УДК. 539.3

Б.Окрепкий, канд. фіз.-мат. наук; М.Шелестовська, канд. техн. наук
Тернопільська академія народного господарства

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПРО ТИСК ШТАМПА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, НА ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

Розв'язано осесиметричну контактну задачу термопружності про тиск кругового штампа скінченої довжини з плоскою основою, що обертається, на пружний ізотропний півпростір при неідеальному тепловому контакті. Визначено температурні поля і нормальні напруження у зоні контакту.

1.Нехай жорсткий циліндричний штамп довжиною L і радіусом R з плоскою основою втискується силою P в ізотропний півпростір. Допускається, що штамп обертається з постійною кутовою швидкістю ω відносно осі симетрії. За рахунок тертя на площадці контакту виділяється тепло, кількість якого пропорційна швидкості ωr, коефіцієнту тертя K_0 і контактному напруженню $\sigma_z(r)$.

Тепловиділення на площадці контакту спричинює появу теплових потоків, спрямованих всередину півпростору і штампа. Поверхня півпростору зовні площадки контакту вільна від зовнішніх зусиль. На площадці контакту дотичні напруження $\tau_{rz} = 0$, а $\tau_{r\theta}$ пропорційні напруженню $\sigma_z(r)$. Тепловий контакт між тілами припускається неідеальним. Вільні поверхні циліндра і півпростору підтримуються нульовою температурою або теплоізольовані. При заданих припущеннях необхідно визначити контактні напруження під штампом і температурні поля в зоні контакту.

Для розв'язування задачі введемо циліндричну систему координат r, θ, z з площиною $z = 0$, яка співпадає з поверхнею півпростору, і віссю oz, спрямованою всередину штампу по його осі симетрії (рис. 1).

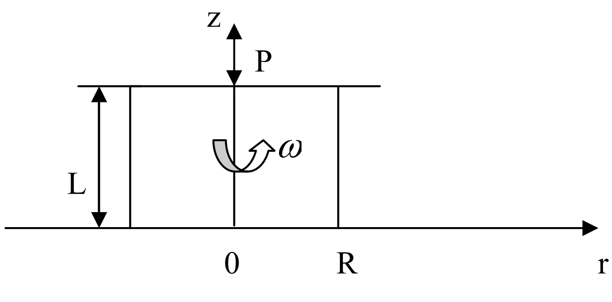

Рис.1 Тиск циліндричного штампа на півпростір

Всі величини (напруження, переміщення, температура, пружні постійні, коефіцієнти теплопровідності і лінійного температурного розширення), які відносяться до півпростору, позначимо верхнім індексом (1), аналогічні величини для циліндричної області записуються без верхніх індексів. Таким чином, запропонована задача розв'язується при наступних граничних умовах:

$$T = 0 \quad (0 \le r \le R, z = L). \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=0 \quad (r=R,\, 0\le z\le L). \tag{2}$$

$$\lambda_z^1\frac{\partial T^1}{\partial z}-\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}=\omega K_0 r\sigma_z(r)/J,$$
$$\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}=h_0(T-T^1)(z=0,\quad 0\le r\le R). \tag{3}$$

$$T^1=0 \qquad (z=0,\, R\le r<\infty). \tag{4}$$

$$u_z^1=-\varepsilon \qquad (z=0,\quad 0\le r\le R). \tag{5}$$

$$\sigma_z^1=0(z=0,\, R\le r<\infty),$$
$$\tau_{zz}^1=0\ (z=0,\, 0\le r<\infty). \tag{6}$$

Тут λ_z, λ_z^1 – коефіцієнти теплопровідності, h_0 – контактна провідність; ε – величина вертикального переміщення штампа, J – механічний еквівалент тепла.

Відомо [2], що в осесиметричному випадку термопружний потенціал і температурне поле для ізотропного тіла визначаються із рівнянь:

$$\nabla^2\varphi=\alpha_T(1+\sigma)T/(1-\sigma),\ \ \nabla^2 T=0 \tag{7}$$

а температурні напруження і переміщення виражаються за формулами:

$$u_z^0=\frac{\partial\varphi}{\partial z},\ \sigma_z^0=-2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right),\quad \tau_{rz}^0=2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}, \tag{8}$$

де α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення, μ,σ – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона.

Для визначення температурного поля у півпросторі введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r,z)$ нульового порядку

$$\overline{T^1}(\xi,z)=\int_0^\infty rT^1(r,z)J_0(\xi r)dr, \tag{9}$$

за допомогою якої згідно з другим рівнянням (7) знаходимо $T^1(\rho,\zeta)$ через довільну функцію $\varphi_1(\eta)$:

$$T^1(\rho,\zeta)=\int_0^\infty \varphi_1(\eta)e^{\eta\zeta}J_0(\eta\rho)d\eta, \tag{10}$$

де $J_0(\eta\rho)$ – функція Бесселя першого роду від дійсного аргументу, $\rho=r/R;\ \zeta=z/R.$

Температурне поле у циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок виглядає так:

$$T(r,z)=A_0z+B_0+D_0(r^2-2z^2)+\sum_{\kappa=1}^{\infty}J_0(\beta_\kappa r)(A_\kappa sh\beta_\kappa z+B_\kappa ch\beta_\kappa z)+$$
$$+\sum_{\kappa=1}^{\infty}I_0(\gamma_\kappa r)(C_\kappa\sin\gamma_\kappa z+D_\kappa\cos\gamma_\kappa z),\ \beta_\kappa=\mu_\kappa/R,\quad \gamma_\kappa=\kappa\pi/R, \tag{11}$$

де $A_\kappa, B_\kappa, C_\kappa, D_\kappa$ – довільні постійні, $I_0(\gamma_\kappa r)$ – функція Бесселя I-го роду уявного аргументу, $\beta_\kappa, \gamma_\kappa$ – власні числа, що визначаються з граничних умов, μ_κ – корені рівняння $J_1(\mu)=0.$

Термопружний потенціал φ визначається з першого рівняння (7) у вигляді

$$\varphi(\rho,\zeta)=\frac{1}{2}\,\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}\zeta\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\varphi_1(\eta)e^{\eta\zeta}J_0(\eta\rho)d\eta \tag{12}$$

Компоненти температурних напружень і переміщень обчислюються за формулами (8).

Маючи формули температурних напружень і переміщень, можна роз'язати задачу при механічних граничних умовах. Для цього необхідно до величин, обчислених згідно з формулами (8), додати компоненти напружень і переміщень від бігармонічного потенціалу [1]

Таким чином, для визначення переміщень і напружень в ізотропному півпросторі маємо наступні формули:

$$u_z^1=-\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\left[\frac{1}{b_1^1R}\eta\Phi_1(\eta)+\left(-2+\frac{1}{b_1^1R}\eta\zeta\Phi_2(\eta)\right)\right]e^{\eta\zeta}J_0(\eta\rho)d\eta+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}R\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\varphi_1(\eta)(1+\eta\zeta)J_0(\eta\rho)d\eta,$$

$$\sigma_z^1=\frac{2b_3^1}{R}\int_0^\infty\left[-\frac{\eta}{R}\Phi_1(\eta)+(b_1^1-\eta\zeta)\Phi_2(\eta)\right]e^{\eta\zeta}J_0(\eta\rho)d\eta+$$

$$+\mu^1\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}\zeta\int_0^\infty\eta\varphi_1(\eta)e^{\eta\zeta}J_0(\eta\rho)d\eta,$$

$$\tau_{rz}^1=2b_3^1\int_0^\infty\left[\frac{\eta}{R}\Phi_1(\eta)+(b_2^1+\eta\zeta)\Phi_2(\eta)\right]e^{\eta\zeta}J_1(\eta\rho)d\eta-$$

$$-\mu^1\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}\int_0^\infty\varphi_1(\eta)(1+\eta\zeta)e^{\eta\zeta}J_1(\eta\rho)d\eta, \tag{13}$$

$$b_1^1=\frac{\mu^1}{\lambda^1+\mu^1},\ b_2^1=\frac{\lambda^1}{\lambda^1+\mu^1},\ b_3^1=\lambda^1+\mu^1.$$

Тут $u_z^1,\sigma_z^1,\tau_{2z}^1-$ компоненти переміщення і напружень у пружному півпросторі; $\Phi_i(i=1,2)-$ довільні функції, λ^1,μ^1- коефіцієнти Ламе.

2. Для задоволення граничної умови (2) у формулі (11) необхідно покласти $D_0=0,\ D_\kappa=0,\ C_\kappa=0(\kappa=\overline{1,\infty})$.

Гранична умова (1), з урахуванням ортогональності функцій Бесселя приводить до таких співвідношень між постійними B_0,B_κ і $A_0,A_\kappa(\kappa=\overline{1,\infty})$;

$$B_0=-A_0\ell R,\quad B_n=-A_n th\mu_n\ell,\quad \ell=L/R. \tag{14}$$

Задовольнивши граничні умови (3), (4), з врахуванням (14) одержимо систему інтегральних співвідношень, що зв'язують функцію $\varphi_1(\eta)$ з коефіцієнтами $A_\kappa(\kappa=\overline{0,\infty})$ і напруженням $\sigma_z^1(\rho)(\rho<1)$;

$$\int_0^\infty\varphi_1(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=-A_0R\left(\ell+\frac{\lambda_z}{h_0R}\right)-\sum_{\kappa=1}^\infty J_0(\mu_\kappa\rho)\left(th\mu_\kappa\ell+\frac{\mu_\kappa\lambda_z}{Rh_0}\right)A_\kappa, \tag{15}$$

$$(\rho<1).$$

$$\frac{\lambda_z^1}{R}\int_0^\infty \eta\varphi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta-\frac{\lambda_z}{R}\left[A_0R+\sum_{\kappa=1}^\infty \mu_\kappa J_0(\mu_\kappa\rho)A_\kappa\right]=$$

$$=\omega K_0\rho R\sigma_z^1(\rho)\big/J,(\rho<1). \tag{16}$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=0, \qquad (\rho>1). \tag{17}$$

Задовольнивши граничні умови (6), для напруження $\sigma_z^1(\rho,0)$ і переміщення $u_z^1(\rho,0)$ на поверхні півпростору маємо формули:

$$u_z^1(\rho,0)=\frac{1+b_1^1}{b_1^1}R\int_0^\infty \Phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta+$$

$$+\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\frac{R}{2}(1+b_1^1)\alpha_{T^1}\int_0^\infty \eta^{-1}\varphi_1(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta,$$

$$\sigma_z^1=\frac{2b_3^1}{R}\int_0^\infty \eta\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta,\ \ R\eta\Phi(\eta)=-\frac{\eta}{R}\Phi_1(\eta)+b_1^1\Phi_2(\eta). \tag{18}$$

Вимагаючи виконання граничних умов (5) прийдемо до системи інтегральних рівнянь відносно функції $\Phi(\eta)\, i\varphi_1(\eta)$:

$$\int_0^\infty \Phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=-\frac{\varepsilon}{R}-\frac{1}{2}\alpha_{T^1}\delta\int_0^\infty \frac{1}{\eta}\varphi_1(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta,\ \ (\rho<1). \tag{19}$$

$$\int_0^\infty \eta\Phi\phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=0,\ \ (\rho>1),\qquad \delta=\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}(1+b_1^1).$$

Використовуючи методику [3], систему інтегральних рівнянь (15-20) зведемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих

$$X_\kappa(\kappa=\overline{1,\infty}),\,Y_\kappa(\kappa=\overline{0,N}):$$

$$A_{0,0}X_0+\sum_{\kappa=1}^\infty A_{0,\kappa}X_\kappa=B_0$$

$$A_{n,0}X_0+\sum_{\kappa=1}^\infty A_{n,\kappa}X_\kappa+A_{n,n}X_n=B_n\quad (n=\overline{1,\infty})$$

$$\frac{4\delta}{\pi^2}\left[i_{0,0}X_0+\sum_{\kappa=1}^\infty \mu_\kappa i_{0,\kappa}X_\kappa\right]+Y_0=1 \tag{21}$$

$$\frac{4\delta}{\pi^2}\left[i_{n,0}X_0+\sum_{\kappa=1}^\infty \mu_\kappa i_{n,\kappa}X_\kappa\right]+Y_n=0\quad (n=\overline{1,N}),$$

де

$$A_{0,0}=1+\frac{4}{\pi}\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\frac{h_0R}{h_0R\ell+\lambda_z}\alpha_{0,0}+\frac{2\delta}{\pi}\Lambda i_{0,0},$$

$$A_{0,\kappa}=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\frac{h_0R}{h_0R\ell+\lambda_z}\alpha_{0,\kappa}+\frac{1}{2}\delta\Lambda i_{0,\kappa}\right]\mu_\kappa,$$

$$A_{n,0} = \alpha_{n,0} + \frac{2\delta}{\pi}\Lambda\left(th\mu_n\ell + \frac{\mu_n\lambda_z}{Rh_0}\right)\cdot\Big[g_0(\mu_n)i_{00} + \\ + \sum_{m=1}^{N}(-1)^m(2m+1)g_m(\mu_n)i_{m,0}\Big]. \tag{22}$$

$$A_{n,\kappa} = \mu_\kappa\left[\alpha_{n,\kappa} + \frac{2\delta}{\pi}\Lambda\left(th\mu_n\ell + \frac{\mu_n\lambda_z}{Rh_0}\right)\times\sum_{m=1}^{N} i_{m,\kappa}(-1)^m(2m+1)g_m(\mu_n)\right],$$

$$A_{n,n} = \frac{\pi}{4}J_0^2(\mu_n)\left(th\mu_n\ell + \frac{\mu_n\lambda_z}{Rh_0}\right),$$

$$B_0 = \frac{\pi}{2}\Lambda,\ B_n = \frac{2}{\pi}\Lambda\left(th\mu_n\ell + \frac{\mu_n\lambda_z}{Rh_0}\right)g_0(\mu_n),$$

$$i_{0,0} = \int_0^\infty \frac{1}{\eta^2}\tau_0(\eta)\left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta\right)d\eta, \quad i_{0,\kappa} = \int_0^\infty \frac{1}{\eta}\tau_0(\eta)d\eta\int_0^1 \sin\mu_\kappa y\sin\eta y dy,$$

$$i_{n,0} = \int_0^\infty \frac{1}{\eta^2}\tau_n(\eta)\left(\frac{\sin\eta}{\eta} - \cos\eta\right)d\eta, \quad i_{n,\kappa} = \int_0^\infty \frac{1}{\eta}\tau_n(\eta)d\eta\int_0^1 \sin\mu_\kappa y\sin\eta y dy,$$

$$\tau_0(\eta) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\cos\eta}{\eta} - \frac{1}{\eta} - \frac{1}{2}\sin\eta\right),$$

$$\tau_n(\eta) = \frac{1}{4}\eta\gamma_n(\eta/2)\left[\gamma_{n-1}(\eta/2) - \gamma_{n+1}(\eta/2)\right] - \\ - \frac{(-1)^n}{2\Gamma(1+n)\Gamma(1-n)}\frac{\sin\eta}{\eta} \quad (n = 1,2,...),$$

$\gamma_n(\eta) -$ сферичні функції;

$$\Lambda = \frac{\omega K_0\chi_0 R^2}{\lambda_z^1 J}\alpha_{T^1},\ \ \chi_0 = \frac{2b_1^1 b_3^1}{1 + b_1^1},$$

$$\alpha_{0,0} = \frac{1}{3},\ \alpha_{0,\kappa} = \frac{1}{\mu_\kappa}\left(\frac{\sin\mu_\kappa}{\mu_\kappa} - \cos\mu_\kappa\right),$$

$$\alpha_{n,\kappa} = \frac{1}{\mu_\kappa}\frac{\mu_\kappa\cos\mu_\kappa\sin\mu_n - \mu_n\sin\mu_\kappa\cos\mu_n}{\mu_n^2 - \mu_\kappa^2},$$

$$\alpha_{n,0} = \frac{1}{\mu_n}\alpha_{0,n}, \quad g_n(t) = \frac{1}{\mu_n}\left[J_0(\mu_n t/2) - \mu_n t J_1(\mu_n t/2)\right] \quad (h = 0,1,2,...).$$

Температура у зоні контакту обчислюється за формулами:

а) для циліндра

$$T(\rho,0)=-\frac{P}{2\pi R^2\chi_0}\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\left\{-\ell X_0+\left[\frac{\pi}{2}\ell\Lambda+2\Lambda\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{th\mu_\kappa\ell\cdot g_0(\mu_\kappa)J_0(\mu_\kappa\rho)}{\mu_\kappa J_0^2(\mu_\kappa)}\right]Y_0+\right.$$

$$+2\Lambda\sum_{m=1}^{N}(-1)^m(2m+1)Y_m\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{th\mu_n\ell\cdot J_0(\mu_\kappa\rho)}{\mu_\kappa J_0^2(\mu_\kappa)}g_m(\mu_\kappa)-$$

$$\left.-\sum_{\kappa=1}^{\infty}th\mu_\kappa\ell\cdot J_0(\mu_\kappa\rho)X_\kappa\right\},\ (0\le\rho\le 1). \tag{23}$$

б) для півпростору:

$$T^1(\rho,0)=-\frac{P}{2\pi R^2\chi_0}\left\{\frac{2}{\pi}X_0\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\left(\frac{\sin\eta}{\eta}-\cos\eta\right)J_0(\eta\rho)d\eta+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}X_\kappa\mu_\kappa\int_0^\infty J_0(\eta\rho)d\eta\int_0^1\sin\mu_\kappa y\sin\eta y dy\right\}\quad(0\le\rho<\infty). \tag{24}$$

Для обчислення контактних напружень під штампом використовуємо вираз:

$$\sigma_z^1(\rho,0)=-\frac{0{,}5P}{\pi R^2\sqrt{1-\rho^2}}\left[Y_0+\frac{1}{\rho}\sum_{\kappa=1}^{N}(-1)^\kappa(2\kappa+1)T_{2\kappa+1}(\rho)Y_\kappa\right],(\rho<1), \tag{25}$$

де $T_{2\kappa+1}(\rho)-$ функкція Чебишева.

3. Подамо результати чисельного аналізу температурних полів і контактних напружень під штампом у залежності від параметра $h_0^*=\dfrac{\lambda_z}{h_0R}$ припускаючи, що $\sigma=0{,}3;\ \lambda_z/\lambda_z^1=1;\ \ell=2;\ \Lambda=5.$

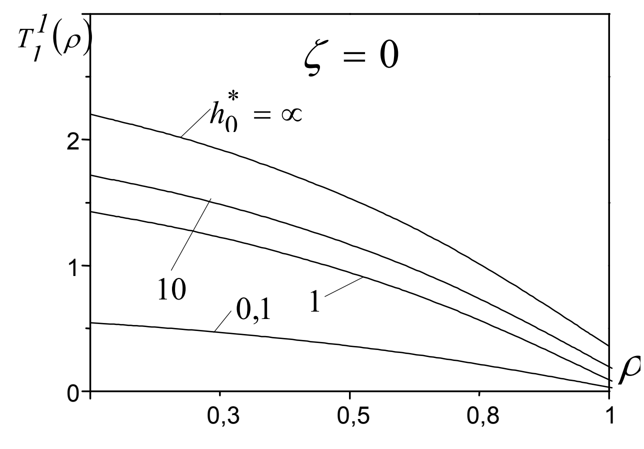

Рис. 2. Розподіл температури у циліндричній області

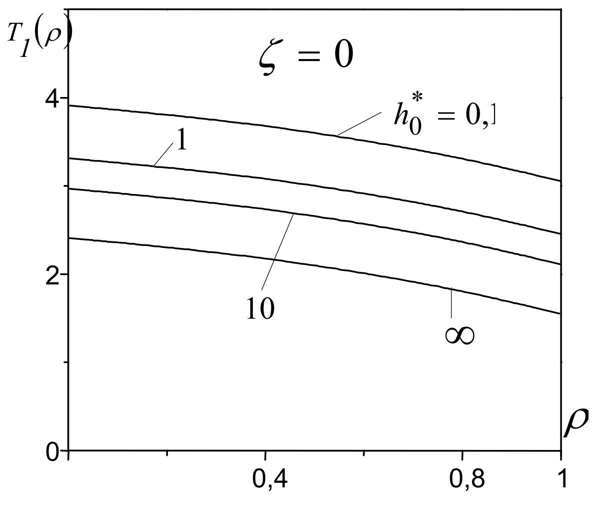

Рис. 3. Розподіл температури у півпросторі

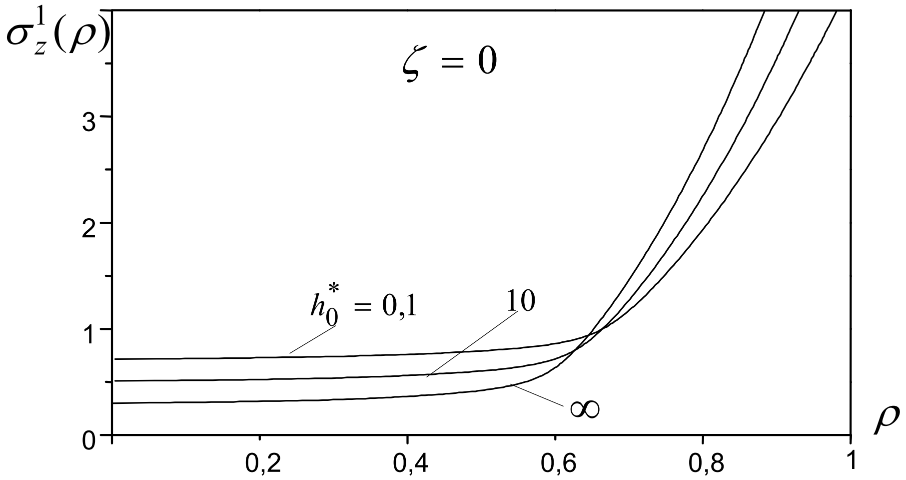

Рис. 4. Розподіл нормальних контактних напружень під штампом

На рис. 2-4 введено позначення: $T_1(\rho) = -2\pi R^2 \chi_0 \, T_1(\rho,0)/P$;

$$T_1^1(\rho) = -2\pi R^2 \chi_0 T^1(\rho,0)/P\,;\ \sigma_z^1(\rho) = -2\pi R^2 \sigma_z^1(\rho,0)/P$$

Слід відзначити, що параметр h_0^* значно впливає на розподіл температурних полів і контактних напружень під штампом. При зростанні h_0^* температура в циліндрі спадає, а в півпросторі зростає.

Нормальні напруження під штампом спадають. При $h_0^* \to \infty$, одержимо розв'язок задачі для ідеального теплового контакту [3].

The axis-symmetric contact thermo-elastic task on the pressure of the rotating limited length flat base punch on the elastic isotropic semi-space under non-ideal heat contact was solved. The temperature fields and normal stress in the contact area are found.

Література

1. 1. Грилицкий Д.В.; Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости – Львов : Вища шк., 1981. – 136с.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – К: Наук. думка, 1979.- 304с.
3. Окрепкий Б.С. Осесиметрична контактна задача термопружності про тиск обертаючого штампа на пружний півпростір. Зб. наук. пр. - Київ: Ін-т математики НАН України. – 1996. – Вип. В. – С. – 165-174.

Одержано 05.10.2001 р.