Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра
Вищої математики

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

З КУРСУ

Математичні методи розрахунків у машинобудуванні

ДЛЯ ФАХОВОЇ ПІДГОТОВКИ МАГІСТРІВ

СПЕЦІАЛЬНОСТІ 133 «ГАЛУЗЕВЕ МАШИНОБУДУВАННЯ»

Тернопіль 2023 р.

Методичний посібник з курсу «Математичні методи розрахунків у машинобудуванні» для фахової підготовки магістрів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» / Уклад. С.І.Федак. Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2023.– 52 с.

Укладачі: к.т.н. С.І.Федак

Відповідальний за випуск: к.т.н. С.І. Федак

Рецензенти: доц., к.пед.н. Г.В. Гоменюк
доц., к.т.н. Л.А. Романюк

Методичний посібник розглянуто й затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 8 від 28 березня 2023 р.

Схвалено й рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету прикладних технологій та електроінженерії Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 9 від 5 квітня 2023 р.

Посібник складено з урахуванням матеріалів літературних джерел, наведених у списку.

ВСТУП

Методичний посібник створено з метою надання допомоги магістрам спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» при підготовці до практичних занять в курсі «Математичні методи розрахунків у машинобудуванні». Задачі, запропоновані для розгляду, підібрані згідно тем, передбачених робочою програмою дисципліни, а саме:

теорія похибок в математичних методах;
чисельні методи розв’язання рівнянь та систем рівнянь;
апроксимація функцій;
задачі оптимізації;
теорія графів;
рівняння математичної фізики;
метод скінченних різниць.

Методичний посібник може бути використаний студентами інших інженерних спеціальностей для розв’язування завдань згідно розглянутих тем в курсі математичної підготовки.

Тема 1. Теорія похибок в математичних методах.

Приклад 1.1. Заокруглити число $\pi = 3{,}1415926535\ldots$ 1) до п'яти, 2) чотирьох і 3) трьох значущих цифр,

Розв'язування. Використовуючи правила заокруглення, одержимо наближені числа: 1) оскільки наступна цифра 9 більше 5, то цифру 5 збільшуємо на 1, отримуємо $3{,}1416$; 2) оскільки наступні цифри 5 і 9, то цифру 2 збільшуємо на 1, отримуємо $3{,}142$; 3) оскільки наступна цифра 1 менше 5, то отримуємо $3{,}14$; відповідні абсолютні похибки менші відповідно від 1) $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$; 2) $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$; 3) $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

Приклад 1.2. Обчислити різницю $a^* = \sqrt{1,49} - \sqrt{1,47}$ з чотирма вірними знаками.

Розв'язування. Оскільки $\sqrt{1,49} = 1,220656\ldots$ і $\sqrt{1,47} = 1,212436\ldots$, то $a^* = 0,008220\ldots$. Отже, $a^* = 8,220\cdot 10^{-3}$.

Це обчислення можна виконати іншим способом, записавши a^* у вигляді

$$a^* = \frac{0,02}{\sqrt{1,49} + \sqrt{1,47}}.$$

У цьому випадку достатньо взяти значення $\sqrt{1,49}$ і $\sqrt{1,47}$ тільки з чотирма вірними цифрами:

$$a^* = \frac{0,02}{1,220 + 1,212} = \frac{0,02}{2,433} = 8,220\cdot 10^{-3}.$$

Приклад 1.3. Дано наближені числа $a_1^* = -0{,}723$; $a_2^* = 4{,}3572$; $a_3^* = 0{,}89745$, усі написані знаки яких вірні. Знайти число $\frac{a_1^* \cdot a_2^*}{a_3^*}$ та визначити кількість вірних знаків у ньому.

Розв'язування. $b^* = -\frac{0,723\cdot 4,3572}{0,89745} = -3,51023.$

Знайдемо граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(b^*)$. Для цього обчислимо спочатку граничну відносну похибку $\bar{\delta}(b^*)$.

$$\bar{\delta}(b^*) = \bar{\delta}(a_1^*) + \bar{\delta}(a_2^*) + \bar{\delta}(a_3^*).$$

Оскільки $\bar{\Delta}(a_1^*) = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$, $\bar{\Delta}(a_2^*) = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, $\bar{\Delta}(a_3^*) = \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$, то

$$\bar{\delta}(a_1^*) = \frac{0,0005}{0,723} = 0,000692, \qquad \bar{\delta}(a_2^*) = \frac{0,00005}{4,3572} = 0,000011,$$

$$\bar{\delta}(a_3^*) = \frac{0,000005}{0,89745} = 0,000006, \qquad \bar{\delta}(b^*) = 0,000709 \approx 0,0007.$$

Отже, $\bar{\Delta}(b^*) = \left|b^*\right| \cdot \bar{\delta}(b^*) \approx 0,0025 < 0,003.$

Оскільки гранична абсолютна похибка наближеного числа b^* не перевищує 0,005, то це число має три вірні знаки, тобто b^* = – 3,51 або, точніше,

$$b^* = -3,510 \pm 0,003.$$

Приклад 1.4. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $12,10 \pm 0,01$ і 25,21±0,01. Визначити кут α, прилеглий до першого катета, й оцінити абсолютну та відносну похибки результату.

Розв'язування. Позначимо наближені значення катетів a та b через a^* та b^*. За умовою задачі a^*= 12,10, b^*= 25,21, $\bar{\Delta}(a^*) = \bar{\Delta}(b^*) = 0,01$.

$$tg\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \alpha = arctg\frac{b}{a};$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a} = \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \left(-\frac{b}{a^2}\right) = -\frac{b}{a^2+b^2}; \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial b} = \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Обчислимо граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(\alpha^*)$, застосувавши формулу $\bar{\Delta}(u_0^*) \approx \left|f_x'(x_0^*, y_0^*)\right|\bar{\Delta}(x_0^*) + \left|f_y'(x_0^*, y_0^*)\right|\bar{\Delta}(y_0^*)$.

$$\bar{\Delta}(\alpha^*) = \left(\frac{25,21}{25,21^2+12,10^2} + \frac{12,10}{25,21^2+12,10^2}\right)0,01 = 0,00048 < 0,0005;$$

$$\alpha^* = arctg\frac{b^*}{a^*} = arctg\frac{25,21}{12,10} = arctg\ 2,0835 = 1,1233.$$

Отже, α =1,1233 ± 0,0005.

Гранична відносна похибка

$$\bar{\delta}(\alpha^*) = \frac{\bar{\Delta}(\alpha^*)}{\alpha^*} = \frac{0,00048}{1,1233} \approx 0,00043, \text{ тобто } \bar{\delta}(\alpha^*) \approx 0,04\%.$$

Приклад 1.5. Потрібно обчислити з граничною відносною похибкою 1% площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ і твірна якого виміряні наближено й дорівнюють $R^* \approx 3м$, $r^* \approx 1м$, $l^* \approx 5м$. З якою точністю слід виміряти радіуси та твірну й зі скількома знаками потрібно взяти число π?

Розв'язування. Бічну поверхню S_δ зрізаного конуса обчислюємо за формулою:

$$S_\delta = \pi\left(R+r\right)l;$$

$$\ln S_\delta = \ln\pi + \ln\left(R+r\right) + \ln l;$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi}\left(\ln S_{\delta}\right)=\frac{1}{\pi}; \quad \frac{\partial}{\partial R}\left(\ln S_{\delta}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln S_{\delta}\right)=\frac{1}{R+r}; \quad \frac{\partial}{\partial l}\left(\ln S_{\delta}\right)=\frac{1}{l}.$$

Гранична відносна похибка

$$\bar{\delta}(S^*)=\frac{1}{\pi^*}\ \bar{\Delta}(\pi^*)+\frac{1}{R^*+r^*}\ \bar{\Delta}(R^*)+\frac{1}{R^*+r^*}\ \bar{\Delta}\left(r^*\right)+\frac{1}{l^*}\ \bar{\Delta}(l^*)=0{,}01.$$

За принципом рівних впливів одержуємо

$$\frac{\bar{\Delta}(\pi^*)}{\pi^*}=\frac{\bar{\Delta}(R^*)}{R^*+r^*}=\frac{\bar{\Delta}(r^*)}{R^*+r^*}=\frac{\bar{\Delta}(l^*)}{l^*}=0{,}0025.$$

Звідси отримуємо $\bar{\Delta}(\pi^*)=3{,}14\cdot 0{,}0025=0{,}00785$;

$$\bar{\Delta}(R^*)=4\cdot 0{,}0025=0{,}01; \qquad \bar{\Delta}(r^*)=0{,}01; \qquad \bar{\Delta}(l^*)=5\cdot 0{,}0025=0{,}0125.$$

Отже, число π потрібно взяти з двома знаками після коми, радіуси виміряти з точністю до 1см, а твірну – з точністю до 1,25 см.

Тема 2. Чисельні методи розв'язання рівнянь та систем рівнянь.

Приклад 2.1. Відокремити корені рівняння $\sin x - x^2 + 1 = 0$.

Розв'язування. Запишемо це рівняння у вигляді $\sin x = x^2 - 1$ і побудуємо графіки функцій $y=\sin x$ та $y = x^2 - 1$.

Ці графіки перетинаються у точках A та B, тому дане рівняння має два дійсних корені ξ_1 та ξ_2, які є абсцисами цих точок. З рисунка 1 бачимо, що

$$-1<\xi_1<-0{,}4; \qquad 1<\xi_2<1{,}5.$$

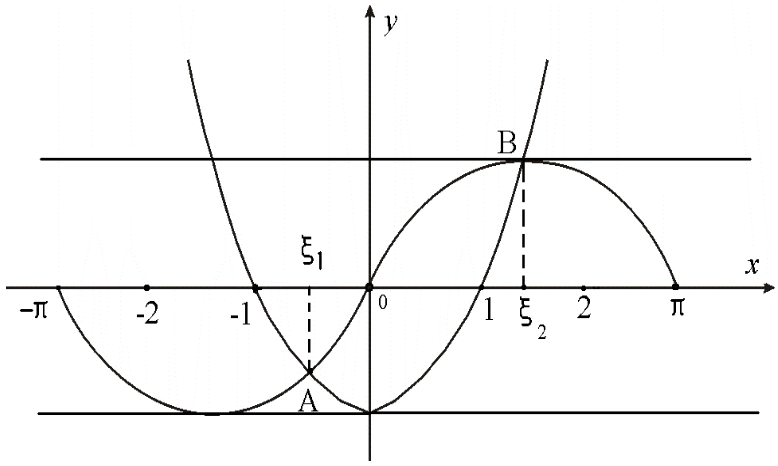


Рисунок 1

Приклад 2.2. Методом хорд знайти додатний корінь рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ з точністю до 0,01.

Розв'язування. Відокремимо корені цього рівняння. Запишемо його у вигляді $x^4 = 2x + 4$ і побудуємо графіки функцій $y = x^4$ та $y = 2x + 4$ (рис. 2).

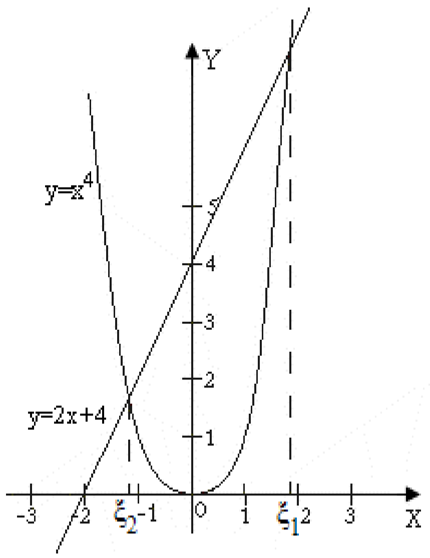


Рисунок 2

Дане рівняння має два дійсних корені ξ_1 та ξ_2. Додатний корінь ξ_1 міститься на відрізку [1,2].

Звузимо цей відрізок методом половинного поділу. Оскільки

$$f(x) = x^4 - 2x - 4 \text{ і } f(1{,}5) = -1{,}938 < 0,$$

то корінь міститься на відрізку [1,5; 2]. Оскільки $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0$, то корінь ξ_1 розміщений на відрізку [1,5; 1,7].

$$f'(x) = 4x^3 - 2; \quad f''(x) = 12x^2;$$

$$f''(x) > 0 \text{ при всіх } x.$$

Застосуємо формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \quad (n = 0,1,2,3,...):$$

$$x_1 = 1{,}5 - \frac{f(1{,}5)}{f(1{,}7) - f(1{,}5)}(1{,}7 - 1{,}5) = 1{,}634, \qquad f(1{,}634) = -0{,}139.$$

$$x_2 = 1{,}634 - \frac{f(1{,}634)}{f(1{,}7) - f(1{,}634)}(1{,}7 - 1{,}634) = 1{,}642, \qquad f(1{,}642) = -0{,}015.$$

$$x_3 = 1{,}642 - \frac{f(1{,}642)}{f(1{,}7) - f(1{,}642)}(1{,}7 - 1{,}642) = 1{,}643, \qquad f(1{,}643) = 0{,}001.$$

Оскільки $f(1{,}642) < 0$, $f(1{,}643) > 0$, то з точністю до 0,01 шуканий корінь ξ дорівнює 1,64.

Приклад 2.3. Методом дотичних знайти найбільший корінь ξ рівняння $2x - \ln x - 6 = 0$ з точністю до 0,0001.

Розв'язування. Застосувавши графічний метод відокремлення коренів рівняння, неважко встановити, що дане рівняння має два корені, розміщені відповідно на відрізках $[0;\ 1]$ та $[3;\ 4]$. Обчислимо більший з цих коренів, тобто корінь $\xi \in [3;\ 4]$.

Маємо $f(x) = 2x - \ln x - 6$; $f(3) = -1.09861$; $f(4) = 0{,}61371$;

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x}; \quad f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

На відрізку $[3;\ 4]$ $f'(x) > 0$ і $f''(x) > 0$.

Оскільки $f(4) \cdot f''(4) > 0$, то за початкове наближення візьмемо $x_0 = 4$. Формулу (2.18) запишемо у вигляді

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \text{ де } \Delta x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,1,2,3,...)$$

Результати обчислень запишемо у таблицю.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δx_n
0	4	0,61371	1,75000	– 0,35069
1	3,64931	0,00408	1,72598	– 0,00237
2	3,64694	0,00001		

Для оцінювання абсолютної похибки наближеного значення x_2 застосуємо формулу (2.13). Оскільки при $x \in [3;\,4]$ $f'(x)$ зростає і $f'(x) > 0$, то $m_1 = f'(3) = 1{,}66667 > 1{,}6$. Тому $|\xi - x_2| \le \dfrac{|f(x_2)|}{m_1} < \dfrac{0{,}00001}{1{,}6}$, звідки отримуємо

$$|\xi - x_2| < 0{,}0000063 < 0{,}00001.$$

Отже, наближене значення кореня ξ з точністю до 0,0001 $\xi^* = 3{,}6469$.

Приклад 2.4. Обчислити корені рівняння $x\ln x - 1 = 0$ методом ітерацій з точністю $\varepsilon = 0{,}00001$.

Розв'язування. Запишемо дане рівняння у вигляді $\ln x = \dfrac{1}{x}$. Побудувавши графіки функцій $y = \ln x$ та $y = \dfrac{1}{x}$, визначимо, що дане рівняння має єдиний корінь ξ, який міститься на відрізку [1,5; 2].

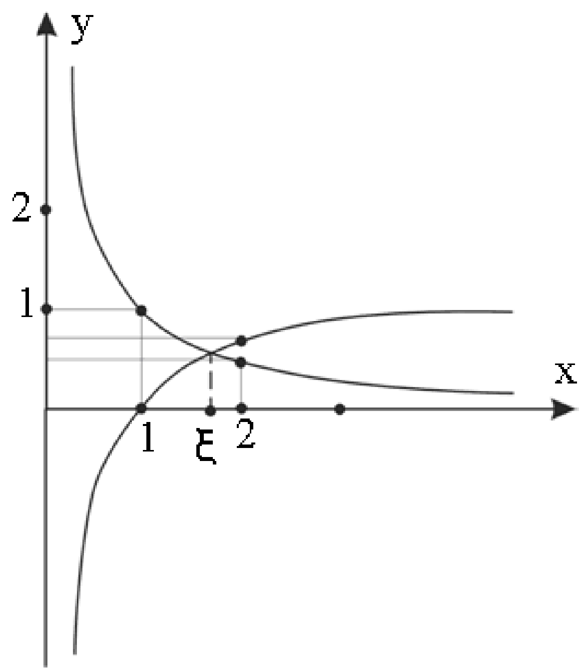


Рисунок 3

Представимо дане рівняння у вигляді $x = \varphi(x)$. Це можна зробити кількома способами:

1. Якщо записати рівняння $x\ln x - 1 = 0$ у вигляді $x = \dfrac{1}{\ln x}$, то

$$\varphi(x)=\frac{1}{\ln x},\quad \varphi'(x)=-\frac{1}{x\ln^2 x}\ \text{ і }\ \left|\varphi'(x)\right|>1\ \text{ на відрізку } [1{,}5;\,2].$$

2. Якщо дане рівняння записати у вигляді $x=e^{\frac{1}{x}}$, то $\varphi(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $\varphi'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, $\varphi'(1{,}5)=-0{,}87$, $\varphi'(2)=-0{,}41$ і $\left|\varphi'(x)\right|\le q<1$, де $q=0{,}87$ (оскільки похідна $\varphi'(x)$ неперервна на відрізку [1,5; 2]).

3. Запишемо дане рівняння у вигляді $x=x+\lambda(x\ln x-1)$.

$$\varphi(x)=x+\lambda(x\ln x-1),\quad \varphi'(x)=1+\lambda(\ln x+1).$$

Нехай $\varphi'(1{,}5)=0$. Для визначення параметра одержуємо рівняння

$$1+\lambda(\ln 1{,}5+1)=0.$$

Звідси одержуємо $\lambda=-0{,}71$. Тоді $\varphi'(2)=1-0{,}71(\ln 2+1)=-0{,}202$. Отже, $\left|\varphi'(x)\right|\le q_1<1$ на відрізку [1,5; 2], де $q_1=0{,}21$.

Із двох останніх способів вибираємо третій, оскільки $q_1<q$.

Таким чином, задане рівняння $x\ln x-1=0$ ми записали у вигляді

$$x=x-0{,}71(x\ln x-1),\ \text{ тобто }\ \varphi(x)=x-0{,}71(x\ln x-1).$$

За початкове наближення кореня ξ приймемо середину відрізка [1,5; 2], тобто $x_0=1{,}75$.

Послідовні наближення $x_1, x_2,..., x_n,...$ обчислюємо за формулою

$$x_{n+1}=x_n-0{,}71\left(x_n\ln x_n-1\right),\quad (n=0,1,2,...).$$

Отримаємо:

$$x_1=1{,}75-0{,}71(1{,}75\ln 1{,}75-1)=1{,}765,$$

$$x_2=1{,}765-0{,}71(1{,}765\ln 1{,}765-1)=1{,}7630,$$

$$x_3=1{,}7630-0{,}71(1{,}7630\ln 1{,}7630-1)=1{,}76325,$$

$$x_4=1{,}76325-0{,}71(1{,}76325\ln 1{,}76325-1)=1{,}76322.$$

Оскільки повинна виконуватися нерівність :

$$|\,x_n-x_{n-1}|\le\frac{1-0{,}21}{0{,}21}\cdot 0{,}00001,\ \text{тобто}\ |\,x_n-x_{n-1}|\le 3{,}77\cdot 10^{-5},$$

то обчислення припиняємо.

Отже, наближене значення кореня $\xi^*=1{,}76322$ з точністю до 10^{-5}.

Зауважимо, що при підстановці ξ^* у ліву частину даного рівняння $x\ln x-1=0$ отримуємо $\xi^*\ln\xi^*-1=4{,}5\cdot 10^{-6}$.

Приклад 2.5. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$7,24x_1 + 0,93x_2 - 4,65x_3 + 1,29x_4 = -0,13,$$
$$-2,61x_1 + 3,12x_2 + 4,97x_3 - 0,78x_4 = -1,56,$$
$$3,18x_1 + 0,84x_2 - 2,88x_3 = -4,13,$$
$$0,92x_1 + 1,38x_2 - 2,54x_4 = 3,69.$$

Розв'язування. Запишемо розширену матрицю цієї системи і виконаємо перетворення, які зводять розширену матрицю до трикутної форми. Усі обчислення наведено в таблиці.

7,24 - 2,61 3,18 0,92	0,93 3,12 0,84 1,38	- 4,65 4,97 - 2,88 0	1,29 - 0,78 0 - 2,54	- 0,13 - 1,56 - 4,13 3,69
1 0 0 0	0,1285 3,4554 0,4314 1,2618	- 0,6423 3,2936 - 0,8375 0,5909	0,1782 - 0,3149 - 0,5667 - 2,7039	- 0,0180 - 1,6070 - 4,0728 3,7066
	1 0 0	0,9532 - 1,2487 - 0,6118	- 0,0911 - 0,5272 - 2,5889	- 0,4651 - 3,8722 4,2935
		1 0	0,4222 - 2,3306	3,1010 6,1907
			1	- 2,6563
		1	0	4,2225
	1	0	0	- 4,7320
1	0	0	0	3,7755

Отже, $x_1 = 3,7755$, $x_2 = -4,7320$, $x_3 = 4,2225$, $x_4 = -2,6563$.

Приклад 2.6. Методом простої ітерації знайти з точністю до $\varepsilon = 0,005$ розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -1,2x_1 + 0,3x_2 - 0,4x_3 = 2,9, \\ 0,2x_1 + 2,5x_2 - 0,6x_3 = -1,5, \\ 0,3x_1 + 0,6x_2 + 1,5x_3 = 3,6. \end{cases}$$

Розв'зування. Зведемо цю систему до вигляду $X = \alpha X + \beta$, для цього перше рівняння розв'яжемо відносно x_1, друге – відносно x_2 третє – відносно x_3.

$$\begin{cases} x_1 = 0,2500x_2 - 0,3333x_3 - 2,4167, \\ x_2 = -0,0800x_1 + 0,2400x_3 - 0,6000, \\ x_3 = -0,2000x_1 - 0,4000x_2 + 2,4000. \end{cases}$$

Коефіцієнти отриманої системи задовольняють умову $\max_i \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| = g_1 < 1$.

Справді,

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{1j}\right| = 0,5833, \quad \sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{2j}\right| = 0,3200, \quad \sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{3j}\right| = 0,6000,$$

$$\max_i \sum_{j=1}^{3}\left|\alpha_{ij}\right| = g_1 = 0,6 < 1.$$

Отже, процес простої ітерації збігається; при цьому точність k–го наближення можна оцінити за формулою $\max_i\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \dfrac{g_1}{1-g_1}\max_i\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$.

За нульове наближення візьмемо, наприклад, елементи стовпця вільних членів

$$x_1^{(0)} = -2,4167; \quad x_2^{(0)} = -0,6000; \quad x_3^{(0)} = 2,4000.$$

Наступні наближення будемо обчислювати за формулами $x_i^{(0)} = \beta_i, \quad x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j^{(k)} + \beta_i \quad (i = 1, 2, ..., n; \; k = 0, 1, 2, ...)$.

Закінчимо обчислення тоді, коли буде виконана умова $\max_i\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \dfrac{1-g_1}{g_1}\varepsilon$.

$$x_1^{(1)} = 0,2500\cdot(-0,6000) - 0,3333\cdot 2,4000 - 2,4167 = -3,3666,$$

$$x_2^{(1)} = -0,0800\cdot(-2,4167) + 0,2400\cdot 2,4000 - 0,6000 = 0,1693,$$

$$x_3^{(1)} = -0,200\cdot(-2,4167) - 0,4000\cdot(-0,6000) + 2,4000 = 3,1233 \quad \text{і т.д.}$$

Отримані результати запишемо у таблицю.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	– 2,4167	– 0,6000	2,4000
1	– 3,3666	0,1693	3,1233
2	– 3,4144	0,4189	3,0056
3	– 3,3137	0,3945	2,9153
4	– 3,2897	0,3648	2,9049
5	– 3,2937	0,3604	2,9120
6	– 3,2972	0,3624	2,9153
7	– 3,2978	0,3634	2,9145

Оскільки $\frac{1-g_1}{g_1}\varepsilon = \frac{1-0,6}{0,6}\cdot 0,005 = 0,0033$, то нерівність $\max\limits_i \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \le \frac{1-g_1}{g_1}\varepsilon$ справджується при $k=7$. Тому за наближені значення невідомих потрібно взяти $x_1^{(7)}$, $x_2^{(7)}$, $x_3^{(7)}$:

$$x_1 = -3,298; \quad x_2 = 0,363; \quad x_3 = 2,914.$$

Приклад 2.7. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Зейделя.

$$12x_1 - 100x_2 + 13x_3 = -82,$$
$$28x_1 - 19x_2 - 100x_3 = -22,$$
$$100x_1 - 21x_2 + 9x_3 = 38.$$

Розв'язування. Зведемо цю систему до вигляду $X = \alpha X + \beta$, для цього рівняння даної системи запишемо в такому порядку:

$$100x_1 - 21x_2 + 9x_3 = 38,$$
$$12x_1 - 100x_2 + 13x_3 = -82,$$
$$28x_1 - 19x_2 - 100x_3 = -22.$$

Перше з цих рівнянь розв'яжемо відносно x_1, друге – відносно x_2, третє – відносно x_3. Одержимо еквівалентну систему

$$x_1 = 0,21x_2 - 0,09x_3 + 0,38,$$
$$x_2 = 0,12x_1 + 0,13x_3 + 0,82,$$
$$x_3 = 0,28x_1 - 0,19x_2 + 0,22,$$

яка задовольняє достатню умову збіжності ітераційного процесу.

За початкове (нульове) наближення візьмемо, наприклад, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$. Наступні наближення будемо обчислювати за формулами $\sum\limits_{i=1}^{n} \left| x_i - x_i^{(k)} \right| \le \frac{g_2}{1-g_2} \sum\limits_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$.

$$x_1^{(1)} = 0,38; \; x_2^{(1)} = 0,12\cdot 0,38 + 0,13\cdot 0 + 0,82 = 0,87,$$
$$x_3^{(1)} = 0,28\cdot 0,38 - 0,19\cdot 0,87 + 0,22 = 0,16,$$
$$x_1^{(2)} = 0,21\cdot 0,87 - 0,09\cdot 0,16 + 0,38 = 0,548,$$
$$x_2^{(2)} = 0,12\cdot 0,548 + 0,13\cdot 0,16 + 0,82 = 0,907,$$
$$x_3^{(2)} = 0,28\cdot 0,548 - 0,19\cdot 0,907 + 0,22 = 0,201 \quad \text{і т.д.}$$

Одержані результати запишемо у таблицю.

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0	0,38	0,548	0,5524	0,5535	0,55350
$x_2^{(k)}$	0	0,87	0,907	0,9124	0,9126	0,91263
$x_3^{(k)}$	0	0,16	0,201	0,2013	0,2016	0,20158

Оскільки четверте та п'яте наближення розв'язку досить близькі одне до одного, то можна прийняти: $x_1 = 0,5535, \quad x_2 = 0,9126, \quad x_3 = 0,2016.$

Приклад 2.8. Знайти наближено додатні корені системи рівнянь

$$x + 3\lg x - y^2 = 0,$$
$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0.$$

Розв'язування. Якщо побудувати графіки функцій $x + 3\lg x - y^2 = 0$ і $2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$, то можна визначити наближено координати їх точок перетину. Таких точок є дві: $A(1,4; -1,4)$ та $B(3,4; 2,2)$. Нас цікавлять додатні корені системи, тому точку $B(3,4; 2,2)$ приймемо за початкову точку M_0. Отже, початкове наближення додатного розв'язку даної системи $x_0 = 3,4;\ y_0 = 2,2.$

$$F(x,y) = x + 3\lg x - y^2,$$
$$\Phi(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1.$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \frac{3}{x\ln 10}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y,$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x - y - 5, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -x.$$

Обчислимо значення функцій $F(x,y),\ \Phi(x,y)$, їх похідних та визначника $I(x,y)$ в точці $M_0(3,4; 2,2)$.

$$F(3,4; 2,2) = 0,1544, \qquad \Phi(3,4; 2,2) = -0,36,$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 1,3832, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = -4,4,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 = 6,4, \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 = -3,4,$$
$$I(3,4; 2,2) = \begin{vmatrix} 1,3832 & -4,4 \\ 6,4 & -3,4 \end{vmatrix} = 23,4571.$$

Обчислимо поправки за формулами

$$\Delta x^{(0)} = -\frac{1}{I(x_0, y_0)}\left(F(x_0, y_0)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 - \Phi(x_0, y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\right),$$

$$\Delta y^{(0)} = \frac{1}{I(x_0, y_0)}\left(F(x_0, y_0)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 - \Phi(x_0, y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\right).$$

$$\Delta x^{(0)} = -\frac{1}{23,4571}(-0,1544\cdot 3,4 - 0,36\cdot 4,4) = 0,0899 \approx 0,090,$$

$$\Delta y^{(0)} = \frac{1}{23,4571}\left(0,1544\cdot 6,4 + 0,36\cdot 1,3832\right) = 0,0634 \approx 0,063.$$

Перше наближення розв'язку системи отримуємо

$$x_1 = 3,4 + 0,090 = 3,490, \quad y_1 = 2,2 + 0,063 = 2,263.$$

Щоб знайти друге наближення розв'язку, обчислимо величини $\Delta x^{(1)}$ та $\Delta y^{(1)}$.

$$F(3,490;\ 2,263) = -0,0027, \quad \Phi(3,490;\ 2,263) = 0,0123,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = 1,3733, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = -4,526,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_1 = 6,697, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_1 = -3,490,$$

$$I(3,490;\ 2,263) = 25,5178, \quad \Delta x^{(1)} = -0,0026, \quad \Delta y^{(1)} = -0,0014.$$

Отже, $x_2 = 3,490 - 0,0026 = 3,4874$, $y_2 = 2,263 - 0,0014 = 2,2616$.

Якщо повторити усі операції з одержаним другим наближенням розв'язку цієї системи, то одержимо поправки $\Delta x^{(2)}$, $\Delta y^{(2)}$, менші від 10^{-4}. Підставивши значення x_2 та y_2 у ліві частини рівнянь заданої системи отримаємо

$$F(3,4874;\ 2,2616) = 7\cdot 10^{-5}, \quad \Phi(3,4874;\ 2,2616) = -2,2\cdot 10^{-4}.$$

Зупиняючись на другому наближенні, одержимо $x = 3,4874$, $y = 2,2616$.

Приклад 2.9. Методом простої ітерації знайти корені системи рівнянь

$$x^2 + y - 4 = 0,$$

$$y - \lg x - 1 = 0$$

з точністю до 0,001.

Розв'язування. Побудуємо лінії $y = 4 - x^2$ та $y = \lg x + 1$. Корені даної системи – це координати точки перетину цих двох ліній.

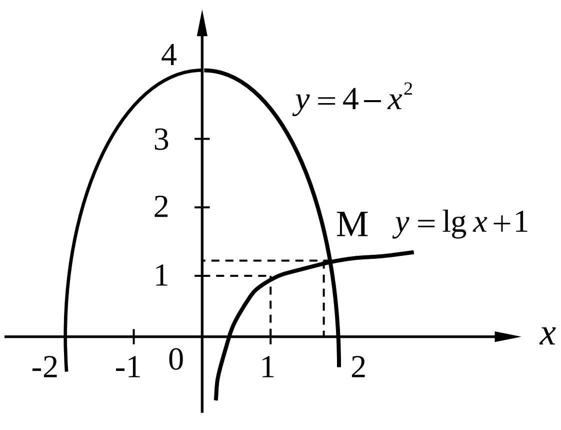


Рисунок 4

З рисунка бачимо, що за нульове наближення цих коренів можна взяти числа $x_0 = 1,75;\ \ y_0 = 1,25.$

Згідно з умовою задачі

$$F(x,y) = x^2 + y - 4,$$
$$\Phi(x,y) = y - \lg x - 1.$$

Задану систему перепишемо у вигляді

$$x = x + \alpha\, F(x,y) + \beta\,\Phi(x,y),$$
$$y = y + \gamma\, F(x,y) + \delta\,\Phi(x,y).$$

Знайдемо частинні похідні функцій $F(x,y),\ \Phi(x,y).$

$$F'_x(x,y) = 2x;\quad F'_y(x,y) = 1;\quad \Phi'_x(x,y) = -\frac{1}{x\ln 10};\quad \Phi'_y(x,y) = 1.$$

Обчислимо значення цих похідних у точці $M_0(1,75; 1,25)$ і запишемо систему лінійних рівнянь для визначення параметрів $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$

$$1 + 3,5\alpha - 0,25\beta = 0,$$
$$\alpha + \beta = 0,$$
$$3,5\gamma - 0,25\delta = 0,$$
$$1 + \gamma + \delta = 0.$$

Розв’язавши цю систему, отримаємо

$$\alpha = -0,27,\quad \beta = 0,27,\quad \gamma = -0,07,\quad \delta = -0,93\,.$$

Отже, задана система має вигляд

$$x = x - 0,27\,F(x,y) + 0,27\,\Phi(x,y),$$
$$y = y - 0,07\,F(x,y) - 0,93\,\Phi(x,y).$$

Запишемо формули для обчислення послідовних наближень розв’язку системи

$$x_{n+1} = x_n - 0,27\,F(x_n,y_n) + 0,27\,\Phi(x_n,y_n),$$
$$y_{n+1} = y_n - 0,07\,F(x_n,y_n) - 0,93\,\Phi(x_n,y_n),$$
$$(n = 0, 1, 2, ...)$$

або

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x^{(n)},\quad y_{n+1} = y_n + \Delta y^{(n)},$$

де

$$\Delta x^{(n)} = -0,27\,F(x_n,y_n) + 0,27\,\Phi(x_n,y_n),$$
$$\Delta y^{(n)} = -0,07\,F(x_n,y_n) - 0,93\,\Phi(x_n,y_n).$$

Обчислимо перше наближення $x_1,\ y_1$ за формулами

$$x_1 = f(x_0, y_0),\ y_1 = \varphi(x_0, y_0);$$
$$x_2 = f(x_1, y_1),\ y_2 = \varphi(x_1, y_1);$$
....
$$x_{n+1} = f(x_n, y_n),\ y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n);$$
....

при *n=0*

$$F(1,75;\ 1,25) = 1,75 + 1,25 - 4 = 0,31,$$
$$\Phi(1,75; 1,25) = 1,25 - \lg 1,75 - 1 = 0,007,$$
$$\Delta x^{(0)} = -0,27 \cdot 0,31 + 0,27 \cdot 0,007 = -0,08,$$
$$\Delta y^{(0)} = -0,07 \cdot 0,31 - 0,93 \cdot 0,007 = -0,03,$$
$$x_1 = x_0 + \Delta x^{(0)} = 1,75 - 0,08 = 1,67,$$
$$y_1 = y_1 + \Delta y^{(0)} = 1,25 - 0,03 = 1,22.$$

Аналогічно обчислюємо друге та третє наближення. Одержані результати запишемо у таблицю.

n	x_n	y_n	$F(x_n, y_n)$	$\Phi(x_n, y_n)$	$\Delta x^{(n)}$	$\Delta y^{(n)}$
0	1,75	1,25	0,31	0,007	- 0,08	- 0,03
1	1,67	1,22	0,009	- 0,003	- 0,003	0,002
2	1,667	1,222	0,0009	0,0001	- 0,0002	- 0,0002
3	1,6668	1,2218				

Оскільки $\left|\Delta x^{(2)}\right| < 0,0005,\quad \left|\Delta y^{(2)}\right| < 0,0005,$ то з точністю до 0,001 можна прийняти $x = 1,667,\ \ y = 1,222.$

Тема 3. Апроксимація функцій.

Приклад 3.1. Функція $y = f(x)$ задана таблицею

i	0	1	2	3	4
x_i	1,3	2,2	3,5	4,4	5,5
y_i	4,6	3,7	2,3	1,2	2,1

За допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа четвертого степеня із застосуванням схеми Ейткена знайти наближене значення цієї функції при $x = 2,56.$

Розв'язування. Обчислення проведемо за формулами

$$P_{0,1,\ldots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,\ldots,n-1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,\ldots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix},$$

і результати обчислень запишемо у вигляді таблиці.

Пояснимо, як одержати деякі значення у таблиці. Наприклад,

$$P_{2,3}(x)=\frac{1}{4,4-3,5}\begin{vmatrix}2,3 & 0,94\\ 1,2 & 1,84\end{vmatrix}=3,449;$$

$$P_{1,2,3}(x)=\frac{1}{4,4-2,2}\begin{vmatrix}3,312 & -0,36\\ 3,449 & 1,84\end{vmatrix}=3,334;$$

$$P_{0,1,2,3}(x)=\frac{1}{4,4-1,3}\begin{vmatrix}3,324 & -1,26\\ 3,334 & 1,84\end{vmatrix}=3,328;$$

$$P_{0,1,2,3,4}(x)=\frac{1}{5,5-1,3}\begin{vmatrix}3,328 & -1,26\\ 3,539 & 2,94\end{vmatrix}=3,391.$$

i	$x_i - x$	y_i	$P_{i,\,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$	$P_{0,1,2,3,4}(x)$
0	-1,26	4,6				
			3,340			
1	-0,36	3,7		3,324		
			3,312		3,328	
2	0,94	2,3		3,334		3,391
			3,449		3,539	
3	1,84	1,2		5,213		
			-0,305			
4	2,94	2,1				

Отже, $f(2,56)\approx P(2,56)=3,391$.

Приклад 3.2. Функція $y=f(x)$ задана таблицею

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
y_i	2,0617	2,7462	3,4976	4,3282	5,2515

За допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона обчислити наближені значення функції $y=f(x)$ в точках: 1) $x=0,4$; 2) $x=0,95$.

Розв'язування. Складемо таблицю скінченних різниць.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,3	2,0617				
		0,6845			
0,5	2,7462		0,0669		
		0,7514		0,0123	
0,7	3,4976		0,0792		0,0012
		0,8306		0,0135	
0,9	4,3282		0,0927		
		0,9233			
1,1	5,2515				

1. Значення $f(0,4)$ обчислимо за допомогою першого інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполяції вперед $P(x_0+th)=y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+...+\frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$. За умовою задачі $h=0,2$. Обчислимо значення $t=\frac{x-x_0}{h}$; $t=\frac{0,4-0,3}{0,2}=0,5.$ Запишемо перший інтерполяційний многочлен Ньютона, підставивши у формулу значення $y_0, \Delta y_0, ..., \Delta^4 y_0$, які у складеній таблиці підкреслені суцільною лінією.

$$P(0,3+0,2t)=2,0617+0,6845t+0,0669\,\frac{t(t-1)}{2!}+$$
$$+0,0123\,\frac{t(t-1)\,(t-2)}{3!}+0,0012\,\frac{t(t-1)\,(t-2)\,(t-3)}{4!}.$$

$$P(0,4)=2,0617+0,6845\cdot 0,5+\frac{0,0669}{2}\cdot 0,5(-0,5)+$$
$$+\frac{0,0123}{6}\cdot 0,5\,(-0,5)\,(-1,5)+\frac{0,0012}{24}\cdot 0,5\cdot(-0,5)\,(-1,5)\,(-2,5)=$$
$$=2,0617+0,34225-0,00836+0,00077-0,00005=2,41311\approx 2,4131.$$
$$f(0,4)\approx P(0,4)=2,4131.$$

2. Значення $f(0,95)$ обчислимо за допомогою другого інтерполяційного многочлена Нютона для інтерполяції назад.

$$t=\frac{x-x_n}{h}=\frac{0,95-1,1}{0,2}=-0,75.$$

Запишемо цей многочлен, підставивши у формулу $P(x_n+th)=y_n+\frac{t}{1!}\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+...+\frac{t(t+1)\,...\,(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$ значення $y_4, \Delta y_3, \Delta^2 y_2, \Delta^3 y_1, \Delta^4 y_0$, які в таблиці підкреслені пунктирною лінією.

$$P(1,1+0,2t)=5,2515+0,9233\cdot t+\frac{0,0927}{2!}\,t(t+1)+$$
$$+\frac{0,0135}{3!}\,t(t+1)\,(t+2)+\frac{0,0012}{4!}\,t(t+1)\,(t+2)\,(t+3).$$

Підставивши значення $t=-0,75$, одержимо $P(0,95)=4,5498.$

Отже, $f(0,95)\approx P(0,95)=4,5498$.

Приклад 3.3. Знайти наближене значення функції $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ у точці $x=2,35$ за допомогою інтерполяційного многочлена четвертого степеня з оптимально вибраними вузлами інтерполяції на відрізку $[2,\ 4]$ із використанням поділених різниць. Оцінити похибку одержаного значення.

Розв'язування. Обчислимо вузли інтерполяції за формулою $x_i=\dfrac{1}{2}\left((b-a)\cos\dfrac{(2i+1)\,\pi}{2n+2}+b+a\right),\quad (i=0,1,2,...,\,n)$. Оскільки за умовою задачі $n=4,\ a=2,\ b=4,$ то ця формула матиме вигляд

$$x_i=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{(2i+1)\pi}{10}+6\right);\quad (i=0,1,2,3,4).$$

$$x_0=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\pi}{10}+6\right)=3,951057;\quad x_1=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{3\pi}{10}+6\right)=3,587786;$$

$$x_2=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\pi}{2}+6\right)=3;\quad x_3=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{7\pi}{10}+6\right)=2,412216;$$

$$x_4=\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{9\pi}{10}+6\right)=2,048944.$$

Обчислимо значення функції $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ у цих вузлах.

$$y_0=0,356833;\quad y_1=0,383601;\quad y_2=0,438691;$$
$$y_3=0,516640;\quad y_4=0,583919.$$

Знайдемо поділені різниці та запишемо їх у таблицю.

x	y	Поділені різниці			
		1-го порядку	2-го порядку	3-го порядку	4-го порядку
3,951057	<u>0,356833</u>				
		<u>-0,073686</u>			
3,587786	0,383601		<u>0,021070</u>		
		-0,093725		<u>-0,007806</u>	
3	0,438691		0,033082		<u>0,003485</u>
		-0,132615		-0,014434	
2,412216	0,516640		0,055294		
		-0,185203			
2,048944	0,583919				

Запишемо інтерполяційний многочлен

$$P(x)=y_0+f(x_0;\,x_1)\,(x-x_0)+f(x_0;\,x_1;\,x_2)\,(x-x_0)\,(x-x_1)+...+$$
$$+f(x_0;\,x_1;\,...;\,x_n)\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,...\,(x-x_{n-1}).$$

для даної функції при $n=4$:

$$P(x) = 0,356833 - 0,073686\,(x - 3,951057) +$$
$$+ 0,021070\,(x - 3,951057)\,(x - 3,587786) -$$
$$- 0,007806\,(x - 3,951057)\,(x - 3,587786)\,(x - 3) +$$
$$+ 0,003485\,(x - 3,951057)\,(x - 3,587786)\,(x - 3)\,(x - 2,412216).$$

Підставивши $x = 2,35$, одержимо:

$$P(2,35) = 0,356833 + 0,117975 + 0,041756 + 0,010055 + 0,000279 = 0,526898.$$

Оцінимо похибку інтерполяції за формулою (4.24). Знайдемо $f^{(5)}(x)$ та M_5.

$$f'(x) = -\frac{3}{4} x^{-\frac{7}{4}}, \quad f''(x) = \frac{26}{16} x^{-\frac{11}{4}}, \ \ldots, \quad f^{(5)}(x) = -64,29199\, x^{-\frac{23}{4}}.$$

$$M_5 = \max_{2 \le x \le 4} \left| f^{(5)}(x) \right| = 64,3 \cdot 2^{-\frac{23}{4}} = 1,19472.$$

Отже,

абсолютна похибка $\left| R_4 \right| \le \dfrac{M_5}{5!} \dfrac{2^5}{2^9} = \dfrac{M_5}{5! \cdot 2^4} = 0,00063;$

відносна похибка $\delta = 0,0012.$

Приклад 3.4. Функція $y = f(x)$ задана таблицею

i	0	1	2	3	4
x_i	0,25	1,25	2,25	3,25	4,25
y_i	-1,3546	0,5428	1,6532	1,1722	0,7815

Побудувати на відрізку $\left[0,25;\, 4,25\right]$ інтерполяційний сплайн третього степеня для функції $y = f(x)$ і знайти за його допомогою наближене значення функції при $x = 1,76$.

Розв’язування. Обчислимо нахили інтерполяційного сплайна за формулами

$$m_i = \frac{1}{2h}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, N-1),$$

$$m_0 = \frac{1}{2h}\left(4y_1 - y_2 - 3y_0\right), \quad m_N = \frac{1}{2h}\left(3y_N + y_{N-2} - 4y_{N-1}\right).$$

За умовою задачі $h = 1$.

$$m_0 = \frac{1}{2h}\left(4y_1 - y_2 - 3y_0\right) = 0,5\left(4\cdot 0,5428 - 1,6532 + 3\cdot 1,3546\right) = 2,2909,$$

$$m_1 = \frac{1}{2h}\left(y_2 - y_0\right) = 0,5\left(1,6532 + 1,3546\right) = 1,5039,$$

$$m_2 = \frac{1}{2h}\left(y_3 - y_1\right) = 0,5\left(1,1722 - 0,5428\right) = 0,3147,$$

$$m_3 = \frac{1}{2h}\left(y_4 - y_2\right) = 0,5\left(0,7815 - 1,1632\right) = -0,4358,$$

$$m_4 = \frac{1}{2h}\left(3y_4 + y_2 - 4y_3\right) = 0,5\left(3\cdot 0,7815 + 1,6532 - 4\cdot 1,1722\right) = -0,3456.$$

За формулою

$$S_3(x) = \frac{1}{h^3}\left(x_{i+1} - x\right)^2\left(2\left(x - x_i\right) + h\right)y_i + \frac{1}{h^3}\left(x - x_i\right)^2\left(2\left(x_{i+1} - x\right) + h\right)y_{i+1} +$$
$$+ \frac{1}{h^2}\left(x_{i+1} - x\right)^2\left(x - x_i\right)m_i + \frac{1}{h^2}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})\,m_{i+1}.$$

побудуємо інтерполяційний кубічний сплайн на кожному частковому відрізку.

1. $x \in \left[0,25;\, 1,25\right]$.

$$S_3(x) = \left(1,25 - x\right)^2\left(2\left(x - 0,25\right) + 1\right)\cdot\left(-1,3546\right) +$$
$$+\left(x - 0,25\right)^2\left(2\left(1,25 - x\right) + 1\right)\cdot 0,5428 + \left(1,25 - x\right)^2\left(x - 0,25\right)\cdot 2,2909 +$$
$$+\left(x - 0,25\right)^2\left(x - 1,25\right)\cdot 1,5039 = -0,3935x^2 + 2,4876x - 1,9519.$$

2. $x \in \left[1,25;\, 2,25\right]$.

$$S_3(x) = \left(2,25 - x\right)^2\left(2\left(x - 1,25\right) + 1\right)0,5428 + \left(x - 1,25\right)^2\left(2\left(2,25 - x\right) + 1\right)\cdot 1,6532 +$$
$$+\left(2,25 - x\right)^2\left(x - 1,25\right)\cdot 1,5039 + \left(x - 1,25\right)^2\left(x - 2,25\right)\cdot 0,3147 =$$
$$= -0,4022x^3 + 1,5168x^2 - 0,4030x - 0,5381.$$

Оскільки значення $x = 1,76$ міститься на частковому відрізку $\left[1,25;\, 2,25\right]$, то за допомогою одержаного на цьому відрізку сплайна обчислимо $f(1,76)$:

$$f(1,76) \approx S_3(1,76) = -0,4022\cdot 1,76^3 + 1,5168\cdot 1,76^2 - 0,4030\cdot 1,76 - 0,5381 = 1,2583.$$

Отже, $f(1,76) \approx 1,2583$.

Аналогічно, як на двох перших часткових відрізках, будуємо інтерполяційний кубічний сплайн на часткових відрізках $\left[2,25;\, 3,25\right]$ та $\left[3,25;\, 4,25\right]$.

Приклад 3.5. Функція $y = f(x)$ задана таблицею з кроком $h = 0,2$.

x_i	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
y_i	0,3894	0,4794	0,5646	0,6442	0,7174	0,7833

За допомогою інтерполяційних формул обчислити:
а) $y'(1,68)$; б) $y'(0,8)$; в) $y''(0,95)$; г) $y''(1,6)$.

Розв'язування. Складемо таблицю скінченних різниць.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0,8	0,3894					
		0,0900				
1,0	0,4794		- 0,0048			
		0,0852		- 0,0008		
1,2	0,5646		- 0,0056		0	
		0,0796		- 0,0008		- 0,0001
1,4	0,6442		- 0,0064		- 0,0001	
		0,0732		- 0,0009		
1,6	0,7174		- 0,0073			
		0,0659				
1,8	0,7833					

а) Для обчислення $y'(1,68)$ використаємо формулу

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{4t^3+18t^2+22t+6}{4!}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{5t^4+40t^3+105t^2+100t+24}{5!}\Delta^5 y_{n-5} + \ldots \right),$$

за умови $t = \dfrac{1,68-1,8}{0,2} = -0,6.$

$$y'(1,68) \approx \frac{1}{0,2}\left(0,0659 - 0,1\,(-0,0073) + \frac{1}{6}\,(3\cdot 0,36 - 3,6 + 2)\,(-0,0009) + \right.$$

$$+\frac{1}{24}\,(-4\cdot 0,216 + 18\cdot 0,36 - 13,2 + 6)\,(-0,0001) + \frac{1}{120}\,(5\cdot 0,1296 + 40(-0,216) +$$

$$\left. +105\cdot 0,36 - 60 + 24)\,(-0,0001)\right) = 0,3367.$$

б) За формулою

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \ldots\right),$$

обчислимо $y'(0,8)$

$$y'(0,8) \approx \frac{1}{0,2}\left(0,0900 - \frac{1}{2}(-0,0048) + \frac{1}{3}(-0,0008) + \frac{1}{5}(-0,0001)\right) = 0,4608.$$

в) Для обчислення $y''(0,95)$ застосуємо формулу

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (t-1)\,\Delta^3 y_0 + \frac{12t^2 - 36t + 22}{4!}\,\Delta^4 y_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{20t^3 - 120t^2 + 210t - 100}{5!}\,\Delta^5 y_0 + \ldots \right). \; \left(t = \frac{0,95 - 0,8}{0,2} = 0,75 \right)$$

$$y''(0,95) \approx \frac{1}{0,04}\left(-0,0048 - 0,25\,(-0,0008) + \frac{1}{120}\,(20 \cdot 0,75^3 - 120 \cdot 0,75^2 + \right.$$

$$\left. +210 \cdot 0,75 - 100)(-0,0001) \right) = -0,1150.$$

г) $y''(1,6)$ обчислимо за формулою

$$y''(x_n) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12}\,\Delta^4 y_{n-4} + \frac{5}{6}\,\Delta^5 y_{n-5} + \ldots \right).$$

За умови $x_n = 1,6$, отримаємо $y''(1,6) \approx \dfrac{1}{0,04}\left(-0,0064 - 0,0008 \right) = -0,1800.$

Приклад 3.6. Функція двох змінних $u = f(x,\, y)$ задана таблично. Обчислити частинні похідні першого та другого порядків цієї функції в точці $A(1,1;\, 0,8)$ за спрощеною та розширеною схемами.

y \ x	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7
0,4	1,221	1,377	1,553	1,751	1,974
0,6	1,350	1,616	1,935	2,316	2,773
0,8	1,492	1,896	2,411	3,065	3,896
1,0	1,649	2,226	3,004	4,055	5,474
1,2	1,822	2,612	3,743	5,366	7,691

Розв'язування. За умовою задачі $h_1 = 0,3$; $h_2 = 0,2$; $i = 0,1,2,3,4$; $j = 0,1,2,3,4$. Частинні похідні потрібно обчислити у вузлі $A(x_2; y_2)$, де $x_2 = 1,1$; $y_2 = 0,8$.

1. Застосуємо формули $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \dfrac{1}{2h_1}\left(u_{i+1,\,j} - u_{i-1,\,j}\right),$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_2}\left(u_{i,\,j+1} - u_{i,\,j-1}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{h_1^2}\left(u_{i+1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,\,j}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{h_2^2}\left(u_{i,\,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,\,j-1}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_1h_2}\left(u_{i+1,\,j+1} - u_{\,i+1,\,j-1} - u_{i-1,\,j+1} + u_{\,i-1,\,j-1}\right)$$

(спрощена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{22} = \frac{1}{0,6}(3,065 - 1,896) = 1,948,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{22} = \frac{1}{0,4}(3,004 - 1,935) = 2,672,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{22} = \frac{1}{0,09}(3,065 - 2\cdot 2,411 + 1,186) = 1,544,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{22} = \frac{1}{0,04}(3,004 - 2\cdot 2,411 + 1,935) = 2,925,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{22} = \frac{1}{4\cdot 0,06}(4,055 - 2,316 - 2,226 + 1,616) = 4,704.$$

2. Застосуємо формули

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_1}\left(u_{i+1,\,j+1} - u_{i-1,\,j+1} + u_{i+1,\,j-1} - u_{i-1,\,j+1}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_2}\left(u_{i+1,\,j+1} - u_{i+1,\,j-1} + u_{i-1,\,j+1} - u_{i-1,\,j-1}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{12h_1^2}\left(-u_{i+2,\,j} + 16u_{i+1,\,j} - 30u_{ij} + 16u_{i-1,\,j} - u_{i-2,\,j}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{12h_2^2}\left(-u_{i,\,j+2} + 16u_{i,\,j+1} - 30u_{ij} + 16u_{i,\,j-1} - u_{i,\,j-2}\right)$$

(розширена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{22} = \frac{1}{1,2}(4,055 - 2,226 + 2,316 - 1,616) = 2,108,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{22} = \frac{1}{0,8}(4,055 - 2,316 + 2,226 - 1,616) = 2,936,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{22} = \frac{1}{12\cdot 0,09}(-3,896 + 16\cdot 3,065 - 30\cdot 2,411 + 16\cdot 1,896 - 1,492) = 1,535,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{22} = \frac{1}{12\cdot 0,04}(-3,743 + 16\cdot 3,004 - 30\cdot 2,411 + 16\cdot 1,935 - 1,553) = 2,913.$$

Приклад 3.7. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{0.5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x}\,dx$, взявши $n = 20$:

а) за формулами прямокутників;

б) за формулою трапецій;
в) за формулою середніх;
г) за уточненою формулою середніх і трапецій;
д) за формулою Сімпсона.

Розв'язування. Складемо таблицю значень функції $f(x)=\dfrac{e^{0,1x}}{x}$ для $n=20$ та $h=\dfrac{1,5-0,5}{20}=0,05.$

Таблиця

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,50	2,10254	7	0,85	1,28085	14	1,20	0,93958
1	0,55	1,92098	8	0,90	1,21574	15	1,25	0,90652
2	0,60	1,76973	9	0,95	1,15754	16	1,30	0,87602
3	0,65	1,64178	10	1,00	1,10517	17	1,35	0,84781
4	0,70	1,53216	11	1,05	1,05782	18	1,40	0,82162
5	0,75	1,43717	12	1,10	1,01480	19	1,45	0,79727
6	0,80	1,35411	13	1,15	0,97554	20	1,50	0,77455

а). Застосуємо формули прямокутників

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(y_0+y_1+...+y_{n-1}\right),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(y_1+y_2+...+y_n\right).$$

$$I_{пр}^{(1)}=h\sum_{i=0}^{19}y_i=0,05\cdot 24,75475=1,23774,$$

$$I_{пр}^{(2)}=h\sum_{i=1}^{20}y_i=0,05\cdot 23,42676=1,17134.$$

б). Використовуючи формулу трапецій $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)$, одержимо:

$$I_{тр}=h\left(\frac{1}{2}(y_0+y_{20})+\sum_{i=1}^{19}y_i\right)=0,05\cdot 24,09076=1,20454.$$

в). Щоб застосувати формулу середніх $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx h\left(f(x_{1/2})+f(x_{3/2})+...+f(x_{n-1/2})\right)$, складемо таблицю значень даної функції в точках $x_{i-1}+\dfrac{h}{2}$ $(i=1,2,...,n)$.

Таблиця

i	$x_{i-1/2}$	$f\left(x_{i-1/2}\right)$	i	$x_{i-1/2}$	$f\left(x_{i-1/2}\right)$	i	$x_{i-1/2}$	$f\left(x_{i-1/2}\right)$
1	0,525	2,00743	8	0,875	1,24736	15	1,225	0,92271
2	0,575	1,84206	9	0,925	1,18585	16	1,275	0,89097
3	0,625	1,70319	10	0,975	1,13068	17	1,325	0,86164
4	0,675	1,58493	11	1,025	1,08091	18	1,375	0,83447
5	0,725	1,48302	12	1,075	1,03581	19	1,425	0,80923
6	0,775	1,39430	13	1,125	0,99473	20	1,475	0,78572
7	0,825	1,31636	14	1,175	0,95718			

Застосувавши формулу середніх, одержимо

$$I_{пр.с} = h\sum_{i=1}^{20} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) = 0,05\cdot 24,06855 = 1,20343.$$

г). За уточненою формулою $I_{уточн} = \frac{1}{3}\left(2I_{пр.с} + I_{тр}\right)$.

$$I_{уточн} = \frac{1}{3}\left(2I_{пр.с} + I_{тр}\right) = \frac{1}{3}\left(2\cdot 1,20343 + 1,20454\right) = 1,20380 .$$

д). Застосувавши формулу Сімпсона і таблицю 1 значень функції $f(x)$, одержимо

$$I_{сімп} = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{20} + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{19}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{18}\right)\right) =$$

$$= \frac{0,5}{3}\left(2,87709 + 4\cdot 12,02328 + 2\cdot 10,62893\right) = 1,20380.$$

Обчислимо абсолютну похибку формули Сімпсона за допомогою правила Рунге. Ми знайшли наближене значення даного інтеграла за формулою Сімпсона з кроком $h = 0,05$

$$I_h = 1,20380.$$

Обчислимо також наближене значення цього інтеграла з кроком $2h = 0,10.$

$$I_{2h} = \frac{0,10}{3}\left(2,87709 + 4\cdot 5,99021 + 2\cdot 4,63872\right) = 1,20385.$$

Отже, $\left|R_{20}\right| \approx \frac{\left|1,20380 - 1,20385\right|}{15} \approx 3,33\cdot 10^{-6}$, тобто $\left|R_{20}\right| < 5\cdot 10^{-6}$.

Таким чином, обчислюючи наближено даний інтеграл за формулою Сімпсона, ми одержали, що $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x}\,dx \approx 1,20380.$ В отриманому результаті всі знаки вірні.

Приклад 3.8. Обчислити наближене значення інтеграла $\int_1^3 \left(e^{-x}+1\right)^2 dx$ методом Монте-Карло, взявши $n=30$. Знайти точне значення цього інтеграла і обчислити абсолютну та відносну похибки одержаного наближеного значення.

Розв'язування. З таблиці випадкових чисел візьмемо 30 чисел $t_1, t_2, ..., t_{30}$, які містяться на відрізку $[0,1]$. Знайдемо відповідні значення x_i за формулою $x_i = 1+2t_i$, $(i=1, 2, ..., 30)$.

Обчислимо значення функції $f\left(x_i\right)$ $(i=1,2,...,30)$ і застосуємо формулу $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)$.

i	t_i	x_i	$f\left(x_i\right)$	i	t_i	x_i	$f\left(x_i\right)$
1	0,6987	2,3974	1,19018	16	0,2059	1,4118	1,54680
2	0,0387	1,0774	1,79689	17	0,5626	2,1252	1,25308
3	0,5581	2,1162	1,25549	18	0,8516	2,7032	1,13847
4	0,6531	2,3062	1,20921	19	0,6476	2,2952	1,21163
5	0,5735	2,1470	1,24732	20	0,5685	2,1270	1,25260
6	0,9333	2,8666	1,11702	21	0,1313	1,2626	1,64588
7	0,1998	1,3996	1,55425	22	0,3897	1,7794	1,36595
8	0,1837	1,3674	1,57444	23	0,4380	1,8760	1,32987
9	0,4216	1,8432	1,34168	24	0,1618	1,3236	1,60320
10	0,3384	1,6768	1,40890	25	0,4858	1,9716	1,29785
11	0,4247	1,8494	1,33942	26	0,1017	1,2034	1,69045
12	0,2910	1,5820	1,45338	27	0,0858	1,1716	1,71576
13	0,4731	1,9462	1,30603	28	0,8396	2,6792	1,14194
14	0,6454	2,2908	1,21261	29	0,7813	2,5626	1,16015
15	0,5146	2,0292	1,28016	30	0,2712	1,5424	1,47347

$$\int_1^3 \left(e^{-x}+1\right)^2 dx \approx \frac{2}{30}\sum_{i=1}^{30} f\left(x_i\right) = \frac{1}{15}\cdot 41{,}11408 = 2{,}74094 \approx 2{,}7409.$$

Обчислимо цей інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_1^3 \left(e^{-x}+1\right)^2 dx = \int_1^3 \left(e^{-2x}+2e^{-x}+1\right)dx = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}-2e^{-x}+x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-6}-2e^{-3}+3+\frac{1}{2}e^{-2}+2e^{-1}-1 \approx 2{,}7026.$$

Абсолютна похибка $\Delta \approx 0{,}038$; відносна похибка $\delta \approx 0{,}014$, тобто $\delta \approx 1{,}4\%$.

Приклад 3.9. Обчислити за методом Ейлера наближене значення $y(1,4)$ розв'язку задачі Коші $y' + \frac{y}{x} = e^x$, $y(1) = 1$, взявши крок $h = 0,1$. Знайти точний розв'язок цієї задачі та обчислити похибку одержаного наближеного значення.

Розв'язування. Відрізок $[1; 1,4]$ поділимо на 4 рівних часткових відрізки. Тоді довжина кожного часткового відрізка дорівнює 0,1. Обчислимо наближені значення розв'язку в точках $x_1 = 1,1;\ x_2 = 1,2;\ x_3 = 1,3;\ x_4 = 1,4.$

Задане рівняння запишемо у вигляді $y' = e^x - \frac{y}{x}$. Отже, $f(x, y) = e^x - \frac{y}{x}$. Значення розв'язку будемо обчислювати за формулою $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (i = 0, 1, 2, ..., n-1)$. Результати обчислень запишемо у таблицю.

i	x_i	y_i	$h\,f(x_i, y_i)$	i	x_i	y_i	$h\,f(x_i, y_i)$
0	1	1	0,1718	3	1,3	1,5839	0,2451
1	1,1	1,1718	0,1939	4	1,4	1,8290	
2	1,2	1,3657	0,2182				

Таким чином, $y(1,4) \approx 1,8290.$

Знайдемо точний розв'язок даної задачі Коші: $y' + \frac{y}{x} = e^x$, $y(1) = 1.$

Рівняння $y' + \frac{y}{x} = e^x$ є лінійним рівнянням першого порядку. Його розв'язок шукатимемо у вигляді добутку двох функцій $y = u \cdot v.$ $y' = u'v + uv'$. Підставивши ці вирази у рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = e^x; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = e^x.$$

Нехай $v' + \frac{v}{x} = 0.$ Тоді одержимо: $u'v = e^x.$

Розв'яжемо ці два рівняння.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = -\ln|x|.$$

Отже, $v = \frac{1}{x}$. Рівняння $u'v = e^x$ матиме вигляд $u'\frac{1}{x} = e^x$. Звідси $du = xe^x\,dx, \quad u = \int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C.$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = e^x$ має вигляд

$$y = \frac{1}{x}\left(xe^x - e^x + C\right).$$

Знайдемо частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову $y'(1)=1$.

$$1=1(e-e+C).$$

Отже, $C=1$ і розв'язок заданої задачі Коші

$$y=\frac{1}{x}\left(xe^{x}-e^{x}+1\right).$$

Обчислимо за цією формулою значення $y(1,4)$, залишаючи чотири знаки після коми:

$$y\,(1,4)=1,8729.$$

Абсолютна похибка наближеного значення $y(1,4)$, обчисленого методом Ейлера, $\Delta=4,39\cdot 10^{-2}<5\cdot 10^{-2}$; відносна похибка $\delta\approx 2,34\cdot 10^{-2}$, тобто $\delta\approx 2,34\%$.

Приклад 3.10. Скласти таблицю значень розв'язку рівняння $y'=y-\dfrac{2x}{y}$, який задовольняє початкову умову $y(0)=1$, на відрізку $\left[0;\,0,6\right]$ з кроком $h=0,2$, застосувавши метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

Розв'язування. За умовою задачі $x_0=0,\ y_0=1,\ f\,(x,y)=y-\dfrac{2x}{y}.$ Потрібно знайти значення розв'язку в точках $x_1=0,2;\ x_2=0,4;\ x_3=0,6.$ Обчислимо значення розв'язку y_1 в точці x_1. За формулами

$$y_{i+1}=y_i+\Delta\,y_i\quad (i=0,1,\,2,\,...,\,n-1),\ \ \Delta\,y_i=\frac{1}{6}\left(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}\right)$$

одержимо

$$y_1=y_0+\Delta\,y_0,\ \text{ де }\ \Delta y_0=\frac{1}{6}\ \left(k_1^{(0)}+2\ \ k_2^{(0)}+2\ \ k_3^{(0)}+k_4^{(0)}\right).$$

При цьому числа $k_j^{(0)}$ $(j=1,...,4)$ знайдемо за формулами

$$k_1^{(i)}=h\,f\,(x_i,\,y_i),$$

$$k_2^{(i)}=h\,f\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)}=h\,f\left(x_i+\frac{h}{2},\ y_i+\frac{k_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_4^{(i)}=h\,f\left(x_i+h,\ y_i+k_3^{(i)}\right).$$

Таким чином,

$$k_1^{(0)} = h\, f\,(x_0, y_0) = 0,2 \cdot f\,(0,1) = 0,2,$$

$$k_2^{(0)} = h\;\; f\left(x_0 + \frac{h}{2},\; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,2\; f\,(0,1;\, 1,1) = 0,18364,$$

$$k_3^{(0)} = h\, f\left(x_0 + \frac{h}{2},\; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,2\; f\,(0,1;1,09182) = 0,18173,$$

$$k_4^{(0)} = h\, f\left(x_0 + h,\; y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0,2\; f\,(0,2;\, 1,18173) = 0,16865,$$

$$\Delta\, y_0 = \frac{1}{6}\left(0,2 + 2 \cdot 0,18364 + 2 \cdot 0,18173 + 0,16865\right) = 0,18323.$$

Отже, $y_1 = 1 + 0,18323 = 1,18323.$

Значення y_2 та y_3 знаходимо аналогічно. Процес обчислень проводимо за схемою

i	j	x	y	$f\,(x, y)$	$k_j = h\, f\,(x, y)$	$\Delta\, y$
0	1 2 3 4	<u>0</u> 0,1 0,1 0,2	<u>1</u> 1,1 1,09182 1,18173	1 0,91818 0,90864 0,84324	0,2 0,18364 0,18173 0,16865	0,18323
1	1 2 3 4	<u>0,2</u> 0,3 0,3 0,4	<u>1,18323</u> 1,26775 1,26268 1,34073	0,84517 0,79447 0,78750 0,74404	0,16903 0,15889 0,15750 0,14881	0,15844
2	1 2 3 4	<u>0,4</u> 0,5 0,5 0,6	<u>1,34167</u> 1,41621 1,41268 1,48263	0,74540 0,71010 0,70481 0,67326	0,14908 0,14202 0,14096 0,13465	0,14162
3		<u>0,6</u>	<u>1,48329</u>			

Знайдені значення y_1, y_2, y_3 розв'язку даної задачі Коші в наведеній таблиці підкреслено. Зауважимо, що точний розв'язок цієї задачі виражається формулою $y = \sqrt{2x+1}$. Якщо обчислити значення розв'язку $y(0,2)$, $y(0,4)$, $y(0,6)$ за цією формулою, то отримаємо: $y(0,2) = 1,18322;\; y(0,4) = 1,34164;$ $y(0,6) = 1,48324.$ Таким чином, числа $y_1,\, y_2,\, y_3$, обчислені за методом Рунге-Кутта, мають чотири вірних знаки після коми.

Тема 4. Задачі оптимізації.

Приклад 4.1. Визначити найменше значення функції $f(x)=e^{-x}-2\cos x$ на відрізку $[0,1]$. Точку ξ, в якій дана функція приймає це найменше значення, знайти з абсолютною похибкою $\varepsilon \le 0,01$.

Розв'язування. Перевіримо, чи приймає дана функція своє найменше значення на відрізку $[0,1]$ в деякій внутрішній точці ξ цього відрізка. Знайдемо критичні точки функції $f(x)$, які містяться на відрізку $[0,1]$. $f'(x)=-e^{-x}+2\sin x.$ Оскільки $f'(0)=-1,$ $f'(1)=1,315,$ то існує принаймні одна така точка ξ, $0<\xi<1$, що $f'(\xi)=0$.

Можна переконатися, наприклад, графічним способом, що така точка ξ на відрізку $[0,1]$ єдина. Оскільки $f'(x)<0$ при $x<\xi$ і $f'(x)>0$ при $x>\xi$, то в точці $x=\xi$ функція $f(x)$ має мінімум. Отже, функція $f(x)$ приймає в точці $x=\xi$ своє найменше значення на відрізку $[0,1]$.

Позначимо $\gamma_k = f(c_k) - f(d_k)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$. За умовою задачі $a_0=a=0,$ $b_0=b=1$. Застосовуючи формули $c=0,618a+0,382b.$, $d=0,382\,a+0,618\,b.$, отримаємо $c=c_0=0,382$, $d=d_0=0,618$. Обчислюємо $f(c_0)=-1,17335,$ $f(d_0)=-1,09106$. Оскільки $f(c_0)<f(d_0)$, тобто $\gamma_0<0$, то $\xi\in[0;\,0,618]$ Згідно з формулою $a_1=a;$ $b_1=d;$ $d_1=c;$ $c_1=0,618a_1+0,382b_1.$ приймаємо $a_1=0,$ $b_1=0,618,$ $d_1=0,382$ і обчислюємо $c_1=0,618a_1+0,382b_1=$ $=0,236$. Обчислюємо $f(c_1)=-1,15478$. Оскільки $f(c_1)>f(d_1)$, тобто $\gamma_1>0$, то $\xi\in[0,236;\,0,618].$ Згідно з формулою $a_{k+1}=c_k,$ $b_{k+1}=b_k$, $c_{k+1}=d_k$ приймаємо $a_2=0,236,$ $b_2=0,618,$ $c_2=0,382$ і обчислюємо $d_2=0,382a_2+0,618b_2=0,472$. Подальші обчислення проводимо аналогічно. Процес мінімізації закінчимо, як тільки справдиться нерівність $h_k=b_k-a_k<0,01$.

Результати обчислень доцільно записати у таблицю.

k	a_k	b_k	c_k	d_k	$f(c_k)$	$f(d_k)$	Знак γ_k	h_k
0	0	1	0,382	0,618	-0,17335	-1,09106	–	1
1	0	0,618	0,236	0,382	-1,15478	-1,17335	+	0,618
2	0,236	0,618	0,382	0,472	-1,17335	-1,15757	–	0,382
3	0,236	0,472	0,326	0,382	-1,17286	-1,17335	+	0,236
4	0,326	0,472	0,382	0,416	-1,17335	-1,16975	–	0,146
5	0,326	0,416	0,360	0,382	-1,17412	-1,17335	–	0,090

6	0,236	0,382	0,347	0,360	-1,17399	-1,17412	+	0,056
7	0,347	0,382	0,360	0,369	-1,17412	-1,17395	–	0,035
8	0,347	0,369	0,355	0,360	-1,174120	-1,174117	–	0,022
9	0,347	0,360	0,352	0,355	-1,174090	-1,174120	+	0,013
10	0,352	0,360						0,008

Оскільки $h_{10} = 0,008 < 0,01$, то процес мінімізації закінчено. За наближене значення ξ приймаємо $\xi^* = \dfrac{0,352+0,360}{2} = 0,356;$ $\quad f_{\min} = f\left(0,356\right) = -1,174124$.

Приклад 4.2. Методом найшвидшого спуску обчислити найменше значення функції $f(\vec{x}) = \dfrac{1}{2}(A\vec{x},\vec{x}) - (\vec{b},\vec{x})$ з точністю $\varepsilon = 0,02$, взявши за початкове наближення вектор $\vec{x}^{(0)}$, якщо A – симетрична додатно визначена матриця третього порядку, $(\vec{x},\vec{y})$ – скалярний добуток векторів у тривимірному просторі:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. За формулою $grad\ f(\vec{x}^{(k)}) = A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}$ при $k = 0$ обчислимо $grad\ f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$:

$$grad\ f(\vec{x}^{(0)}) = A\vec{x}^{(0)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,8+1,3-1,2 \\ 0,6+5,2+2,4 \\ -0,6+2,6+7,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ 8,2 \\ 9,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

Формулу $\alpha^{(k)} = \dfrac{(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}, A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}{(A(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}), A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}$ запишемо у вигляді $\alpha^{(k)} = \dfrac{\gamma^{(k)}}{\eta^{(k)}}$.

$$\gamma^{(0)} = (A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}, A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = (-0,1)^2 + 0,2^2 + 0,2^2 = 0,09.$$

$$A(A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3+0,2-0,2 \\ -0,1+0,8+0,4 \\ 0,1+0,4+1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 1,1 \\ 1,7 \end{pmatrix}.$$

$$\eta^{(0)} = (A(A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}), A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = -0,1(-0,3) + 0,2\cdot 1,1 + 0,2\cdot 1,7 = 0,59\,.$$

$$\alpha^{(0)}=\frac{\gamma^{(0)}}{\eta^{(0)}}=\frac{0,09}{0,59}=0,1525.$$

За формулою $\vec{x}^{(k+1)}=\vec{x}^{(k)}-\alpha^{(k)}grad\ f\left(\vec{x}^{(k)}\right)$ при $k=0$ знаходимо перше наближення:

$$\vec{x}^{(1)}=\vec{x}^{(0)}-\alpha^{(0)}grad\ f\left(\vec{x}^{(0)}\right)=\begin{pmatrix}0,6\\1,3\\1,2\end{pmatrix}-0,1525\begin{pmatrix}-0,1\\0,2\\0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6152\\1,2695\\1,1695\end{pmatrix}.$$

Наступні обчислення виконуємо аналогічно. Знаходимо $grad\ f(\vec{x}^{(1)})=A\vec{x}^{(1)}-\vec{b}$:

$$grad\ f\left(\vec{x}^{(1)}\right)=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&4&2\\-1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,6152\\1,2695\\1,1695\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,0544\\0,0322\\-0,0643\end{pmatrix}.$$

$$A\left(A\vec{x}^{(1)}-\vec{b}\right)=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&4&2\\-1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0,0544\\0,0322\\-0,0643\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,0667\\-0,0542\\-0,2670\end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{(1)}=(-0,0544)^2+0,0322^2+(-0,0643)^2=0,00813.$$

$$\eta^{(1)}=-0,0544(-0,0667)+0,0322(-0,05442)-0,0643(-0,2670)=0,01905.$$

$$\alpha^{(1)}=\frac{\gamma^{(1)}}{\eta^{(1)}}=\frac{0,00813}{0,01905}=0,4268.$$

Друге наближення:

$$\vec{x}^{(2)}=\vec{x}^{(1)}-\alpha^{(1)}grad\ f\left(\vec{x}^{(1)}\right)=\begin{pmatrix}0,6152\\1,2695\\1,1695\end{pmatrix}-0,4268\begin{pmatrix}-0,0544\\0,0322\\-0,0643\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6385\\1,2558\\1,1969\end{pmatrix}.$$

Знову обчислюємо $grad\ \ f\left(\vec{x}^{(2)}\right)$:

$$grad\ f\left(\vec{x}^{(2)}\right)=A\vec{x}^{(2)}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&4&2\\-1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,6385\\1,2558\\1,1969\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,0256\\0,0555\\0,0545\end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{(2)}=(-0,0256)^2+0,0555^2+0,0545^2=0,00671$$

$$A(A\vec{x}^{(2)}-\vec{b})=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&4&2\\-1&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0,0256\\0,0555\\0,0545\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,0758\\0,3054\\0,4636\end{pmatrix}.$$

$$\eta^{(2)}=-0,0256(-0,0758)+0,0555\cdot0,3054+0,0545\cdot0,4636=0,04416.$$

$$\alpha^{(2)}=\frac{\gamma^{(2)}}{\eta^{(2)}}=\frac{0,00671}{0,04416}=0,1519.$$

Третє наближення:

$$\vec{x}^{(3)} = \vec{x}^{(2)} - \alpha^{(2)} grad\ f(\vec{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0,6385 \\ 1,2558 \\ 1,1969 \end{pmatrix} - 0,1519 \begin{pmatrix} -0,0256 \\ 0,0555 \\ -0,0545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6424 \\ 1,2474 \\ 1,1886 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо $grad\ f\left(\vec{x}^{(3)}\right)$:

$$grad\ f\left(\vec{x}^{(3)}\right) = A\vec{x}^{(3)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6424 \\ 1,2474 \\ 1,1886 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0140 \\ 0,0092 \\ 0,0162 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\max\limits_i \left| \dfrac{\partial f(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})}{\partial x_i} \right| = 0,0162 < 0,02,$ то обчислення закінчуємо.

Знайдемо найменше значення функції, яке дорівнює $f\left(\vec{x}^{(3)}\right)$.

$$f(\vec{x}^{(3)}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}^{(3)}, \vec{x}^{(3)}) - (\vec{b}, \vec{x}^{(3)}).$$

$$A\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6424 \\ 1,2474 \\ 1,1886 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9860 \\ 8,0092 \\ 8,9838 \end{pmatrix}.$$

$$f(\vec{x}^{(3)}) = \frac{1}{2}(1,9860 \cdot 0,6424 + 8,0092 \cdot 1,2474 + 8,9838 \cdot 1,1886) -$$

$$-(2 \cdot 0,6424 + 8 \cdot 1,2474 + 9 \cdot 1,1886) = \frac{1}{2} \cdot 21,9446 - 21,9614 = -10,9891.$$

Отже, $f_{\min} = -10,9891$ при $x_1 = 0,6424,\ x_2 = 1,2474,\ x_3 = 1,1886.$

Приклад 4.3. Знайти такі значення змінних x_1, x_2, які задовольняють систему нерівностей

$$8x_1 + 5x_2 \ge 12,$$
$$-2x_1 + 3x_2 \le 6,$$
$$x_1 + x_2 \le 7,$$
$$x_2 \ge 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

і при яких цільова функція $u = 2x_1 + 3x_2$ досягає найменшого та найбільшого значень.

Розв'язування. Побудуємо прямі

$$8x_1 + 5x_2 = 12, \quad (1)$$
$$-2x_1 + 3x_2 = 6, \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 = 7, \quad (3)$$
$$x_2 = 1, \quad (4)$$

та зобразимо область G допустимих розв'язків даної задачі (чотирикутник $ABDE$).

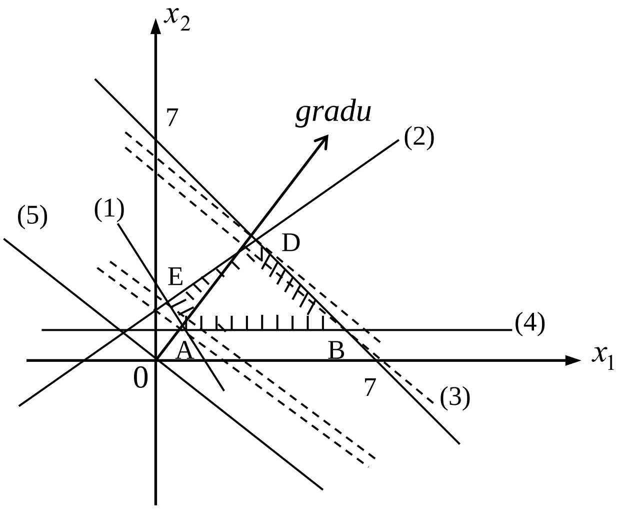


Рисунок 5

Побудуємо лінію рівня (5) $2x_1 + 3x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, та вектор $grad\, u = (2, 3)$. Будемо переміщувати пряму $2x_1 + 3x_2 = 0$ паралельно самій собі в напрямі градієнта функції u. Оскільки в цьому напрямі цільова функція $u = 2x_1 + 3x_2$ зростає, то найменшого значення в області допустимих розв'язків G вона досягає у вершині A, а найбільшого – у вершині D.

Щоб знайти координати точок A та D, розв'яжемо дві системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} 8x_1 + 5x_2 &= 12, \\ x_2 &= 1; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &= 6, \\ x_1 + x_2 &= 7. \end{aligned}$

З першої системи одержимо $x_1 = \frac{7}{8},\ x_2 = 1,$ тобто $A\left(\frac{7}{8},\ 1\right);$ з другої – $x_1 = 3,\ x_2 = 4,$ тобто $D\ (3, 4)$.

Отже, найменше значення цільової функції

$$u_{\min} = 2 \cdot \frac{7}{8} + 3 = 4,75,$$

а найбільше значення

$$u_{\max} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18.$$

Зауваження. Якщо поставимо задачу про екстремум, наприклад, цільової функції $u_1 = -2x_1 + 3x_2$ при тих самих обмеженнях на область допустимих значень, то за допомогою аналогічних міркувань можна пересвідчитися, що мінімального значення функція u_1 набуде у вершині B, а максимального – в будь-якій точці відрізка ED.

Приклад4.4. У розпорядженні бригади робітників є ресурси: 420кг металу, 150м^2 скла та 210год. робочого часу. Бригаді доручено виготовляти вироби двох видів: A та B. Ціна одного виробу виду A–48 грн., а виду B – 40грн. На виготовлення одного виробу A потрібно 4кг металу, 2м^2 скла і

3год. робочого часу, а на виготовлення одного виробу $B-6$ кг металу, 1м^2 скла і 2год. робочого часу. Потрібно так спланувати обсяг випуску продукції, щоб її вартість була максимальною.

Розв'язування. Складемо математичну модель цієї задачі. Нехай x_1 та x_2 – кількість виробів видів A та B, які потрібно запланувати; x_1 та x_2 є цілими невід'ємними числами. Наявні ресурси сировини і робочого часу задамо у вигляді обмежень – нерівностей

$$4x_1 + 6x_2 \le 420,$$
$$2x_1 + x_2 \le 150,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 210.$$

Повну вартість запланованої до виробництва продукції виражають формулою

$$u = 48x_1 + 40x_2.$$

Таким чином, потрібно визначити такі значення проектних параметрів x_1 та x_2, які задовольняють систему лінійних нерівностей і для яких цільова функція досягає максимуму.

Введемо додаткові змінні $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$, при цьому виберемо їх так, щоб обмеження-нерівності перетворилися у рівняння

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 = 420,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 150,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 210.$$

Зауважимо, що цільова функція не змінить свого вигляду. Фактично x_3, x_4 та x_5 будуть означати залишки ресурсів, що не використані у виробництві.

Якщо змінити знак цільової функції тобто розглянути нову цільову функцію

$$z = -u = -48x_1 - 40x_2,$$

то одержимо задачу мінімізації для цільової функції.

Приймемо x_3, x_4, x_5 за базисні змінні й виразимо їх через вільні змінні x_1 та x_2 з рівнянь обмеження

$$x_3 = 420 - 4x_1 - 6x_2,$$
$$x_4 = 150 - 2x_1 - x_2,$$
$$x_5 = 210 - 3x_1 - 2x_2.$$

За початковий опорний візьмемо розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних змінних

$$x_1^{(0)} = 0,\ \ x_2^{(0)} = 0,\ \ x_3^{(0)} = 420,\ \ x_4^{(0)} = 150,\ \ x_5^{(0)} = 210.$$

Цьому розв'язку відповідає нульове значення цільової функції

$$z^{(0)} = 0.$$

Отримане значення не є мінімальним, оскільки значення цільової функції z можна зменшити шляхом збільшення вільних параметрів x_1 та x_2. У формулі, що отримали, обидва коефіцієнти від'ємні, але оскільки $48 > 40$, то приймемо $x_2 = 0$, а будемо збільшувати змінну x_1 доти, доки базисні змінні будуть невід'ємними.

x_1 можна збільшувати до значення $x_1 = 70$, бо при більших його значеннях базисна змінна x_5 буде від'ємною.

Таким чином, при $x_1 = 70,\ x_2 = 0$ одержимо новий опорний розв'язок

$$x_1^{(1)} = 70,\ \ x_2^{(1)} = 0,\ \ x_3^{(1)} = 140,\ \ x_4^{(1)} = 10,\ \ x_5^{(1)} = 0.$$

Значення цільової функції для цього розв'язку

$$z^{(1)} = -3360.$$

Новий розв'язок кращий, оскільки значення цільової функції зменшилося порівняно з попереднім.

Наступний крок почнемо з вибору нового базису. Приймемо ненульові змінні x_1, x_3, x_4 за базисні змінні, а змінні x_2, x_5 – за вільні. Із системи знайдемо:

$$x_1 = 70 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5,$$

$$x_3 = 140 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_5,$$

$$x_4 = 10 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_5.$$

Виразимо цільову функцію через вільні параметри $x_2,\ x_5$:

$$z = -3360 - 8x_2 + 16x_5.$$

Значення цільової функції можна зменшити за рахунок збільшення x_2, оскільки коефіцієнт при цій змінній від'ємний. При цьому зростання змінної x_5 недопустиме, бо це призвело б до зростання цільової функції. Тому приймемо $x_5 = 0$.

Швидше від змінної x_1 нульового значення досягне змінна x_3 при $x_2 = 42$. Подальше збільшення x_2 неможливе, оскільки змінна x_3 буде від'ємною.

Отже, одержуємо наступний опорний розв'язок при $x_2 = 42,\ x_3 = 0$

$$x_1^{(2)} = 42,\ x_2^{(2)} = 42,\ x_3^{(2)} = 0,\ x_4^{(2)} = 24,\ x_5^{(2)} = 0.$$

Значення цільової функції для цього розв'язку

$$z^{(2)} = -3696.$$

Для виконання наступного кроку змінні x_1, x_2, x_4 приймемо за базисні, а $x_3, x_5 -$ за вільні змінні. Із отриманої системи знайдемо:

$$x_1 = 42 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5,$$

$$x_2 = 42 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_5,$$

$$x_4 = 24 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{4}{5}x_5.$$

Цільова функція набуде вигляду

$$z = -3360 - 8\left(42 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_5\right) + 16x_5,$$

тобто

$$z = -3696 + \frac{12}{5}x_3 + \frac{64}{5}x_5.$$

Оскільки в цій формулі коефіцієнти при x_3 та x_5 додатні, то при збільшенні цих параметрів значення функції зростає.

Отже, мінімальне значення цільової функції відповідає нульовим значенням змінних x_3 та x_5 і одержаний розв’язок є оптимальним. Значення цільової функції для цього розв’язку є максимальним і воно дорівнює $u_{\max} = 3696$.

Таким чином, для одержання максимальної вартості продукції при заданих ресурсах необхідно виготовити по 42 вироби виду A та B. Вартість запланованої продукції дорівнює 3696 грн. При цьому всі ресурси металу і робочого часу будуть використані, а скла залишиться $24\,\text{м}^2$.

Розв’язування задачі лінійного програмування симплексним методом можна оформити у вигляді послідовності симплекс-таблиць. Покажемо це на прикладі розв’язаної задачі. Цільову функцію запишемо у вигляді

$$z + 48x_1 + 40x_2 = 0.$$

У стовпець “базис” запишемо назву цільової функції та базисні невідомі, у стовпець “план” – праві частини обмежень та константу у представленні цільової функції. У стовпці $x_1,..., x_5$ запишемо коефіцієнти при відповідних змінних.

У випадку пошуку мінімуму функції z розв’язок (план) буде оптимальним, якщо числа, одержані в рядку z, не є додатні. Якщо розв’язок оптимальний, то обчислення закінчено. Оптимальні значення базисних невідомих і цільової функції можна знайти у стовпці “план”.

Якщо розв’язок не є оптимальним, то серед додатних коефіцієнтів рядка z вибираємо найбільший. Він визначає змінну, яка буде включена в новий базис, та ведучий стовпець.

Обчислюємо відношення чисел стовпця “план” до відповідних додатних елементів ведучого стовпця і серед них вибираємо найменше. Воно визначає ведучий рядок та змінну, яка буде виключена з базису. На перетині ведучого рядка та ведучого стовпця міститься ведучий елемент.

Якщо всі елементи ведучого стовпця від’ємні, то цільова функція необмежена.

Будуємо нову симплекс-таблицю. Змінну ведучого стовпця включаємо в базис. Відповідний їй рядок отримуємо шляхом ділення ведучого рядка на ведучий елемент. Помножимо цей рядок на елемент з протилежним знаком $i-$го рядка ведучого стовпця і додамо його до цього ж $i-$го рядка. Такі ж перетворення виконаємо з усіма рядками. Одержимо нову симплекс-таблицю, яку перевіримо на оптимальність. Побудову наступних симплекс-таблиць виконаємо аналогічно.

Базис	План	$x_1\downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5
z	0	48	40	0	0	0
x_3	420	4	6	1	0	0
x_4	150	2	1	0	1	0
$\leftarrow x_5$	210	$\underline{3}$	2	0	0	1
z	-3360	0	$8\downarrow$	0	0	-16
$\leftarrow x_3$	140	0	$\underline{10/3}$	1	0	-4/3
x_4	10	0	-1/3	0	1	-2/3
x_1	70	1	2/3	0	0	1/3
z	-3696	0	0	-12/5	0	-64/5
x_2	42	0	1	3/10	0	-2/5
x_4	24	0	0	1/10	1	-4/5
x_1	42	1	0	-1/5	0	3/5

Отже, $z_{\min} = -3696$ при $x_1 = 42,\ x_2 = 42,\ x_3 = 0,\ x_4 = 24,\ x_5 = 0.$

Тема 5. Теорія графів.

Приклад 5.1. Графи G_1 та G_2 ($G=(V,E)$) задані множинами V та E за допомогою переліку їх елементів: $G_1=(V_1,E_1)$, $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ і $E_1=\{(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_3),(v_2,v_4),(v_3,v_4)\}$ – граф із чотирма вершинами і п'ятьма ребрами. А граф $G_2=(V_2,E_2)$, $V_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ і $E_2=\{(v_1,v_2),(v_2,v_4),(v_1,v_5),(v_3,v_2),(v_3,v_5),(v_4,v_1),(v_5,v_4)\}$ – граф із п'ятьма вершинами і сімома ребрами.

Необхідно записати для цих графів 1) діаграми, 2) матриці суміжності, 3) матриці інцидентності, 4) списки суміжності,

Розв'язування.

1. На рисунку 6 зображені діаграми графів G_1 і G_2

G_1 G_2

Рисунок 6

2. Для графів G_1 і G_2 отримаємо матриці графів відповідно

$$A_1=\begin{pmatrix}0011\\0011\\1101\\1110\end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A_2=\begin{pmatrix}01011\\10110\\01001\\11001\\10110\end{pmatrix}$$

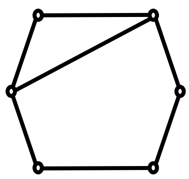
3. Для графів G_1 і G_2 отримаємо матриці інцидентності

$$B_1=\begin{pmatrix}11000\\00110\\10101\\01011\end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B_2=\begin{pmatrix}1010010\\1101000\\0001100\\0100011\\0010101\end{pmatrix}$$

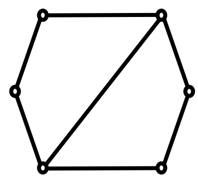
4. Для графів G_1 і G_2 отримаємо списки суміжності

G_1:	G_2:
v_1: v_3,v_4	v_1: v_2,v_4,v_5
v_2: v_3,v_4	v_2: v_1,v_3,v_4
v_3: v_1,v_2,v_4	v_3: v_2,v_5
v_4: v_1,v_2,v_3	v_4: v_1,v_2,v_5
	v_5: v_1,v_3,v_4

Приклад 5.2. Визначити об’єднання і перетин графів H_1 і H_2 , що задані діаграмами:



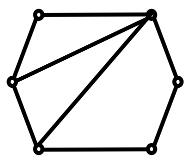
H_1



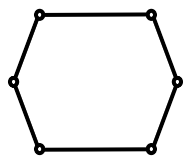
H_2

Рисунок 7

Розв’язування.



$H_1 \cup H_2$



$H_1 \cap H_2$

Приклад 5.3.

Задача про 15 мостів.

У деякій місцевості через протоки перекинуто 15 мостів (рисунок 8).

Чи можна обійти всі мости пройшовши по кожному тільки один раз?

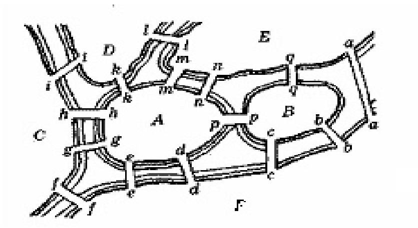


Рисунок 8

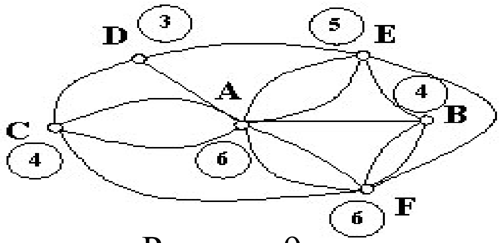


Рисунок 9

Розв'язування.
Побудуємо граф, де вершини - острови і береги, а ребра – мости (рисунок 9).

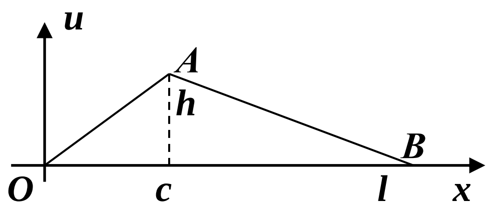
Непарні вершини: D, E.

Отже, оскільки кількість непарних вершин дорівнює 2, то обхід можливий.

Його початок може бути в місцевості D, а кінець в місцевості E.

Тема 6. Рівняння математичної фізики.

Приклад 6.1. Визначити закон коливань струни з закріпленими кінцями $x=0$ і $x=l$, якщо початкова швидкість точок струни дорівнює нулю, а початкове відхилення має форму трикутника з вершиною в точці (c,h).



Розв'язування. Рівняння прямої ***OA*** з кутовим коефіцієнтом $\dfrac{h}{c}$ дорівнює $u=\dfrac{h}{c}x$.

Пряма ***AB*** проходить через точки $A(c,h)$ і $B(l,0)$. Її рівняння $u=\dfrac{h}{l-c}(l-x)$.

Таким чином за умовою задачі $F(x)\equiv 0$, а $f(x)$ визначається рівняннями прями які проходять через сторони трикутника

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, & \text{коли} \quad 0\le x\le c;\\[2mm] \dfrac{h}{l-c}(l-x), & \text{коли} \quad c\le x\le l.\end{cases}$$

Розв'язок задачі визначиться формулою

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n\cos\frac{\pi n}{l}at+\frac{l}{\pi n a}F_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де $f_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\dfrac{\pi n}{l}xdx$ і $F_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\dfrac{\pi n}{l}xdx$.

Підстановка значень початкових функцій $f(x)$ і $F(x)$ дає: $F_n=0$,

$$f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{2}{l}\left(\frac{h}{c}\int_0^c x\sin\frac{\pi n}{l}xdx + \frac{h}{l-c}\int_c^l (l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx\right).$$

Знаходимо записані інтеграли:

$$\int_0^c x\sin\frac{\pi n}{l}xdx = \left[\begin{array}{c|c} x=u & dx=du \\ \hline dv=\sin\frac{\pi n}{l}xdx & v=\int\sin\frac{\pi n}{l}xdx = -\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{l}{\pi n}\left(x\cos\frac{\pi n}{l}x\right)\Big|_0^c + \frac{l}{\pi n}\int_0^c \cos\frac{\pi n}{l}xdx = -\frac{lc}{\pi n}\cos\frac{\pi nc}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi nc}{l},$$

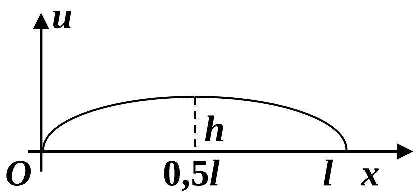
$$\int_0^c (l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx = \frac{lc}{\pi n}(l-c)\cos\frac{\pi nc}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi nc}{l}.$$

Тоді $f_n = \dfrac{2hl^2}{n^2\pi^2 c(l-c)}\sin\dfrac{\pi nc}{l}$. Підставляючи значення f_n і F_n у формулу для визначення зміщення точок струни, отримаємо закон коливання струни

$$u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{l}c\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\cos\frac{\pi n}{l}at.$$

Знайдена формула визначає профіль струни, який виникає внаслідок суперпозиції стоячих хвиль, в довільний момент часу.

Приклад 6.2. Знайти закон коливань струни $(0,l)$ під дією гармонічної зовнішньої сили $G(x,t) = \varphi(x)\sin\omega t$, якщо частота змушувальної сили не збігається ні з однією із власних частот коливання струни і наявними є нульові початкові умови



$$u(x,0) = 0 \text{ і } \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Розв'язування. Розкладемо функцію $G(x,t)$ в ряд Фур'є, враховуючи, що $\omega \neq \dfrac{\pi a}{l} = \omega_1$ $\omega_n = n\omega_1$):

$$G(x,t) = \sin\omega t\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\omega_1}{a}x, \text{ де } a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\omega_1}{a}xdx.$$

Так як $g_n(t) = a_n\sin\omega t$, то звичайні диференціальні рівняння матимуть вигляд

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = a_n\sin\omega t \ (n\in\mathbf{N}).$$

Загальний розв'язок рівняння, враховуючи початкові умови запишемо у вигляді:

$$T_n(t)=A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t+\frac{a_n}{\omega_n}C_n(t),\ \text{де}\ C_n(t)=\int_0^t\sin\omega\tau\sin\omega_n(t-\tau)d\tau.$$

Із початкової умови $T_n(0)=0$ визначаємо A_n:

$$T_n(0)=A_n\cos\omega_n 0+B_n\sin\omega_n 0+\frac{a_n}{\omega_n}\int_0^0\sin\omega\tau\sin\omega_n(0-\tau)d\tau=0,\ A_n=0.$$

Враховуючи це, що

$$\sin\omega\tau\sin\omega_n(t-\tau)=\frac{1}{2}(\cos((\omega+\omega_n)\tau-\omega_n t)-\cos((\omega-\omega_n)\tau+\omega_n t)),$$

$$\int_0^t\cos((\omega+\omega_n)\tau-\omega_n t)d\tau=\frac{1}{\omega+\omega_n}\sin((\omega+\omega_n)\tau-\omega_n t)\Big|_0^t=\frac{\sin\omega t+\sin\omega_n t}{\omega+\omega_n},$$

$$\int_0^t\cos((\omega-\omega_n)\tau+\omega_n t)d\tau=\frac{1}{\omega-\omega_n}\sin((\omega-\omega_n)\tau+\omega_n t)\Big|_0^t=\frac{\sin\omega t-\sin\omega_n t}{\omega-\omega_n},$$

отримаємо

$$C_n(t)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2\omega_n\sin\omega t}{\omega^2-\omega_n^2}+\frac{2\omega\sin\omega_n t}{\omega^2-\omega_n^2}\right)=\frac{\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\ \text{і}$$

$$T_n(t)=B_n\sin\omega_n t+\frac{a_n}{\omega_n^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right).$$

Так як $T_n'(t)=B_n\omega_n\cos\omega_n t+\dfrac{a_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}(\cos\omega t-\cos\omega_n t)$, то з початкової умови $T_n'(0)=0$ маємо:

$$T_n'(0)=B_n\omega_n\cos 0+\frac{a_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}(\cos 0-\cos 0)=0,\ \text{тобто}\ B_n=0.$$

Остаточно маємо шуканий закон коливань струни $(0,l)$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\omega_n^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\omega_1}{a}x.$$

Тема 7. Метод скінченних різниць.

Приклад 7.1 Побудувати епюри нормальних і дотичних напружень у пластині, наведеній на рисунку 9 при вихідних даних таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

а, м	a:b	c/a	l/b	q_1 кН/м^2	q_2 кН/м^2	d/a	f/b	F_1 кН/м	F_2 кН/м
2,5	5:4	0,22	0	8	4	0,3	0,5	10	3

Розв'язання.

Схема пластинки і навантаження відповідно даних табл. 7.1 наведена на рис. 9.

Відповідно до завдання ($a : в = 5{:}4$) розбиваємо пластинку сіткою з однаковим кроком уздовж осей x та y (рис. 10). Для цього необхідно довжину а пластинки поділити на задану у співвідношенні a:b кількості кроків: $h = \frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$ м . Пунктиром доповнюємо сітку на один крок від контуру. Вузли сітки нумеруємо, враховуючи наявність двох осей симетрії.

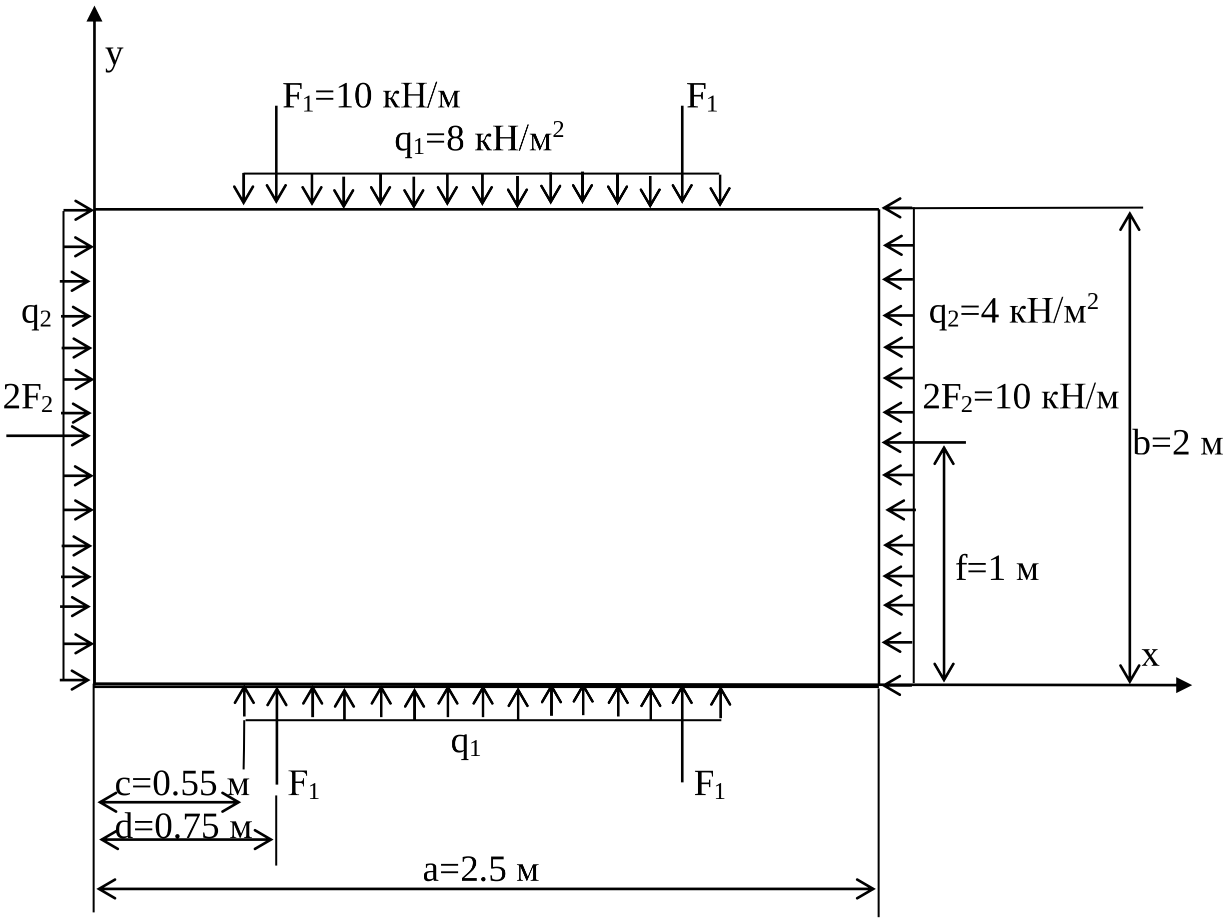


Рисунок 9

Враховуючи симетрію, складаємо рівняння для кожної внутрішньої точки у чверті контуру за схемою, наведеною на рис. 11. Ця схема показує, з яким множником необхідно брати значення функції φ для точки, відповідно розташованої відносно точки, в якій записується рівняння.

Отже отримаємо:

для т. 1: $$20\varphi_1 - 8(\varphi_2 + \varphi_{3'} + \varphi_5 + \varphi_3) + 2(\varphi_{4'} + \varphi_{6'} + \varphi_6 + \varphi_4) +$$
$$+ (\varphi_{2''} + \varphi_{8'} + \varphi_{10} + \varphi_8) = 0;$$

для т. 2: $$20\varphi_2 - 8(\varphi_{2''} + \varphi_{4'} + \varphi_1 + \varphi_4) + 2(\varphi_{4'''} + \varphi_{3'} + \varphi_3 + \varphi_{4''}) +$$
$$+ (\varphi_{1''} + \varphi_{9'} + \varphi_5 + \varphi_9) = 0;$$

для т. 3: $20\varphi_3 - 8(\varphi_4 + \varphi_1 + \varphi_6 + \varphi_8) + 2(\varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9) +$
$+ (\varphi_{4''} + \varphi_{3'} + \varphi_{11} + \varphi_{14}) = 0;$

для т. 4: $20\varphi_4 - 8(\varphi_{4''} + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_9) + 2(\varphi_{2''} + \varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_{9''}) +$
$+ (\varphi_{3''} + \varphi_{4'} + \varphi_6 + \varphi_{15}) = 0.$

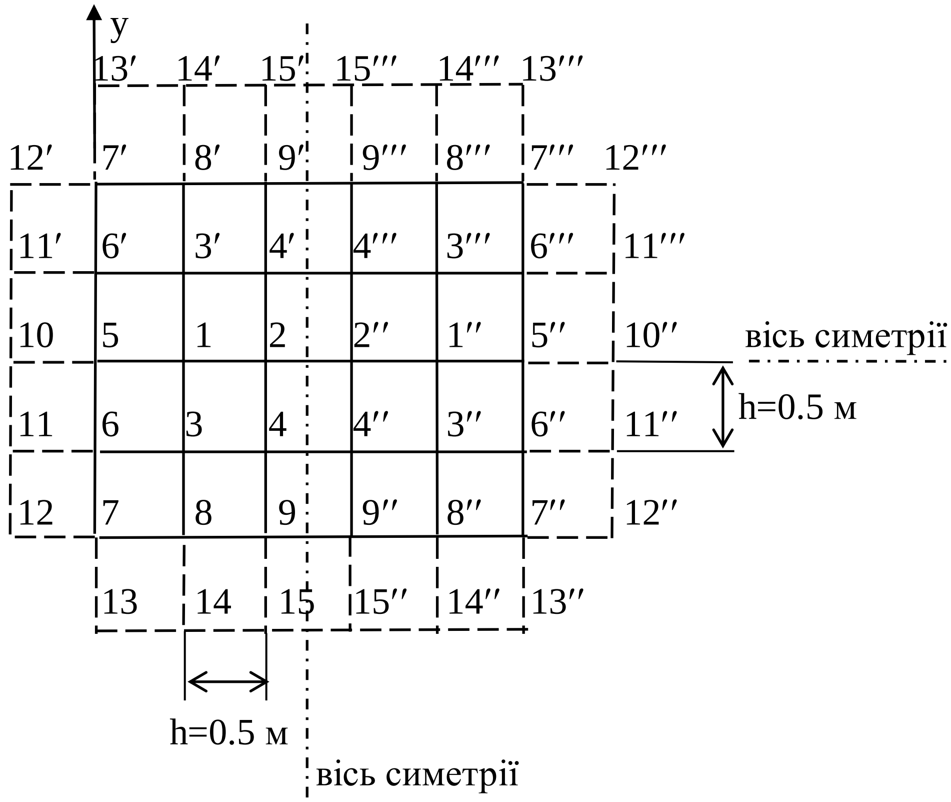


Рисунок 10

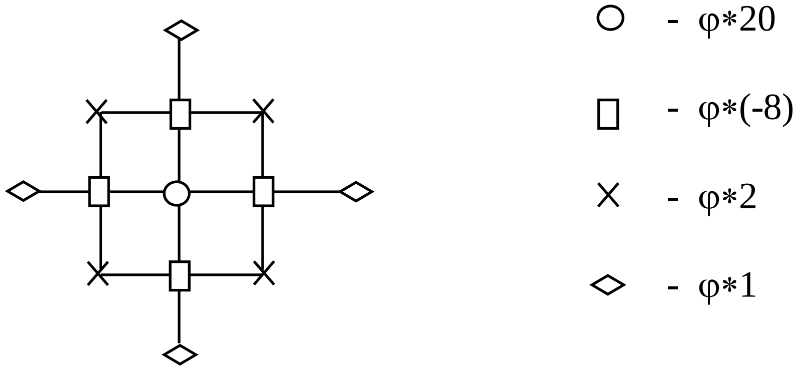


Рис. 11

Враховуючи, що в симетричних точках значення функції напружень однакові ($\varphi_i = \varphi_{i'} = \varphi_{i''} = \varphi_{i'''}$), одержуємо:

$$20\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 8\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_8 + \varphi_{10} = 0;$$

$$-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_9 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 21\varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 - 8\varphi_6 + 2\varphi_7 - 8\varphi_8 + 2\varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_{14} = 0;$$

$$2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 13\varphi_4 + \varphi_6 + 2\varphi_8 - 6\varphi_9 + \varphi_{15} = 0.$$

Утворюємо раму (рис. 12) з осями, що відповідають контуру рами і будуємо для неї епюри згинаючих моментів M і поздовжніх сил N від заданого на контурі навантаження (рис. 13).

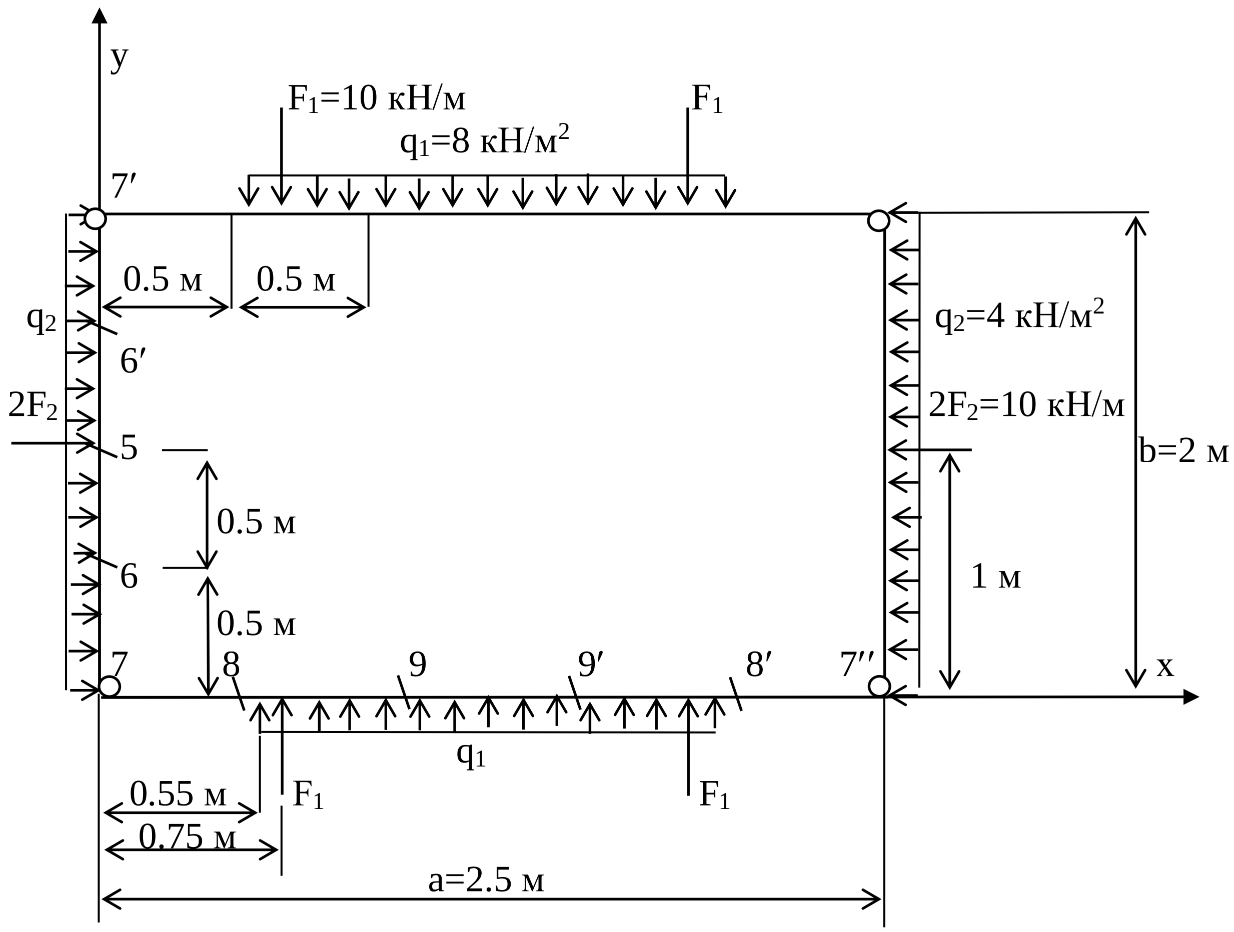


Рис. 12

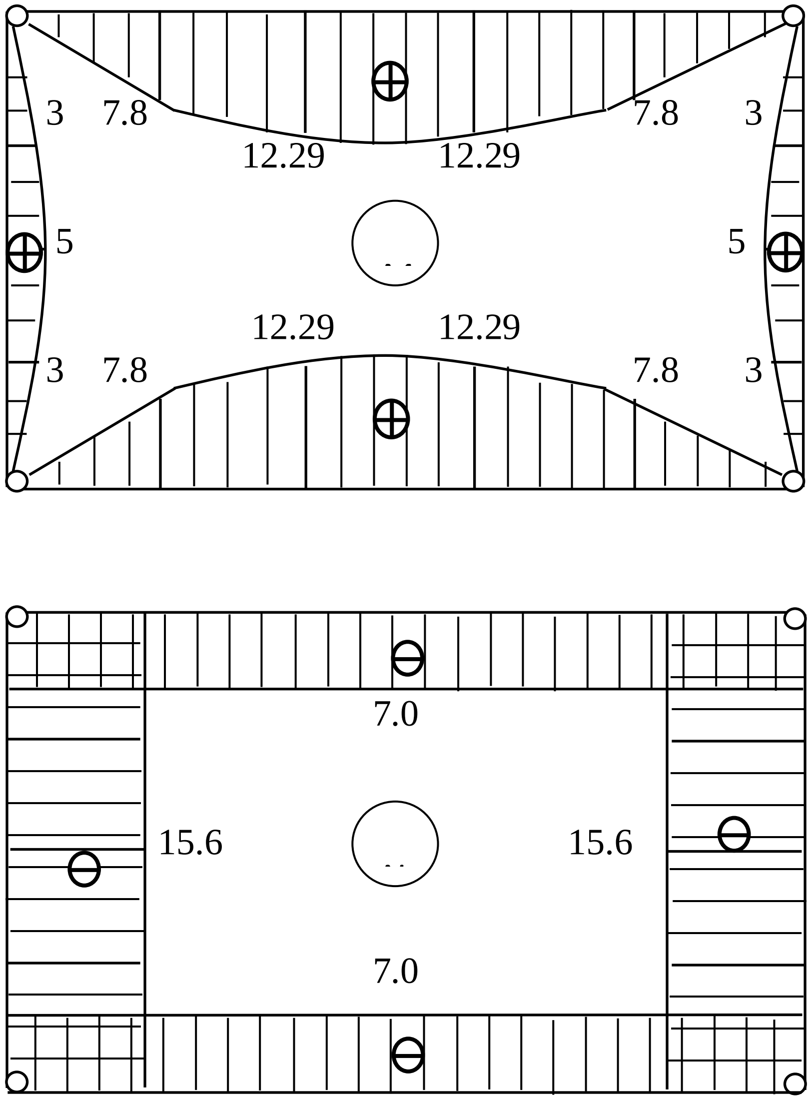


Рис. 13

Для визначення згинаючих моментів кожний стержень рами розглянемо окремо як балку на двох шарнірних опорах (рис. 14). Поздовжні сили в стержнях рами дорівнюють відповідним реакціям балок.

Визначаємо функції напружень у точках поза контуром. Для цього використовуємо співвідношення:

$$\varphi_{10} = \varphi_1 + 2h \cdot N_5 = \varphi_1 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-15{,}6) = \varphi_1 - 15{,}6;$$

$$\varphi_{11} = \varphi_3 + 2h \cdot N_6 = \varphi_3 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-15{,}6) = \varphi_3 - 15{,}6;$$

$$\varphi_{14} = \varphi_3 + 2h \cdot N_8 = \varphi_3 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-7) = \varphi_3 - 7;$$

$$\varphi_{15} = \varphi_4 + 2h \cdot N_9 = \varphi_4 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-7) = \varphi_4 - 7.$$

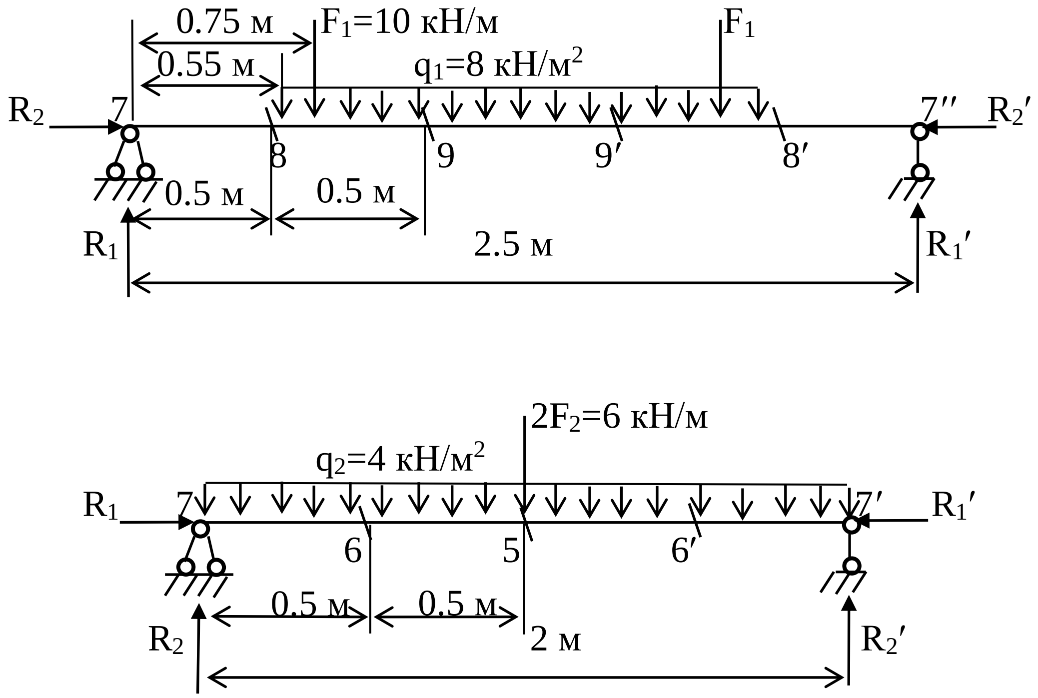


Рис. 14

Підставляючи ці співвідношення у попереднє рівняння, після зведення подібних одержуємо:

$$21\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 8\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_8 - 15{,}6 = 0;$$

$$-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_9 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 23\varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 - 8\varphi_6 + 2\varphi_7 - 8\varphi_8 + 2\varphi_9 - 22{,}6 = 0;$$

$$2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 14\varphi_4 + \varphi_6 + 2\varphi_8 - 6\varphi_9 - 7 = 0.$$

Значення функції напружень у точках на контурі визначаємо за рівностями еквівалентності моментам в точках на контурі:

$$\varphi_5 = M_5 = 5{,}0;$$

$$\varphi_6 = M_6 = 3{,}0;$$

$$\varphi_7 = M_7 = 0;$$

$$\varphi_8 = M_8 = 7{,}8;$$

$$\varphi_9 = M_9 = 12{,}29.$$

З урахуванням цих значень рівняння скінченних різниць набувають такого вигляду:

$$21\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 28 = 0;$$

$$-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + 29{,}58 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 23\varphi_3 - 7\varphi_4 - 74{,}42 = 0;$$

$$2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 14\varphi_4 - 62{,}14 = 0.$$

Розв'язуємо цю систему алгебраїчних рівнянь.

В результаті одержимо наступні значення функції напружень в точках 1-4:

$\varphi_1 = 11{,}60$; $\varphi_2 = 15{,}42$; $\varphi_3 = 10{,}37$; $\varphi_4 = 14{,}58$.

Далі обчислюємо значення φ у точках поза контуром:

$\varphi_{10} = 11{,}60 - 15{,}6 = -4{,}0$;

$\varphi_{11} = 10{,}37 - 15{,}6 = -5{,}23$;

$\varphi_{14} = 10{,}37 - 7 = 3{,}37$

$\varphi_{15} = 14{,}58 - 7 = 7{,}58$;

$\varphi_{13} = \varphi_6 + 2hN_7 = 3 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-7) = -4$;

$\varphi_{12} = \varphi_8 + 2hN_7 = 7{,}8 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-15{,}6) = -7{,}8$.

Тепер можна перейти до визначення нормальних і дотичних напружень (у кПа) за формулами:

$$(\sigma_x)_1 = (\varphi_{3'} - 2\varphi_1 + \varphi_3)/h^2 = (10{,}37 - 2 \cdot 11{,}6 + 10{,}37) \cdot 4 = -9{,}84;$$

$$(\sigma_x)_2 = (\varphi_{4'} - 2\varphi_2 + \varphi_4)/h^2 = (14{,}58 - 2 \cdot 15{,}42 + 14{,}58) \cdot 4 = -6{,}72;$$

$$(\sigma_x)_3 = (\varphi_1 - 2\varphi_3 + \varphi_8)/h^2 = (11{,}6 - 2 \cdot 10{,}37 + 7{,}8) \cdot 4 = -5{,}36;$$

$$(\sigma_x)_4 = (\varphi_2 - 2\varphi_4 + \varphi_9)/h^2 = (15{,}42 - 2 \cdot 14{,}58 + 12{,}29) \cdot 4 = -5{,}80;$$

$$(\sigma_x)_5 = (\varphi_{6'} - 2\varphi_5 + \varphi_6)/h^2 = (3 - 2 \cdot 5 + 3) \cdot 4 = -16{,}0;$$

$$(\sigma_x)_6 = (\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_7)/h^2 = (5 - 2 \cdot 3 + 0) \cdot 4 = -4{,}0;$$

$$(\sigma_x)_7 = (\varphi_6 - 2\varphi_7 + \varphi_{13})/h^2 = (3 - 2 \cdot 0 - 4) \cdot 4 = -4{,}0;$$

$$(\sigma_x)_8 = (\varphi_3 - 2\varphi_8 + \varphi_{14})/h^2 = (10{,}37 - 2 \cdot 7{,}8 + 3{,}37) \cdot 4 = -7{,}44;$$

$$(\sigma_x)_9 = (\varphi_4 - 2\varphi_9 + \varphi_{15})/h^2 = (14{,}58 - 2 \cdot 12{,}29 + 7{,}58) \cdot 4 = -9{,}68.$$

$$(\sigma_y)_1 = (\varphi_5 - 2\varphi_1 + \varphi_2)/h^2 = (5 - 2 \cdot 11{,}6 + 15{,}42) \cdot 4 = -11{,}12;$$

$$(\sigma_y)_2 = (\varphi_{2''} - 2\varphi_2 + \varphi_1)/h^2 = (15{,}42 - 2 \cdot 15{,}42 + 11{,}6) \cdot 4 = -15{,}28;$$

$$(\sigma_y)_3 = (\varphi_4 - 2\varphi_3 + \varphi_6)/h^2 = (14{,}58 - 2 \cdot 10{,}37 + 3) \cdot 4 = -12{,}64;$$

$$(\sigma_y)_4 = (\varphi_{4''} - 2\varphi_4 + \varphi_3)/h^2 = (14{,}58 - 2 \cdot 14{,}58 + 10{,}37) \cdot 4 = -16{,}84;$$

$$(\sigma_y)_5 = (\varphi_1 - 2\varphi_5 + \varphi_{10})/h^2 = (11{,}6 - 2 \cdot 5 - 4) \cdot 4 = -9{,}6;$$

$$(\sigma_y)_6 = (\varphi_3 - 2\varphi_6 + \varphi_{11})/h^2 = (10{,}37 - 2 \cdot 3 - 5{,}23) \cdot 4 = -3{,}44;$$

$$(\sigma_y)_7 = (\varphi_8 - 2\varphi_7 + \varphi_{12})/h^2 = (7{,}8 - 2 \cdot 0 - 7{,}8) \cdot 4 = 0;$$

$$(\sigma_y)_8 = (\varphi_9 - 2\varphi_8 + \varphi_7)/h^2 = (12{,}29 - 2 \cdot 7{,}8 + 0) \cdot 4 = -13{,}24;$$

$$(\sigma_y)_9 = (\varphi_{9''} - 2\varphi_9 + \varphi_8)/h^2 = (12{,}29 - 2 \cdot 12{,}29 + 7{,}58) \cdot 4 = -17{,}96.$$

$$\left(\tau_{xy}\right)_1 = \left(\varphi_{4'} - \varphi_{6'} + \varphi_6 - \varphi_4\right)/\left(4h^2\right) = 0;$$
$$\left(\tau_{xy}\right)_2 = \left(\varphi_{4'''} - \varphi_{3'} + \varphi_3 - \varphi_{4''}\right)/\left(4h^2\right) = 0;$$
$$\left(\tau_{xy}\right)_3 = \left(\varphi_2 - \varphi_5 + \varphi_7 - \varphi_9\right)/\left(4h^2\right) = \left(15{,}42 - 5 + 0 - 12{,}29\right)\cdot 1 = -1{,}87;$$
$$\left(\tau_{xy}\right)_4 = \left(\varphi_{2''} - \varphi_1 + \varphi_8 - \varphi_{9''}\right)/\left(4h^2\right) = \left(15{,}42 - 11{,}6 + 7{,}8 - 12{,}29\right)\cdot 1 = -0{,}67.$$

Дотичні напруження на контурі дорівнюють нулю:

$$\left(\tau_{xy}\right)_5 = \left(\tau_{xy}\right)_6 = \left(\tau_{xy}\right)_7 = \left(\tau_{xy}\right)_8 = \left(\tau_{xy}\right)_9 = 0.$$

Виходячи з одержаних значень, на рис. 15 побудовані епюри напружень σ_x, σ_y, τ_{xy}.

Слід зауважити, що нормальні напруження повинні задовольняти умовам симетрії, а дотичні напруження є кососиметричними. Кососиметрична функція для симетричних точок має протилежні за знаком значення.

Аналізуючи розподіл нормальних напружень, відзначимо, що вони вирівнюються при віддаленні від країв пластинки. Особливо це помітно на епюрі σ_x. Так, на краї платини при $x = 0$ різниця між напруженнями становить $16 - 4 = 12$ кПа, а поблизу середини $9{,}68 - 5{,}8 = 3{,}88$ кПа.

Це явище відповідає відомому принципу Сен-Венана, за яким результат дії самоврівноваженої системи сил зменшується при віддалені від місця їх прикладання.

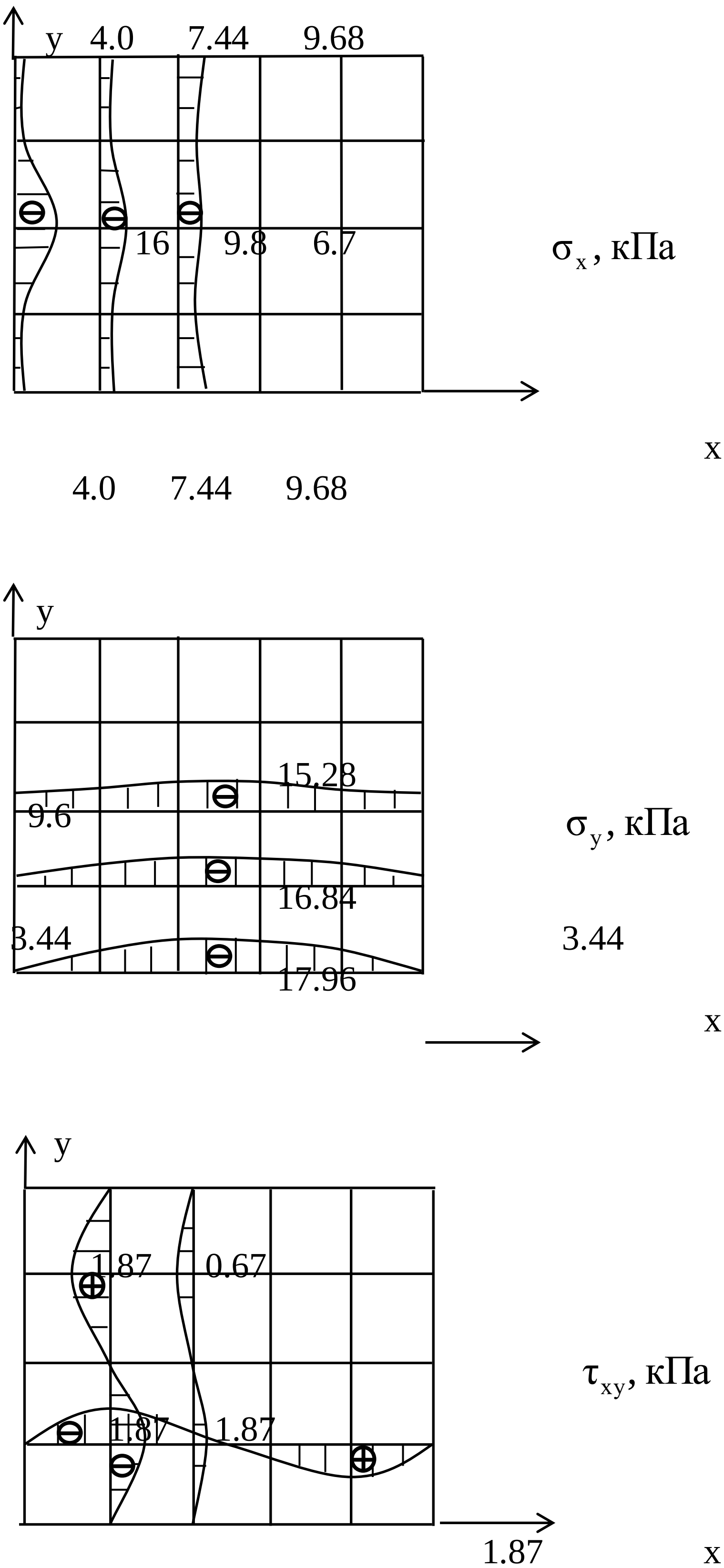

y
4.0
7.44
9.68
16
9.8
6.7
σx, кПа
x
4.0
7.44
9.68
y
15.28
9.6
σy, кПа
16.84
3.44
3.44
17.96
x
y
1.87
0.67
τxy, кПа
1.87
1.87
1.87
x

Рис. 15

ЛІТЕРАТУРА

1. Числові методи в опорі матеріалів та їх програмне забезпечення : навчальний посібник для студентів будівельних і механічних спеціальностей / Г.Т. Сулим, Л.І. Гурняк, В.З. Станкевич. - Луцьк : ЛДТУ, 2007. - 146 с.
2. Бігун Я.Й.Числові методи. Інтерполювання. Числове інтегрування та диференціювання : Навчальний посібник / Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича - Чернівці : Рута, 2005 - 80 с
3. Цегелик Г.Г. Чисельні методи. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету, 2004. – 408 с.
4. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів. Навч. пос. – Чернівці: Золоті литаври, 2005. – 396с.
5. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. - К. : Видавнича група BHV , 2006 . - 480 с.
6. Ясинський В.К. Чисельні методи в інформатиці. – Чернівці: Вид-во „Прут”, 2003. – 308 с. (з грифом Міністерства освіти і науки України)
7. Окуненко В.М., Ясинський В.К. Чисельні методи в інформатиці й інформаційних технологіях економіки. – Чернівці: Вид-во "Прут", 2004. – 564 с.
8. Окуненко В.М., Ясинський В.К. Чисельні методи в моделюванні систем.- Чернівці: Золоті литаври, 2006.- 592 с.
9. Лабораторний практикум з дисципліни "Чисельні методи математики" для студентів спеціальностей 6.091501, 6.080401, 6.080402, 6.092401, 6.091503 / Черкаський держ. технологічний ун-т / Ю.В. Мітіхін (уклад.). — Черкаси : ЧДТУ, 2007. — 81с.
10. Рудаков К. М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл., які навч. на напрямом "Інженерна механіка" / Національний технічний ун-т України "Київський політехнічний ін-т". — К. : НТУУ "КПІ", 2007. — 379с.

ЗМІСТ