УДК. 517.946
М.Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М.Шелестовська[2], канд. техн. наук
[1]*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*
[2] *Тернопільська академія народного господарства*

СТОХАСТИЧНА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СИМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ З ПОРОЖНИНОЮ

В рамках кореляційної теорії побудовано основні ймовірносні характеристики стохастичного динамічного термопружного поля в (n+1) - шарових симетричних просторах з симетричною порожниною.

Точний аналітичний розв'язок динамічної задачі термопружності для однорідного симетричного простору із симетричного порожнинного побудованого в роботі [1], а точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру динамічної задачі термопружності для $(n+1)$ - складового симетричного простору з симетричного порожнинного побудованого в роботі [2]. У даній статті результати роботи [2]узагальнюються на випадок, коли в просторі діють неперервно розподілені випадкові в часі теплові джерела і межа симетричної порожнини піддається діянню випадкового в часі теплового режиму.

Розглянемо вільний від зовнішнього навантаження $(n+1)$- шаровий симетричний простір з симетричною порожниною радіуса $R_0 > 0$

$$P_n^+ = \left\{ r : r \in \mathop{U}_{k=1}^{n+1} \left(R_{k-1}, R_k \right); R_0 > 0,\ R_{n+1} = \infty \right\},$$

який має при $t \le 0$ всюди нульову температуру, а при $t > 0$ в просторі діють неперервно розподілені випадкові в часі теплові джерела. Для визначення нестаціонарного температурного поля, що виникає в просторі P_n^+, маємо задачу побудови обмеженого в області

$$D_n^+ = \left\{ (t,r) : t \in (0,\infty), r \in P_n^+ \right\} \equiv \sum_{j=1}^{n+1} D_{nj}^+$$

розв'язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності В-параболічного типу [1,2]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} - a_j^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_j + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) T_j = f_j(t,r),\quad (t,r) \in D_{nj}^+ \tag{1}$$

$$2\alpha_j + 1 \ge 0,\ j = \overline{1, n+1}$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) T_1 \Big|_{r=R_0} = \omega(t),\qquad \frac{\partial T_{n+1}}{\partial r} \Big|_{r=\infty} = 0 \tag{2}$$

та умовами неідеального термічного контакту

$$\left[\left(b_\kappa \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) T_\kappa - T_{\kappa+1} \right] \Big|_{r=R_\kappa} = 0,\quad \kappa = \overline{1,n}$$

$$\left(\lambda_\kappa \frac{\partial T_\kappa}{\partial r} - \lambda_{\kappa+1} \frac{\partial T_{\kappa+1}}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_\kappa} = 0 \tag{3}$$

Тут b_κ- термічний коефіцієнт термоопору, λ_κ- коефіцієнт теплопровідності, a_κ^2- коефіцієнт температуропровідності. При $\alpha_j = 0$ маємо випадок циліндричної (осьової) симетрії, а при $2\alpha_\kappa + 1 = 2$ - випадок сферичної (центральної) симетрії.

Детермінований розв'язок задачі (1)-(3) побудовано в роботі [2] методом гібридного інтегрального перетворення типу Вебера на полярній вісі $r \geq R_0 > 0$ з n точками спряження:

$$T_j(t,r) = \int_0^t W_{(\alpha);1j}(t-\tau,r)\omega(\tau)d\tau + \sum_{\kappa=1}^{n+1}\int_0^t \int_{R_{\kappa-1}}^{R_\kappa} H^*_{(\alpha);j\kappa}(t-\tau,r,\rho)\times \tag{4}$$

$$\times f_\kappa(\tau,\rho)\sigma_\kappa \rho^{2\alpha_\kappa+1}d\rho d\tau, \quad (\alpha) = (\alpha_1;\alpha_2;....;\alpha_n,\alpha_{n+1}), \quad j = \overline{1,n+1},\ R_{n+1} = \infty$$

У рівностях (4) беруть участь функції Гріна

$$W_{(\alpha);1j}(t,r) = -\frac{2}{\pi}\sigma_1 a_1^{2\alpha_1+2}\int_0^\infty e^{-\beta^2 t}\Delta^{(n)}_{(\alpha)}(\beta)\beta^{-2\alpha_1}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha);n}(\beta)d\beta; \tag{5}$$

$$j = \overline{1,n+1}$$

породжені тепловим режимом на поверхні $r = R_0$, та функції впливу

$$H^*_{(\alpha);j\kappa}(t,r,\rho) = \int_0^\infty e^{-\beta^2 t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);\kappa}(\rho,\beta)\Omega_{(\alpha);n}(\beta)d\beta;\ j,\kappa = \overline{1,n+1} \tag{6}$$

породжені неоднорідністю системи (1) (наявністю теплових джерел, неперервно розподілених на кожній ділянці (R_{j-1},R_j)).

Компоненти $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ спектральної вектор-функції $V_{(\alpha)}(r,\beta) = \{V_{(\alpha);1}(r,\beta);V_{(\alpha);2}(r,\beta);...;V_{(\alpha);n}(r,\beta);V_{(\alpha);n+1}(r,\beta)\}$, вагова функція $\sigma(r)$ і спектральна густина $\Omega_{(\alpha);n}$ обчислюються за правилами:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = \Delta^{(n)}_{(\alpha)}(\beta)[w^{(0)}_{(\alpha)_1;2}(\beta)J_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1 r) - w^{(0)}_{(\alpha)_1;1}(\beta)N_{\alpha_1,\alpha_1}(q_1 r)];$$

$$V_{(\alpha);\kappa+1}(r,\beta) = (\prod_{j=\kappa+1}^{n}\Delta^j_{\alpha_{j+1}}(\beta))[w^{(\kappa)}_{(\alpha)_{\kappa+1};2}(\beta)J_{\alpha_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1}}(q_{\kappa+1}r) -$$

$$- w^{(\kappa)}_{(\alpha)_{\kappa+1};1}(\beta)N_{\alpha_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1}}(q_{\kappa+1}r)], \kappa = \overline{1,n-1};$$

$$V_{(\alpha);n+1}(r,\beta) = w^{(n)}_{(\alpha);2}(\beta)J_{\alpha_{n+1},\alpha_{n+1}}(q_{n+1}r) - w^{(n)}_{(\alpha);1}(\beta)N_{\alpha_{n+1},\alpha_{n+1}}(q_{n+1}r); \tag{7}$$

$$V_{(\alpha)}(r,\beta) = \sum_{\kappa=1}^{n}\theta(r-R_{\kappa-1})\theta(R_\kappa - r)V_{(\alpha);\kappa}(r,\beta) + \theta(r-R_n)V_{(\alpha),n+1}(r,\beta),$$

$$\sigma(r) = \sum_{\kappa=1}^{n}\theta(r-R_{\kappa-1})\theta(R_\kappa - r)\sigma_\kappa r^{2\alpha_\kappa+1} + \theta(r-R_n)\sigma_{n+1}r^{2\alpha_{n+1}+1};$$

$$\sigma_\kappa = \frac{1}{a_\kappa^2}\frac{\lambda_\kappa}{\lambda_{n+1}}\frac{R_\kappa^{2\alpha_{\kappa+1}+1}...R_n^{2\alpha_{n+1}+1}}{R_\kappa^{2\alpha_\kappa+1}...R_n^{2\alpha_n+1}}, \kappa = \overline{1,n}; \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}^2}; (\kappa) = 123...\kappa;$$

$$\Omega_{(\alpha);n}(\beta) = a_{n+1}^{-2\alpha_{n+1}}\beta^{2\alpha_{n+1}+1}\left(\left[w^{(n)}_{(\alpha);1}(\beta)\right]^2 + \left[w^{(n)}_{(\alpha);2}(\beta)\right]^2\right)^{-1};$$

$$q_j = a_j^{-1}\beta, \Delta^j_{\alpha_{j+1}}(\beta) = \frac{2\lambda_{j+1}}{\pi R_j^{2\alpha_{j+1}+1}q_{j+1}^{2\alpha_{j+1}}}, \quad \Delta^{(n)}_{(\alpha)} = \prod_{\kappa=1}^{n}\Delta^{\kappa}_{\alpha_{\kappa+1}}(\beta).$$

Тут прийняті позначення:

$$w^{(0)}_{(\alpha)_1;2}(q_1 R_0) = u^{02}_{\alpha_1,\alpha_1;11}(q_1 R_0),\ w^{(0)}_{(\alpha)_1;1}(q_1 R_0) = U^{01}_{\alpha_1,\alpha_1;11}(q_1 R_0);$$

$$w^{(\kappa)}_{(\alpha)_{\kappa+1};j}(\beta)=w^{(\kappa)}_{(\alpha)_{\kappa+1;j}}(q_1R_0;q_1R_1,q_2R_1;q_2R_2,q_3R_2;...;q_\kappa R_\kappa,q_{\kappa+1}R_\kappa)=$$

$$\begin{aligned}&=w^{(\kappa-1)}_{(\alpha)_\kappa;2}(q_1R_0;q_1R_1,q_2R_1;...;q_{\kappa-1}R_{\kappa-1},q_\kappa R_{\kappa-1})\times\\&\times\Psi^{\kappa}_{(\alpha_\kappa,\alpha_\kappa;\alpha_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1});1j}(q_\kappa R_\kappa,q_{\kappa+1}R_\kappa)-\Psi^{\kappa}_{(\alpha_\kappa,\alpha_\kappa;\alpha_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1});2j}(q_\kappa R_\kappa,q_{\kappa+1}R_\kappa)\times\\&\times w^{(\kappa-1)}_{(\alpha)_\kappa;1}(q_1R_0;q_1R_1,q_2R_1;...;q_{\kappa-1}R_{\kappa-1},q_\kappa R_{\kappa-1};\end{aligned}\tag{8}$$

$$u^{m1}_{\nu,\alpha;j\kappa}(qR_m)=\left(\alpha^m_{j\kappa}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{j\kappa}\right)J_{\nu,\alpha}(qR_m)-\alpha^m_{j\kappa}q^2R_mJ_{\nu+1,\alpha+1}(qR_m);$$

$$u^{m2}_{\nu,\alpha;j\kappa}(qR_m)=(\alpha^m_{j\kappa}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{j\kappa})N_{\nu,\alpha}(qR_m)-\alpha^m_{j\kappa}q^2R_mN_{\nu+1,\alpha+1}(qR_m);$$

$$\Psi^{\kappa}_{(\nu_\kappa,\alpha_\kappa;\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1});ij}(q_\kappa R_\kappa,q_{\kappa+1}R_\kappa)=u^{\kappa i}_{\nu_\kappa,\alpha_\kappa;11}(q_\kappa R_\kappa)u^{\kappa j}_{\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1};22}(q_{\kappa+1}R_\kappa)-$$

$$-u^{\kappa i}_{\nu_\kappa,\alpha_\kappa;21}(q_\kappa R_\kappa)u^{\kappa j}_{\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1};12}(q_{\kappa+1}R_\kappa),\kappa=\overline{1,n};\ (\alpha)_\kappa=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\kappa);$$

$J_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}J_\nu(x),\ N_{\nu,\alpha}(x)=x^{-\alpha}N_\nu(x);J_\nu(x),N_\nu(x)-$функції Бесселя 1-го й 2-го роду порядка ν. При цьому функції $J_{\alpha_\kappa,\alpha_\kappa}(q_\kappa r)$ та $N_{\alpha_\kappa,\alpha_\kappa}(q_\kappa r)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя

$$\left(B_{\alpha_\kappa,\alpha_\kappa}+q_\kappa^2\right)\upsilon\equiv\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_\kappa+1}{r}\ \frac{d}{dr}+\frac{\beta^2}{a_\kappa^2}\right)\upsilon=0.$$

$$\alpha^\kappa_{11}=b_\kappa,\ \beta^\kappa_{11}=1,\ \alpha^\kappa_{21}=\lambda_\kappa,\ \beta^\kappa_{21}=0,\ \alpha^\kappa_{12}=0,\ \beta^\kappa_{12}=1,\ \alpha^\kappa_{22}=\lambda_{\kappa+1},\ \beta^\kappa_{22}=0.$$

Припустимо, що функції $f_\kappa(t,r)$ можна зобразити у вигляді добутку $f_\kappa(t,r)=\Psi_\kappa(r)g_\kappa(t),$ або суми таких добутків $(\kappa=\overline{1,n+1})$, де $\Psi_\kappa(r)-$детерміновані функції, а $g_\kappa(t)-$стаціонарні в широкому розумінні випадкові функції часу [3].

Покладемо

$$G^{(t,r)}_{(\alpha);j\kappa}=\int_{R_{\kappa-1}}^{R_\kappa}H^*_{(\alpha);j\kappa}(t,r,\rho)\Psi_\kappa(\rho)\sigma_\kappa\rho^{2\alpha_\kappa+1}d\rho,\ \kappa=\overline{1,n+1},R_{n+1}=\infty,$$

$$G_{(\alpha);j,n+2}(t,r)=W_{(\alpha);1j}(t,r),\ w(t)\equiv g_{n+2}(t),\ g_{n+2}(t)-$$

стаціонарна в широкому розумінні випадкова функція часу.

Детермінований розв'язок задачі (1)-(3) матиме згідно формули (4) структуру:

$$T_j(t,r)=\sum_{\kappa=1}^{n+2}\int_0^tG_{(\alpha);j\kappa}(t-\tau,r)g_\kappa(\tau)d\tau,\ j=\overline{1,n+1}.\tag{9}$$

Оскільки $g_\kappa(\tau)-$стаціонарні в широкому розумінні функції часу, то внаслідок лінійності задачі (1)-(3) можна вважати, що математичне сподівання

$$M[g_\kappa(t)]=0\quad \kappa=\overline{1,n+2}$$

Згідно формули (9) знаходимо, що математичне сподівання

$$M[T_j]=\sum_{\kappa=1}^{n+1}\int_0^tG_{(\alpha);j\kappa}(t-\tau,r)M[g_\kappa(\tau)]d\tau=0,j=\overline{1,n+1}\tag{10}$$

Для компонентів $K_{T_iT_m}(t_1,t_2,r)$ кореляційної функції стохастичного нестаціонарного температурного поля отримуємо вираз [3]

$$K_{T_iT_m}(t_1,t_2,r)=\sum_{j,\kappa=1}^{n+2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}G_{(\alpha);ij}(t_1-\tau_1,r)G_{(\alpha);m\kappa}(t_2-\tau_2,r)\times$$
$$\times K_{j\kappa}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2;\ K_{j\kappa}=K_{g_j g_\kappa}(\tau_1,\tau_2);\ i,m=\overline{1,n+1} \qquad (11)$$

Звідси випливає наявність кореляційної матриці

$$K_T(t_1,t_2,r)=\left\{K_{T_iT_m}(t_1,t_2,r)\right\}_{i,m=1}^{n+1} \qquad (12)$$

При $t_1=t_2\equiv t$ одержуємо матрицю

$$D_T(t,r)\equiv K_T(t,t,r), \qquad (13)$$

яка характеризує потужність стохастичного нестаціонарного температурного поля в даному симетричному просторі P_n^+ із симетричною порожниною радіуса R_0.

Якщо температурні поля, породжені випадковими процесами $g_j(t)$, незалежні, то для $j\neq\kappa=\overline{1,n+2}$ $K_{j\kappa}(t_1,t_2)=0$ і в формулах (11) залишиться тільки одна сума. Якщо при цьому ще й температурні поля ділянок $(R_0,R_1),(R_1,R_2),\dots,(R_{n-1},R_n),(R_n,\infty)$ незалежні, то $K_{T_iT_m}=0$ для $i\neq m=\overline{1,n+1}$. У цьому випадку кореляційна матриця $K_T(t_1,t_2,r)$ і матриця потужності $D_T(t,r)$ набувають діагональної форми.

Динамічне поле напружень в даному симетричному просторі з порожниною, породжене нестаціонарним температурним полем (9), опишуть функції [4]

$$\sigma_{1j}(t,r)=G_j^*\left[\frac{\partial u_j}{\partial r}+(2\alpha_j+1)\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{u_j}{r}-m_jT_j(t,r)\right],$$
$$\sigma_{2j}(t,r)=G_j^*\left[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial u_j}{\partial r}+\left(1+\frac{2\alpha_j\mu_j}{1-\mu_j}\right)\frac{u_j}{r}-m_jT_j(t,r)\right], \qquad (14)$$
$$\sigma_{3j}(t,r)=G_j^*\left[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial u_j}{\partial r}+\left(2\alpha_j+\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\right)\frac{u_j}{r}-m_jT_j(t,r)\right].$$

У рівностях (14) $\sigma_{1j}=\sigma_{rr,j},\sigma_{2j}=\sigma_{\varphi\varphi,j},\sigma_{3j}=\sigma_{zz,j}$ у випадку осьової симетрії та $\sigma_{3j}=\sigma_{\theta\theta,j}$ у випадку центральної симетрії; $G_j^*=2G_j(1-\mu_j)(1-2\mu_j)^{-1}$, G_j-модуль зсуву, μ_j- коефіцієнт Пуассона, $m_j=\alpha_{T_j}(1+\mu_j)(1-\mu_j)^{-1}$, $\alpha_{T_j}-$лінійний коефіцієнт теплового розширення ізотропного пружного тіла.

Радіальні компоненти $u_j(t,r)$ вектора переміщення є обмеженим в області D_n^+ розв'язком системи рівнянь руху в переміщеннях [4]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-c_j^2\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2}+\frac{2\alpha_j+1}{r}\frac{\partial u_j}{\partial r}-\frac{2\alpha_j+1}{r^2}u_j\right)=-c_j^2 m_j\frac{\partial T_j}{\partial r}(t,r),$$
$$(t,r)\in D_{nj}^+,\ j=\overline{1,n+1} \qquad (15)$$

з нульовими початковими умовами, умовами ідеального механічного контакту

$$[u_j(t,r)-u_{j+1}(t,r)]\Big|_{r=R_j}=0$$
$$[\sigma_{1j}(t,r)-\sigma_{1,j+1}(t,r)]\Big|_{r=R_j}=0,\ j=\overline{1,n}, \tag{16}$$

і крайовими умовами

$$\sigma_{11}(t,r)\Big|_{r=R_0}=0,\quad \sigma_{1,n+1}(t,r)\Big|_{r=\infty}=0 \tag{17}$$

Детермінований розв'язок задачі (14)-(17) побудуємо також методом гібридного інтегрального перетворення типу Вебера на полярній вісі $r\ge R_0>0$ з n точками спряження [2].

На основі першої рівності із системи рівностей (14) друга рівність в (16) набуває вигляду:

$$\left[\left(G_j^*\frac{\partial u_j}{\partial r}+\frac{(2\alpha_j+1)\mu_j}{(1-\mu_j)R_j}G_j^*u_j\right)-\right.$$
$$\left.-\left(G_{j+1}^*\frac{\partial u_{j+1}}{\partial r}+\frac{(2\alpha_{j+1}+1)\mu_{j+1}}{(1-\mu_{j+1})R_j}G_{j+1}^*u_{j+1}\right)\right]\Bigg|_{r=R_j}=\varphi_j(t), \tag{18}$$
$$\varphi_j(t)=G_j^*m_jT_j(t,R_j)-G_{j+1}^*m_{j+1}T_{j+1}(t,R_j),\ j=\overline{1,n}.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя

$$\left(B_{\alpha_j+1,\alpha_j}+b_j^2\right)u_j\equiv\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_j+1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{(\alpha_j+1)^2-\alpha_j^2}{r^2}+b_j^2\right)u_j=0,$$

де $b_j=c_j^{-1}\lambda,\ \lambda\in(0,\infty), c_j$ − швидкість поширення поздовжньої пружної хвилі, утворюють функції Бесселя [2]:

$$J_{\alpha_j+1,\alpha_j}(b_jr)=(b_jr)^{-\alpha_j}J_{\alpha_j+1}(b_jr);\ N_{\alpha_j+1,\alpha_j}(b_jr)=(b_jr)^{-\alpha_j}N_{\alpha_j+1}(b_jr).$$

Визначимо величини і функції:

$$\alpha_{11}^\kappa=\alpha_{12}^\kappa=0,\ \beta_{11}^\kappa=\beta_{12}^\kappa=1,\ \alpha_{21}^\kappa=G_\kappa^*,\ \beta_{21}^\kappa=\frac{(2\alpha_\kappa+1)\mu_\kappa}{(1-\mu_\kappa)^{R_\kappa}}G_\kappa^*;$$

$$\alpha_{22}^\kappa=G_{\kappa+1}^*,\ \beta_{22}^\kappa=\frac{(2\alpha_{\kappa+1}+1)\mu_{\kappa+1}}{(1-\mu_{\kappa+1})R_\kappa}G_{\kappa+1}^*;c_{1\kappa}=G_\kappa^*,\ c_{2\kappa}=G_{\kappa+1}^*;\ \nu_j=\alpha_j+1;$$

$$u_{\nu_j,\alpha_j;11}^{j1}(b_jR_j)=J_{\nu_j,\alpha_j}(b_jR_j),u_{\nu_j,\alpha_j;11}^{j2}(b_jR_j)=N_{\nu_j,\alpha_j}(b_jR_j);\ h_j=\frac{1+2\alpha_j\mu_j}{1-\mu_j};$$
$$u_{\nu_j,\alpha_j;21}^{j1}(b_jR_j)=-R_jG_j^*b_j^2J_{\nu_j+1,\alpha_j+1}(b_jR_j)+R_j^{-1}G_j^*h_jJ_{\nu_j,\alpha_j}(b_jR_j);$$
$$u_{\nu_j\alpha_j;21}^{j2}(b_jR_j)=-R_jG_j^*b_j^2N_{\nu_j+1,\alpha_j+1}(b_jR_j)+R_j^{-1}G_j^*h_jN_{\nu_j,\alpha_j}(b_jR_j);$$

$$u_{\nu_{j+1},\alpha_{j+1};12}^{j1}(b_{j+1}R_j)=J_{\nu_{j+1},\alpha_{j+1}}(b_{j+1}R_j);\ u_{\nu_{j+1},\alpha_{j+1};12}^{j2}(b_{j+1}R_j)=N_{\nu_{j+1},\alpha_{j+1}}(b_{j+1}R_j);$$
$$u_{\nu_{j+1},\alpha_{j+1};22}^{j1}(b_{j+1}R_j)=h_{j+1}R_j^{-1}G_{j+1}^*J_{\nu_{j+1},\alpha_{j+1}}(b_{j+1}R_j)-$$
$$-R_jb_{j+1}^2G_{j+1}^*J_{\nu_{j+1}+1,\alpha_{j+1}+1}(b_{j+1}R_j);$$

$$u^{j2}_{\nu_{j+1},\alpha_{j+1};22}(b_{j+1}R_j) = h_{j+1}R_j^{-1}G^*_{j+1}N_{\nu_{j+1},\alpha_{j+1}}(b_{j+1}R_j) -$$

$$- R_j b^2_{j+1}G^*_{j+1}N_{\nu_{j+1}+1,\alpha_{j+1}+1}(b_{j+1}R_j);$$

$$\Psi^{\kappa}_{(\nu_\kappa,\alpha_\kappa;\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1});ij}(b_\kappa R_\kappa, b_{\kappa+1}R_\kappa) = u^{\kappa i}_{\nu_\kappa,\alpha_\kappa;11}(b_\kappa R_\kappa)u^{\kappa j}_{\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1};22}(b_{\kappa+1}R_\kappa) -$$

$$- u^{\kappa i}_{\nu_\kappa,\alpha_\kappa;21}(b_\kappa R_\kappa)u^{\kappa j}_{\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1};12}(b_{\kappa+1}R_\kappa); \kappa = \overline{1,n}; i,j = 1,2;$$

$$w^{(0)}_{(\nu,\alpha)_1;1}(\lambda) = \frac{1+h_1}{R_0}J_{\nu_1,\alpha_1}(b_1R_0) - R_0 b_1^2 J_{\nu_1+1,\alpha_1+1}(b_1R_0),$$

$$w^{(0)}_{(\nu,\alpha)_1;2}(\lambda) = \frac{1+h_1}{R_0}N_{\nu_1,\alpha_1}(b_1R_0) - R_0 b_1^2 N_{\nu_1+1,\alpha_1+1}(b_1R_0); \;\; (\kappa) = 123...\kappa;$$

$$w^{(\kappa)}_{(\nu,\alpha)_{\kappa+1};j}(\lambda) = w^{(\kappa-1)}_{(\nu,\alpha)_\kappa;2}(b_1R_0; b_1R_1, b_2R_1; b_2R_2, b_3R_2; ..; b_{\kappa-1}R_{\kappa-1}, b_\kappa R_{\kappa-1}) \times$$

$$\times \Psi^{\kappa}_{(\nu_\kappa,\alpha_\kappa;\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1});1j}(b_\kappa R_\kappa, b_{\kappa+1}R_\kappa) - \Psi^{\kappa}_{(\nu_\kappa,\alpha_\kappa;\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1});2j}(b_\kappa R_\kappa, b_{\kappa+1}R_\kappa) \times$$

$$\times w^{(\kappa-1)}_{(\nu,\alpha)_\kappa;1}(b_1R_0; b_1R_1, b_2R_1; b_2R_2, b_3R_2; ...; b_{\kappa-1}R_{\kappa-1}, b_\kappa R_{\kappa-1});$$

$$\kappa = \overline{1,n}, j = 1,2; (\nu,\alpha)_\kappa = (\nu_1,\alpha_1; \nu_2,\alpha_2; ...; \nu_\kappa,\alpha_\kappa); (\nu,\alpha) \equiv (\nu,\alpha)_{n+1};$$

$$\Delta^{(n)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda) = \prod_{\kappa=1}^{n} \frac{2G^*_{\kappa+1}}{\pi b_{\kappa+1}^{2\alpha_{\kappa+1}} R_\kappa^{2\alpha_{\kappa+1}+1}} \neq 0, \bar{\sigma}_j = \frac{1}{c_j^2}\frac{G_j^*}{G^*_{n+1}}\prod_{\kappa=j}^{n}\frac{R_\kappa^{2\alpha_{\kappa+1}+1}}{R_\kappa^{2\alpha_\kappa+1}}, j = \overline{1,n};$$

$$V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda) = \Delta^{(n)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)[w^{(0)}_{(\nu,\alpha)_1;2}(\lambda)J_{\nu_1,\alpha_1}(b_1r) -$$

$$- w^{(0)}_{(\nu,\alpha)_1;1}(\lambda)N_{\nu_1,\alpha_1}(b_1r)]; \qquad \bar{\sigma}_{n+1} = \frac{1}{c^2_{n+1}};$$

$$V_{(\nu,\alpha);\kappa+1}(r,\lambda) = \left(\prod_{j=\kappa+1}^{n}\frac{2G^*_{j+1}}{\pi b_{j+1}^{2\alpha_{j+1}}R_j^{2\alpha_{j+1}+1}}\right)\Big[w^{(\kappa)}_{(\nu,\alpha)_{\kappa+1};2}(\lambda)J_{\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1}}(b_{\kappa+1}r) - \tag{19}$$

$$- w_{(\nu,\alpha)_{\kappa+1};1}(\lambda)N_{\nu_{\kappa+1},\alpha_{\kappa+1}}(b_{\kappa+1}r)\Big], \; \kappa = \overline{1,n-1};$$

$$V_{(\nu,\alpha);n+1}(r,\lambda) = w^{(n)}_{(\nu,\alpha);2}(\lambda)J_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(b_{n+1}r) - w^{(n)}_{(\nu,\alpha);1}(\lambda)N_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(b_{n+1}r);$$

$$\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda) = \lambda b_{n+1}^{2\alpha_{n+1}}\left(\left[w^{(n)}_{(\nu,\alpha);1}(\lambda)\right]^2 + \left[w^{(n)}_{(\nu,\alpha);2}(\lambda)\right]^2\right)^{-1}.$$

Наявність спектральної функції

$$V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda) = \sum_{\kappa=1}^{n}\theta(r - R_{\kappa-1})\theta(R_\kappa - r)V_{(\nu,\alpha);\kappa}(r,\lambda) + \theta(r - R_n)V_{(\nu,\alpha);n+1}(r,\lambda);$$

вагової функції

$$\bar{\sigma}(r) = \sum_{\kappa=1}^{n}\theta(r - R_{\kappa-1})\theta(R_\kappa - r)\bar{\sigma}_\kappa r^{2\alpha_\kappa+1} + \theta(r - R_n)\bar{\sigma}_{n+1}r^{2\alpha_{n+1}+1}, R_0 > 0;$$

і спектральної густини $\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)$ дає можливість визначити пряме

$$H_{(\nu,\alpha);n}[f(r)] = \int_{R_0}^{\infty} f(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\bar{\sigma}(r)dr \equiv \tilde{f}(\lambda) =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{n+1}\int_{R_{\kappa-1}}^{R_\kappa} f_\kappa(r)V_{(\nu,\alpha);\kappa}(r,\lambda)\bar{\sigma}_\kappa r^{2\alpha_\kappa+1}dr, R_0 > 0, R_{n+1} = \infty \tag{20}$$

і обернене

$$H^{-1}_{(\nu,\alpha);n}[\widetilde{f}(\lambda)] = \int_0^\infty \widetilde{f}(\lambda) V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)d\lambda \equiv f(r) \qquad (21)$$

гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній вісі $r \ge R_0 > 0$ з n точками спряження [5].

Розв'язок гіперболічної задачі (15)-(17), побудований методом інтегрального перетворення (20), (21), має структуру [2]:

$$u_j(t,r) = \sum_{\kappa=1}^{n+1} m_\kappa c_\kappa^2 \int_0^t \int_{R_{\kappa-1}}^{R_\kappa} Z_{(\nu,\alpha);j\kappa}(t-\tau,r,\rho) T_\kappa(\tau,\rho) \overline{\sigma}_\kappa \rho^{2\alpha_\kappa+1} d\rho d\tau;$$

$$j = \overline{1,n+1} \qquad (22)$$

Тут беруть участь функції впливу

$$Z_{(\nu,\alpha);j\kappa}(t,r,\rho) = \int_0^\infty \frac{\sin\lambda t}{\lambda} V_{(\nu,\alpha);j}(r,\lambda) \left[\left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{2\alpha_\kappa + 1}{\rho}\right) V_{(\nu,\alpha);\kappa}(\rho,\lambda)\right] \times$$

$$\times \Omega_{(\nu,\alpha);n}(\lambda)d\lambda;\ \ j,\kappa = \overline{1,n+1} \qquad (23)$$

Якщо позначити

$$M^*_{(\nu,\alpha);ij}(t,r) = \sum_{\kappa=1}^{n+1} m_\kappa c_\kappa^2 \int_0^t \int_{R_{\kappa-1}}^{R_\kappa} Z_{(\nu,\alpha);i\kappa}(t-s,r,\rho) G_{(\alpha);\kappa j}(s,\rho) \sigma_\kappa \rho^{2\alpha_\kappa+1} d\rho ds,$$

$$i,j = \overline{1,n+1}, \qquad (24)$$

то в результаті підстановки $T_\kappa(\tau,\rho)$, визначених формулами (9), у рівність (22) маємо:

$$u_i(t,r) = \sum_{j=1}^{n+2} \int_0^t M^*_{(\nu,\alpha);ij}(t-\tau,r) g_j(\tau)d\tau;\ \ i = \overline{1,n+1} \qquad (25)$$

Внаслідок умов на функції $g_j(\tau)$ звідси випливає, що математичне сподівання

$$M[u_i(t,r)] = \sum_{j=1}^{n+2} \int_0^t M^*_{(\nu,\alpha);ij}(t-\tau,r) M[g_j(\tau)]d\tau = 0,\ i = \overline{1,n+1} \qquad (26)$$

Для елементів $K_{u_i u_m}(t_1,t_2,r)$ кореляційної функції одержуємо вираз [3]

$$K_{u_i u_m}(t_1,t_2,r) = \sum_{j,\kappa=1}^{n+2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} M^*_{(\nu,\alpha);ij}(t_1-\tau_1,r) M^*_{(\nu,\alpha);m\kappa}(t_2-\tau_2,r) \times$$

$$\times K_{j\kappa}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2; K_{j\kappa}(\tau_1,\tau_2) = K_{g_j g_\kappa}(\tau_1,\tau_2);\ i,m = \overline{1,n+1} \qquad (27)$$

Звідси слідує наявність кореляційної матриці стохастичного динамічного поля переміщень в даному просторі P_n^+ з симетричною порожниною радіуса R_0:

$$K_u(t_1,t_2,r) = \left\{K_{u_i u_m}(t_1,t_2,r)\right\}_{i,m=1}^{n+1} \qquad (28)$$

При $t_1 = t_2 \equiv t$ отримуємо матрицю

$$D_u(t,r) \equiv K_u(t,t,r) \qquad (29)$$

яка характеризує потужність стохастичного динамічного поля переміщень в $(n+1)-$ шаровому симетричному просторі P_n^+ з симетричною порожниною радіуса $R_0 > 0.$

Якщо поля переміщень, породжені випадковими процесами $g_j(t)$, незалежні, то для $j \ne \kappa = 1,n+2$ $K_{j\kappa}(\tau_1,\tau_2) = 0$ і в рівності (27) залишається одна сума. Якщо поля переміщень на ділянках $(R_0,R_1),(R_1,R_2),...,(R_n,\infty)$ незалежні, то для $i \neq m = \overline{1,n+1}$ функції $K_{u_i;u_m}(t_1,t_2,r)=0$ і матриці K_u та D_u набувають діагональної форми.

Визначимо функції

$$A_{1;i\kappa}(t,r)=G_i^*\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{(2\alpha_i+D\mu_i}{(1-\mu_i)r}\right)M^*_{(\nu,\alpha);i\kappa}(t,r)-m_iG_{(\alpha);i\kappa}(t,r)\right];\ i,\kappa=\overline{1,n+1}$$

$$A_{2;i\kappa}(t,r)=G_i^*\left[\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\frac{\partial}{\partial r}+\left(1+\frac{2\alpha_i\mu_i}{1-\mu_i}\right)\frac{1}{r}\right)M^*_{(\nu,\alpha);i\kappa}(t,r)-m_iG_{(\alpha);i\kappa}(t,r)\right];$$

$$A_{3;i\kappa}(t,r)=G_i^*\left[\left(\frac{\mu i}{1-\mu_i}\frac{\partial}{\partial r}+\left(2\alpha_i+\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right)\frac{1}{r}\right)\times\right.$$
$$\left.\times M^*_{(\nu,\alpha);i\kappa}(t,r)-m_iG_{(\alpha);i\kappa}(t,r)\right] \tag{30}$$

У результаті підстановки функцій $T_i(t,r),$ визначених формулою (9), та функцій $u_i(t,r)$, визначених формулою (25), у рівності (14) одержуємо структуру детермінованого поля напружень в даному просторі P_n^+ :

$$\sigma_{mi}(t,r)=\sum_{\kappa=1}^{n+2}\int_0^t A_{m,i\kappa}(t-\tau,r)g_\kappa(\tau)d\tau;i=\overline{1,n+1};m=1,2,3 \tag{31}$$

Звідси випливає, що математичне сподівання

$$M[\sigma_{mi}]=\sum_{\kappa=1}^{n+2}\int_0^t A_{m,i\kappa}(t-\tau,r)M[g_\kappa(\tau)]d\tau=0;i=\overline{1,n+1},m=\overline{1,3} \tag{32}$$

Для елементів кореляційної функції маємо вирази [3]:

$$K_{\sigma_{m_1i}\sigma_{m_2j}}(t_1,t_2,r)=\sum_{\kappa_1,\kappa_2=1}^{n+2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}A_{m_1;i\kappa_1}(t_1-\tau_1,r)A_{m_2;j\kappa_2}(t_2-\tau_2,r)\times$$
$$\times K_{\kappa_1\kappa_2}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2;K_{\kappa_1\kappa_2}=K_{g_{\kappa_1}g_{\kappa_2}}(\tau_1,\tau_2);i,j=\overline{1,n+1};m_1,m_2=\overline{1,3} \tag{33}$$

Якщо визначити матриці

$$K_{m_1m_2}(t_1,t_2,r)=\left\{K_{\sigma_{m_1i}\sigma_{m_2j}}(t_1,t_2,r)\right\}_{i,j=1}^{n+1};m_1,m_2=\overline{1,3}, \tag{34}$$

то елементи кореляційної функції поля напружень складають кореляційну матрицю

$$K_\sigma(t_1,t_2,r)=\left\{K_{m_1m_2}(t_1,t_2,r)\right\}_{m_1,m_2=1}^{3} \tag{35}$$

При $t_1=t_2\equiv t$ отримуємо матрицю

$$D_\sigma(t,r)\equiv K_\sigma(t,t,r) \tag{36}$$

яка характеризує потужність стохастичного динамічного поля напружень в даному просторі з симетричною порожниною.

Якщо поля напружень, породжені випадковими процесами $g_j(t)$, незалежні, то для $\kappa_1\neq\kappa_2=\overline{1,n+2}$ функції $K_{\kappa_1\kappa_2}(t_1,t_2)=0$ і в рівностях (33) залишається одна сума. Якщо поля напружень ділянок $(R_0,R_1),...,(R_n,\infty)$ незалежні, то для

$i \neq j = \overline{1, n+1}$ функції $K_{\sigma_{m_1 i}\sigma_{m_2 j}}(t_1, t_2, r) = 0$ і матриці (34) мають діагональну форму.

<u>Зауваження.</u> Якщо поля переміщень і напружень залежні, то до функцій $\sigma_{mi}(t, r)\ (m = \overline{1,3})$ треба добавити ще функцію $\sigma_{4i} \equiv u_i$.

Тоді в рівностях (32) $m = \overline{1,4}$, в рівностях (33), (34) $m_1 = \overline{1,4}$, $m_2 = \overline{1,4}$ і ми маємо кореляційну матрицю стохастичного динамічного термопружного поля

$$K(t_1, t_2, r) = \left\{K_{m_1 m_2}(t_1, t_2, r)\right\}_{m_1, m_2 = 1}^{4} \tag{37}$$

породжену в симетричному просторі P_n^+ з симетричною порожниною радіуса $R_0 > 0$ стохастичним нестаціонарним температурним полем. При цьому матриця потужності

$$D(t, r) = K(t, t, r) \tag{38}$$

Висновок

Побудовані ймовірнісні характеристики стохастичного динамічного термопружного поля в $(n+1)-$шаровому просторі P_n^+ з симетричною порожниною радіуса $R_0 > 0$ з точки зору кореляційної теорії є достатніми для інженерних розрахунків [6].

The main relativity characteristics of the stochastic dynamic thermo-elastic field in $(n+1)-$ layer symmetric spaces with symmetric cavity were built within the correlation theory .

Література

1. Ленюк М.П. Обобщенная динамическая задача термоупругости для среды с симметричной полостью // Вопросы прикладной термомеханики. – Киев: Наук.думка, 1979. – С.181-190.
2. Блажевський С.Г., Ленюк М.П. Термопружний стан багатошарових симетричних тіл. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000.-130с.
3. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968.-463с.
4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1972.-307с.
5. Быблив О.Я., Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси // Изв. вузов. Математика. – 1987. –8. – С. 3-11.
6. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963.-251с.

Одержано 03.04.2003 р.