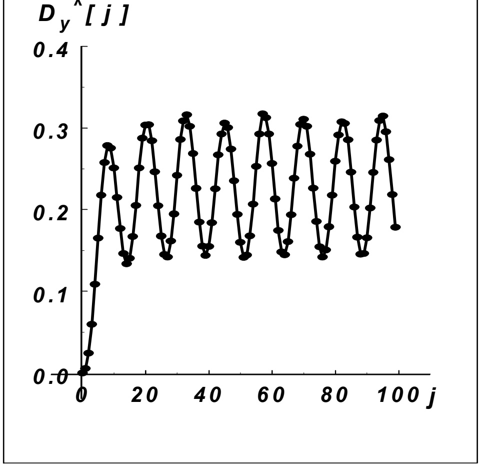
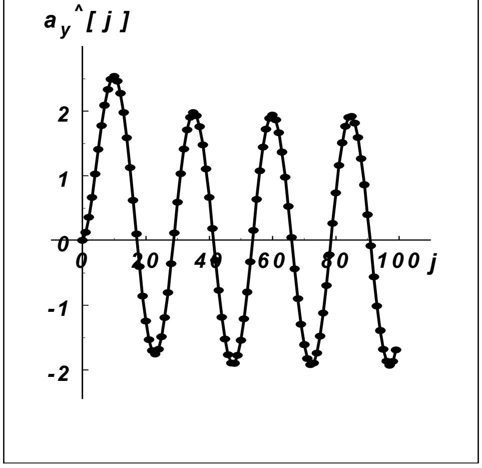


Рис. 4

Графіки перших 100 відліків статистичних оцінок дисперсії, математичного сподівання змодельованого дискретного ЛПВП зображені на рисунках 5 та 6.





.

Рис. 5

Рис. 6

На рисунку 7 подано графік статистичної оцінки нормованої кореляційної функції дискретного ЛПВП.

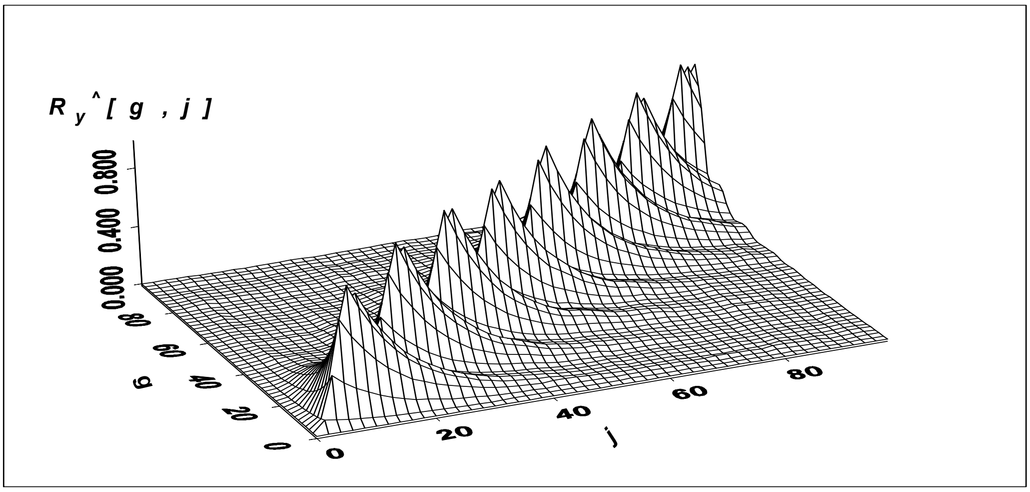


Рис. 7

Як бачимо з графіків статистичних оцінок, змодельований дискретний ЛПВП має дві характерні ділянки: перехідного процесу та усталеного режиму. Перша відображає перехідний процес у лінійній формівній системі. Статистичне оцінювання змодельованого ЛПВП на цій ділянці дозволяє досліджувати статистичні характеристики перехідних випадкових процесів. Для моделювання стохастично періодичних процесів на основі ЛПВП статистичний аналіз необхідно виконувати на ділянці усталеного режиму.

In this paper the list of problems of linear periodic random processes computer simulation are considered. The results of computer simulation of linear discrete periodic correlated random process are given.

Література

1. Ермаков С. И., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование.-М.:Наука, 1982.- 298 с.
2. Харин Ю. С., Степанова М. Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. –Минск: Изд-во Минск. ун-та, 1987. – 304 с.
3. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике.-Киев:. Наукова думка, 1973.-192 с.
4. Марченко Б.Г. Лінійні періодичні процеси // Пр. Ін.-ту електродинаміки НАН України. -К., 1999.
5. Приймак М. В. Дослідження взаємозв’язку лінійних і періодичних випадкових процесів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький, 1999.-№2(8). – С. 167-169.
6. Приймак М. В. Лінійні періодичні випадкові процеси і їх моделювання на ЕОМ. / Вісник Тернопільского державного технічного університету. - 1998. - №3.- С.111 – 114.

Одержано 23.02.2000 р.