УДК 517.52/524 : 517.58/589
М.Ленюк, докт.фіз.-мат.наук, Б.Шелестовський, канд. фіз.-мат.наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННОГО ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ФУР'Є-(КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)-(КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) НА ПОЛЯРНІЙ ВІСІ

Методом порівняння розв'язку крайової задачі на полярній вісі $r \ge R_0 \ge 0$ з двома точками спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Фур'є і Бесселя для модифікованих функцій, побудованого з одного боку методом функцій Коші, а з другого боку методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є–(Конторовича-Лебєдєва)-(Конторовича-Лебєдєва) підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за тригонометричною системою функцій і за системою спеціальних функцій Бесселя.

Розглянемо задачу про конструкцію обмеженого на множині $I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 \ge 0\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Фур'є та Бесселя 2-го порядку для модифікованих функцій

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1) \tag{1}$$

$$(B_{\alpha_j} - q_j^2) u_j(r) = -g_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j); \; j = 2,3; \; R_3 = \infty$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0 \qquad \frac{du_3}{dr}\Big|_{r=\infty} = 0, \quad |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \ne 0 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0; \; j,k = 1,2 \tag{3}$$

У рівностях (1)-(3) $\alpha_{im}^k \ge 0, \beta_{im}^k \ge 0, c_{1k} \cdot c_{2k} > 0, c_{jk} = \alpha_{2j}^k \cdot \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \cdot \beta_{2j}^k$;

$B_{\alpha_j} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_j + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_j^2 - \lambda_j^2 r^2, \lambda_j \in (0, \infty), 2\alpha_j + 1 \ge 0; i,m,k = 1,2;$

$q_1 \ge 0, q_j \ge 0, j = 2,3; B_\alpha$ - диференціальний оператор Бесселя [1].

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} - q^2\right) \mathrm{v} = 0$ утворюють функції $\mathrm{v}_1 = chqr$ і $\mathrm{v}_2 = shqr$. Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $(B_\alpha - q^2)\mathrm{v} = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $\mathrm{v}_1 = I_{q,\alpha}(\lambda r) \equiv (\lambda r)^{-\alpha} I_q(\lambda r)$ та $\mathrm{v}_2 = K_{q,\alpha}(\lambda r) = (\lambda r)^{-\alpha} K_q(\lambda r)$[2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) за правилами [3]:

$$u_1(r) = A_1 chq_1 r + B_1 shq_1 r + \int_{R_0}^{R_1} \varepsilon_1(r,\rho,q) g_1(\rho) d\rho$$

$$u_2(r) = A_2 I_{q_2,\alpha_2}(\lambda_2 r) + B_2 K_{q_2,\alpha_2}(\lambda_2 r) + \int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_2(r,\rho,q) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho \quad (4)$$

$$u_3(r) = B_3 K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3 r) + \int_{R_2}^{\infty} \varepsilon_3(r,\rho,q) g_3(\rho) \rho^{2\alpha_3 - 1} d\rho.$$

Тут беруть участь функції Коші $\varepsilon_j(r,\rho,q)[4]$:

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{q_1 \Delta_{11}(q_1 R_0, q_1 R_1)} \begin{cases} \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 r) \Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 \rho), R_0 < r < \rho < R_1 \\ \Phi_{11}^0(q_1 R_0, q_1 \rho) \Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 r), R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda_2^{2\alpha_2}}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda_2 R_1, \lambda_2 R_2)} \begin{cases} \psi_{q_2,\alpha_2;12}^1(\lambda_2 R_1, \lambda_2 r) \times \\ \psi_{q_2,\alpha_2;12}^1(\lambda_2 R_1, \lambda_2 \rho) \times \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \times \psi_{q_2,\alpha_2;11}^2(\lambda_2 R_2, \lambda_2 \rho), R_1 < r < \rho < R_2 \\ \times \psi_{q_2,\alpha_2;11}^2(\lambda_2 R_2, \lambda_2 r), R_1 < \rho < r < R_2 \end{matrix}; \quad (6)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\lambda_3^{2\alpha_3}}{U_{q_3,\alpha_3;12}^{22}(\lambda_3 R_2)} \begin{cases} K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3 \rho) \psi_{q_3,\alpha_3;12}^2(\lambda_3 R_2, \lambda_3 r), R_2 < r < \rho < \infty \\ K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3 r) \psi_{q_3,\alpha_3;12}^2(\lambda_3 R_2, \lambda_3 \rho), R_2 < \rho < r < \infty \end{cases}. \quad (7)$$

У рівностях (5)-(7) беруть участь функції:

$$\Delta_{j1}(q_1 R_0, q_1 R_1) = V_{11}^{01}(q_1 R_0) V_{j1}^{12}(q_1 R_1) - V_{11}^{02}(q_1 R_0) V_{j1}^{11}(q_1 R_1); \; j = 1,2;$$

$$\Delta_{q_2,\alpha_2;jk}(\lambda_2 R_1, \lambda_2 R_2) = U_{q_2,\alpha_2;j2}^{11}(\lambda_2 R_1) U_{q_2,\alpha_2;k1}^{22}(\lambda_2 R_2) -$$

$$- U_{q_2,\alpha_2;j2}^{12}(\lambda_2 R_1) U_{q_2,\alpha_2;k1}^{21}(\lambda_2 R_2); \; j,k = 1,2;$$

$$\Phi_{jk}^m(q_s R_m, q_s x) = V_{jk}^{m2}(q_s R_m) chq_s x - V_{jk}^{m1}(q_s R_m) shq_s x;$$

$$\psi_{\nu,\alpha;jk}^m(\lambda_s R_m, \lambda_s x) = U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(\lambda_s R_m) K_{\nu,\alpha}(\lambda_s x) - U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(\lambda_s R_m) I_{\nu,\alpha}(\lambda_s x);$$

Тут прийняті позначення [4]:

$$V_{jk}^{m1}(q_s R_m) = \alpha_{jk}^m q_s shq_s R_m + \beta_{jk}^m chq_s R_m;$$

$$V_{jk}^{m2}(q_s R_m) = \alpha_{jk}^m q_s chq_s R_m + \beta_{jk}^m shq_s R_m;$$

$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(\lambda_s R_m) = (\alpha_{jk}^m \frac{\nu - \alpha}{R_m} + \beta_{jk}^m) I_{\nu,\alpha}(\lambda_s R_m) + \alpha_{jk}^m \lambda_s^2 R_m I_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda_s R_m);$$

$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(\lambda_s R_m) = (\alpha_{jk}^m \frac{\nu - \alpha}{R_m} + \beta_{jk}^m) K_{\nu,\alpha}(\lambda_s R_m) - \alpha_{jk}^m \lambda_s^2 R_m K_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda_s R_m).$$

Крайові умови (2) і умови спряження (3) для визначення величин $A_j(j = 1,2)$ і $B_k(k = 1,2,3)$ дають алгебраїчну систему із п’яти рівнянь:

$$V_{11}^{01}(q_1 R_0) A_1 + V_{11}^{02}(q_1 R_0) B_1 = g_0$$

$$V_{j1}^{11}(q_1R_1)A_1+V_{j1}^{12}(q_1R_1)B_1-U_{q_2,\alpha_2;j2}^{11}(\lambda_2R_1)A_2- \\ -U_{q_2,\alpha_2;j2}^{12}(\lambda_2R_1)B_2=\delta_{j2}G_{12} \tag{8}$$

$$U_{q_2,\alpha_2;j1}^{21}(\lambda_2R_2)A_2+U_{q_2,\alpha_2;j1}^{22}(\lambda_2R_2)B_2-U_{q_3,\alpha_3;j2}^{22}(\lambda_3R_2)B_3=\delta_{j2}G_{23};\ j=1,2.$$

Тут δ_{j2} – символ Кронекера, а функції G_{12} та G_{23} відповідно рівні:

$$G_{12}=-c_{11}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)}{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}g_1(\rho)d\rho-$$

$$-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\psi_{q_2,\alpha_2;11}^2(\lambda_2R_2,\lambda_2\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda_2R_1,\lambda_2R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\psi_{q_2,\alpha_2;12}^1(\lambda_2R_1,\lambda_2\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda_2R_1,\lambda_2R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+$$

$$+\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}}\int_{R_2}^{\infty}\frac{K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3\rho)}{U_{q_3,\alpha_3;12}^{22}(\lambda_3R_2)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_3-1}d\rho.$$

Визначимо функції:

$$A_{\alpha_2;j}(q)=\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha_2;2j}(\lambda_2R_1,\lambda_2R_2) \\ -\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha_2;1j}(\lambda_2R_1,\lambda_2R_2);$$

$$B_{(\alpha);j}^*(q)=U_{q_3,\alpha_3;22}^{22}(\lambda_3R_2)\Delta_{q_2,\alpha_2;j1}(\lambda_2R_1,\lambda_2R_2)- \\ -U_{q_3,\alpha_3;12}^{22}(\lambda_3R_2)\Delta_{q_2,\alpha_2;j2}(\lambda_2R_1,\lambda_2R_2),\ j=1,2;$$

$$q=(q_1,q_2,q_3),(\alpha)=(\alpha_2,\alpha_3).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): визначник алгебраїчної системи (8)

$$\Delta_{(\alpha)}(q)\equiv U_{q_3,\alpha_3;22}^{22}(\lambda_3R_2)A_{\alpha_2;1}(q)-U_{q_3,\alpha_3;12}^{22}(\lambda_3R_2)A_{\alpha_2;2}(q)\equiv \\ \equiv B_{(\alpha);2}^*(q)\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)-B_{(\alpha);1}^*(q)\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\neq 0 \tag{9}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (8), підстановки одержаних виразів для A_j і B_k у формули (4) отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r)=W_{(\alpha);1j}(r,q)g_0+\int_{R_0}^{R_1}H_{(\alpha);j1}^*(r,\rho,q)g_1(\rho)d\rho+ \\ +\int_{R_1}^{R_2}H_{(\alpha);j2}^*(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+ \\ +\int_{R_2}^{\infty}H_{(\alpha);j3}^*(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_3-1}d\rho;\ j=1,2,3 \tag{10}$$

У формулах (10) беруть участь функції Гріна

$$W_{(\alpha);11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Big[B^*_{(\alpha);2}(q)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1r)-B^*_{(\alpha);1}(q)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1r)\Big]$$

$$W_{(\alpha);12}(r,q)=\frac{c_{11}q_1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}[U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda_3R_2)\psi^2_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda_2R_2,\lambda_2r)-$$
$$-U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda_3R_2)\psi^2_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda_2R_2,\lambda_2r)] \qquad (11)$$

$$W_{(\alpha);13}(q)=-\frac{c_{11}c_{12}q_1}{\lambda_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3r),$$

породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$, і функції впливу

$$H^*_{(\alpha);11}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_1\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)[B^*_{(\alpha);1}(q)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1\rho)-\\ \Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)[B^*_{(\alpha);1}(q)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1r)-\end{cases}$$
$$-B^*_{(\alpha);2}(q)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1\rho)],\quad R_0<r<\rho<R_1$$
$$-B^*_{(\alpha);2}(q)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1r)],\quad R_0<\rho<r<R_1$$

$$H^*_{(\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)[U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda_3R_2)\times$$
$$\times\psi^2_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda_2R_2,\lambda_2\rho)-U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda_3R_2)\psi^2_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda_2R_2,\lambda_2\rho)]; \qquad (12)$$

$$H^*_{(\alpha),13}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}c_{22}}{\lambda_2^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}R_2^{2\alpha_3+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r)K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3\rho);$$

$$H^*_{(\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)[U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda_3R_2)\psi^2_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda_2R_2,\lambda_2r)-$$
$$-U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda_3R_2)\psi^2_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda_2R_2,\lambda_2r)];$$

$$H^*_{(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{\lambda_2^{2\alpha_2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}[\Delta_{21}\psi^1_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda_2R_1,\lambda_2r)-\Delta_{11}\psi^1_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda_2R_1,\lambda_2r)]\times\\ [\Delta_{21}\psi^1_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda_2R_1,\lambda_2\rho)-\Delta_{11}\psi^1_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda_2R_1,\lambda_2\rho)]\times\end{cases}$$
$$\times[U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda_3R_2)\psi^2_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda_2R_2,\lambda_2\rho)-U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda_3R_2)\psi^2_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda_2R_2,\lambda_2\rho)],$$
$$\times[U^{22}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda_3R_2)\psi^2_{q_2,\alpha_2;21}(\lambda_2R_2,\lambda_2r)-U^{22}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda_3R_2)\psi^2_{q_2,\alpha_2;11}(\lambda_2R_2,\lambda_2r)],$$
$$R_1<r<\rho<R_2$$
$$R_1<\rho<r<R_2\quad;$$

$$H^*_{(\alpha);23}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}\Delta_{(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3\rho)[\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\psi^1_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda_2R_1,\lambda_2r)-$$
$$-\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\psi^1_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda_2R_1,\lambda_2r)];$$

$$H^*_{(\alpha),31}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}c_{12}}{\lambda_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}\Delta_{(\alpha)}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1\rho)K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3r);$$

$$H^{*}_{(\alpha);32}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3 r)[\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\psi^{1}_{q_2,\alpha_2;12}(\lambda_2R_1,\lambda_2\rho)-$$
$$-\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\psi^{1}_{q_2,\alpha_2;22}(\lambda_2R_1,\lambda_2\rho)];$$

$$H^{*}_{(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{\lambda_3^{2\alpha_3}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3\rho)[A_{(\alpha);2}(q)\psi^{2}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda_3R_2,\lambda_3 r)-\\ K_{q_3,\alpha_3}(\lambda_3 r)[A_{(\alpha);2}(q)\psi^{2}_{q_3,\alpha_3;12}(\lambda_3R_2,\lambda_3\rho)-\end{cases}$$
$$-A_{(\alpha);1}(q)\psi^{2}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda_3R_2,\lambda_3 r)],R_2<r<\rho<\infty$$
$$-A_{(\alpha);1}(q)\psi^{2}_{q_3,\alpha_3;22}(\lambda_3R_2,\lambda_3\rho)],R_2<\rho<r<\infty,$$

породжені неоднорідністю системи (1).

Побудуємо розв’язок крайової задачі (1)-(3) методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур’є-(Конторовича-Лєбєдєва)-(Конторовича-Лєбєдєва) на полярній вісі $r \ge R_0 \ge 0$ з двома точками спряження [5,6].

Визначимо величини і функції:

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_2^{2\alpha_3+1},\ \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_2^{2\alpha_3+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}},$$

$$\sigma_3=1,\quad b_j=(\beta^2+\gamma_j^2)^{\frac{1}{2}},\quad \gamma_j^2\ge 0;$$

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)=\frac{c_{21}sh(\pi b_{2n})}{\pi\lambda_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda_3R_2,b_{3n})[\mathrm{v}^{01}_{11}(b_{1n}R_0)\sin b_{1n}r-$$
$$-\mathrm{v}^{02}_{11}(b_{1n}R_0)\cos b_{1n}r],$$

$$\begin{aligned}V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)&=X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda_3R_2,b_{3n})[\delta_{11}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\psi^{1}_{\alpha_2;22}(\lambda_2R_1,\lambda_2r,b_{2n})-\\&-\delta_{21}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\psi^{1}_{\alpha_2;12}(\lambda_2R_1,\lambda_2r,b_{2n})],\end{aligned}\qquad(13)$$

$$V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)=a_{\alpha_2;1}(\beta_n)D_{\alpha_3}(\lambda_3r,b_{3n});\quad b_{jn}=(\beta_n^2+\gamma_j^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\sigma_{(\alpha)}(r)=\sigma_1\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)+\sigma_2r^{2\alpha_2-1}\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+\sigma_3r^{2\alpha_3-1}\theta(r-R_2);$$

$$V_{(\alpha)}(r,\beta_n)=\sum_{k=1}^{2}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{(\alpha);k}(r,\beta_n)+V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)\theta(r-R_2).$$

У рівностях (13) беруть участь функції:

$$\delta_{j1}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)=\mathrm{v}^{01}_{11}(b_{1n}R_0)\mathrm{v}^{12}_{j1}(b_{1n}R_1)-\mathrm{v}^{02}_{11}(b_{1n}R_0)\mathrm{v}^{11}_{j1}(b_{1n}R_1);$$

$$\delta_{\alpha_2;jk}(\lambda_2R_1,\lambda_2R_2;b_{2n})=X^{11}_{\alpha_2;j2}(\lambda_2R_1,b_{2n})X^{22}_{\alpha_2;k1}(\lambda_2R_2,b_{2n})-$$
$$-X^{12}_{\alpha_2;j2}(\lambda_2R_1,b_{2n})X^{21}_{\alpha_2;k1}(\lambda_2R_2,b_{2n});$$

$$\begin{aligned}a_{\alpha_2;j}(\beta_n)&=\delta_{11}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\delta_{\alpha_2;2j}(\lambda_2R_1,\lambda_2R_2;b_{2n})-\\&-\delta_{21}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1)\delta_{\alpha_2;1j}(\lambda_2R_1,\lambda_2R_2;b_{2n}),\quad j,k=1,2;\end{aligned}\qquad(14)$$

$$\psi^{1}_{\alpha_2;j2}(\lambda_2 R_1,\lambda_2 r,b_{2n}) = X^{11}_{\alpha_2;j2}(\lambda_2 R_1,b_{2n})D_{\alpha_2}(\lambda_2 r,b_{2n})$$
$$-X^{12}_{\alpha_2;j2}(\lambda_2 R_1,b_{2n})C_{\alpha_2}(\lambda_2 r,b_{2n}).$$

Тут прийняті позначення:

$$\mathrm{v}^{m1}_{jk}(bR_m) = -\alpha^m_{jk} b \sin bR_m + \beta^m_{jk} \cos bR_m,$$
$$\mathrm{v}^{m2}_{jk}(bR_m) = \alpha^m_{jk} b \cos bR_m + \beta^m_{jk} \sin bR_m,$$
$$X^{m1}_{\alpha;jk}(\lambda R_m,b) = (\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr} + \beta^m_{jk})C_\alpha(\lambda r,b)\Big|_{r=R_m}; \quad (15)$$
$$X^{m2}_{\alpha;jk}(\lambda R_m,b) = (\alpha^m_{jk}\frac{d}{dr} + \beta^m_{jk})D_\alpha(\lambda r,b)\Big|_{r=R_m};$$
$$C_\alpha(\lambda r,b(\beta)) = I_{ib,\alpha}(\lambda r) + iD_\alpha(\lambda r,b(\beta));$$
$$D_\alpha(\lambda r,b(\beta)) = \pi^{-1} sh(\pi b(\beta))K_{ib,\alpha}(\lambda r).$$

При цьому корені β_n трансцендентного рівняння

$$a_{\alpha_2,1}(\beta)X^{22}_{\alpha_3;22}(\lambda_3 R_2,b_3(\beta)) - a_{\alpha_2,2}(\beta)X^{22}_{\alpha_3;12}(\lambda_3 R_2,b_3(\beta)) = 0 \quad (16)$$

утворюють дискретний спектр [6], а вектор-функція $V_{(\alpha)}(r,\beta_n)$є власною функцією спектральної задачі Штурма-Ліувілля: знайти ненульовий обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Фур'є, Бесселя

$$(\frac{d^2}{dr^2} + b_1^2)V_{(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_0,R_1) \quad (17)$$
$$(B_{\alpha_j} + b_j^2)V_{(\alpha);j}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_{j-1},R_j);\ j = 2,3; \quad R_3 = \infty$$

з крайовими умовами

$$(\alpha^0_{11}\frac{d}{dr} + \beta^0_{11})V_{(\alpha);1}\Big|_{r=R_0} = 0 \qquad \frac{d}{dr}V_{(\alpha);3}\Big|_{r=\infty} = 0 \quad (18)$$

та умовами спряження

$$[(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j1})V_{(\alpha);k}(r,\beta) - (\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j2})V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)]\Big|_{r=R_k} = 0,\ j,k = 1,2 \quad (19)$$

Оскільки система власних вектор-функцій $\{V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ узагальнено ортогональна, повна і замкнута на множині I_2^+[6] ,то згідно теореми Стєклова довільну двічі неперервно диференційовну на I_2^+ вектор-функцію $f(r) = \{f_1(r);\ f_2(r);\ f_3(r)\}$, яка задовольняє крайові умови (18) і умови спряження (19), можна зобразити абсолютно й рівномірно збіжним на кожній компактній множині $I^+_{2,*} \subset I_2^+$ рядом Фур'є

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{\infty} f(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma_{(\alpha)}(\rho)d\rho \frac{V_{(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2} \quad (20)$$

У рівності (20) $f(r) = \sum_{k=1}^{2}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k - r)f_k^{(r)} + \theta(r-R_2)f_3(r),$

$$\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2 = \int_{R_0}^{\infty}[V_{(\alpha)}(r,\beta_n)]^2\sigma_{(\alpha)}(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1}[V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)]^2\sigma_1 dr +$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}[V_{(\alpha);2}(r,\beta_n)]^2\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr + \int_{R_2}^{\infty}[V_{(\alpha);3}(r,\beta_n)]^2\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}dr, \qquad (21)$$

$\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2$ - квадрат норми власної (спектральної) функції гібридного диференціального оператора

$$B_{(\alpha)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_{\alpha_1} + \theta(r-R_2)B_{\alpha_2}.$$

Ряд Фур'є (20) породжує пряме $H_{(\alpha)}$ і обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є – (Конторовича – Лєбєдєва)-(Конторовича – Лєбєдєва):

$$H_{(\alpha)}[f(r)] = \int_{R_0}^{\infty} f(r)V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma_{(\alpha)}(r)dr \equiv f_n \qquad (22)$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[f_n] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1} \equiv f(r) \qquad (23)$$

Методом інтегрування частинами встановлюємо основну тотожність інтегрального перетворення оператора $B_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}[B_{(\alpha)}[f(r)]] = -\beta_n^2 f_n - (\alpha_{11}^0)^{-1}\sigma_1 V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)(\alpha_{11}^0\frac{df_1}{dr} +$$
$$+\beta_{11}^0 f_1(r))\Big|_{r=R_0} - \gamma_1^2\int_{R_0}^{R_1} f_1(r)V_{(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 dr - \qquad (24)$$
$$-\sum_{k=2}^{3}\gamma_k^2\int_{R_{k-1}}^{R_k} f_k(r)V_{(\alpha);k}(r,\beta_n)\sigma_k r^{2\alpha_k-1}dr, \quad R_3=\infty$$

Покладемо

$$\gamma_j^2 = q^2 - q_j^2 \ge 0(q^2 = max\{q_1^2;\, q_2^2;\, q_3^2\}), \quad g(r) = g_1(r)\theta(r-R_0)\theta(R_1-r) +$$
$$+ g_2(r)\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) + g_3(r)\theta(r-R_2), \quad u(r) = u_1(r)\theta(r-R_0)\theta(R_1-r) +$$
$$+ u_2(r)\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) + u_3(r)\theta(r-R_2); \quad \bar{q}^2 = q_1^2\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)$$
$$+ q_2^2\theta(r-R_1)\theta(R_2-r) + q_3^2\theta(r-R_2).$$

Запишемо систему (1) у вигляді одного рівняння

$$(B_{(\alpha)} - \bar{q}^2)u(r) = -g(r) \qquad (25)$$

Застосуємо до рівняння (25) інтегральний оператор $H_{(\alpha)}$ за правилом (22). Внаслідок тотожності (24) отримаємо алгебраїчне рівняння:

$$(\beta_n^2 + q^2)u_n = g_n - (\alpha_{11}^0)^{-1}V_{(\alpha);1}(R_0,\beta_n)\sigma_1 g_0 \qquad (26)$$

Звідси одержуємо, що

$$u_n = \frac{g_n}{\beta_n^2 + q^2} - \frac{\sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_{(\alpha);1}(R_0, \beta_n) \frac{g_0}{\beta_n^2 + q^2} \tag{27}$$

Застосуємо до u_n оператор $H_{(\alpha)}^{-1}$ за правилом (23). В результаті елементарних перетворень одержуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = -\frac{\sigma_1}{\alpha_{11}^0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\alpha);1}(R_0, \beta_n) V_{(\alpha);j}(r, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q^2) \| V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \|^2} \cdot g_0 + \int_{R_0}^{R_1} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\alpha);j}(r, \beta_n) V_{(\alpha);1}(\rho, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q^2) \| V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \|^2} \Big) \times$$

$$\times g_1(\rho) \sigma_1 d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\alpha);j}(r, \beta_n) V_{(\alpha);2}(\rho, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q^2) \| V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \|^2} \Big) g_2(\rho) \sigma_2 \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho +$$

$$+ \int_{R_2}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\alpha);j}(r, \beta_n) V_{(\alpha);3}(\rho, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q^2) \| V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \|^2} \Big) g_3(\rho) \sigma_3 \rho^{2\alpha_3 - 1} d\rho, \quad j = \overline{1,3} \tag{28}$$

Порівнюючи внаслідок єдиності розв'язок (10) і (28), маємо зображення наступних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\alpha);j}(r, \beta_n) V_{(\alpha);k}(\rho, \beta_n)}{(\beta_n^2 + q^2) \| V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \|^2} = \frac{1}{\sigma_k} H_{(\alpha);jk}^*(r, \rho, q); \quad j,k = \overline{1,3} \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{(\alpha);1}(R_0, \beta_n) V_{(\alpha);j}(r, \beta_n)}{\alpha_{11}^0 (\beta_n^2 + q^2) \| V_{(\alpha)}(r, \beta_n) \|^2} = -\frac{1}{\sigma_1} W_{(\alpha);1j}(r, q); \quad j = \overline{1,3} \tag{30}$$

Формули (29), (30) показують, що можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 \equiv q^2 (\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 0)$.

Математичним обґрунтуванням зображень (29), (30) є твердження

Теорема: Якщо вектор-функція

$$f(r) = \left\{ \frac{d^2}{dr^2} g_1(r); \quad B_{\alpha_2}[g_2(r)]; \quad B_{\alpha_3}[g_3(r)] \right\}$$ неперервна на множині I_2^+, а вектор-функція $g(r)$ задовольняє однорідні крайові умови (2) та умови спряження (3) і виконується умова (9) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справедливі формули (29),(30) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів.

Polyparametric family of the functional series according to the trigonometric function system as well as the special Bessel function was summarized by the method of the comparison of the boder task on the polar axis $r \geq R_0 \geq 0$ *with two conjunction points for the seperate system of the Furrier and Bessel differential equations for the modificated functions, constructed by the Coshier fuction method from one side and the method of the limitted hybrid integral transformation of the Furrier – (Kontorovich – Lebedyev) - (Kontorovich – Lebedyev) type from the other.*

Література

1. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва.-Київ,1996.-64с.-(препринт/НАН України. Ін-т математики: 96.16)
2. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя.-Киев,1983.-62с.-(Препринт / АН УССР. Ин-т математики: 83.3).
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.-М.: Физматгиз, 1959.-468с.
4. Ленюк М.П., Літовченко В.А. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень. Том II.-Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.-283с.
5. Нікітіна О.М. Одна сім'я гібридних інтегральних перетворень на кусково-однорідній полярній осі // Сьома Міжнародна Наукова Конференція імені академіка М.Кравчука (14-16 травня 1998р., Київ). Матеріали конференції.-С.368.

6. Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення .-Київ,1997.-44с.-(Препринт / НАН України. Ін-т математики: 97.7)

Одержано 30.05.2001 р.