МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних занять з курсу

МЕТОДИ ТА СИСТЕМИ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ ТА СИСТЕМ

(модуль 1)

для студентів спеціальностей
- ✓ *124 – системний аналіз*
- ✓ *126 – інформаційні системи та технології*

(рівень вищої освіти – магістр)

ТЕРНОПІЛЬ
2023

Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу Методи та системи імітаційного моделювання інформаційних сигналів та систем (модуль 1) / Б. Б. Млинко, М. Є. Фриз. – Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені І. Пулюя, 2023. – 21 с.

Укладачі: канд. техн. наук, доц. Б. Б. Млинко
канд. техн. наук, доц. М. Є. Фриз

Рецензент докт. техн. наук, проф. О. А. Пастух

Розглянуто та затверджено на засіданні кафедри комп’ютерних наук Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. Протокол №8 від 10 лютого 2023 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії факультету комп'ютерно-інформаційних систем та програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. Протокол №4 від 12 квітня 2023 р.

Відповідальний за випуск: Боднарчук І.О.

ЗМІСТ

ВСТУП

У пропонованому посібнику вміщено методичні вказівки до лабораторних занять, тематика яких пов'язана з методами комп'ютерного імітаційного моделювання випадкових величин та процесів. Такі математичні об'єкти часто є моделями багатьох технічних чи фізичних явищ, процесів та сигналів у інформаційних системах.

Математична модель (від лат. "modulus" - міра) - це сукупність знань про досліджуваний об'єкт, а також припущень і гіпотез, висунутих відносно нього, об'єднаних у цілісну, логічно витриману формальну структуру (яка складається з термінів, символів, позначень, формул, які описують закономірності, аксіом, логічних правил встановлення істинності тверджень та ін.), необхідну для розв'язання певного класу конкретних задач. Формальний характер математичної моделі приводить до можливості синтезу, на основі відображених у ній закономірностей, деякого технічного чи фізичного об'єкту, який би імітував (від лат. "imitatio" - наслідування) поведінку реального об'єкту. Такий "імітатор" називається *імітаційною моделлю.*

Зрозуміло, що коли імітаційна модель є достатньо адекватною і власне досліджуваному об'єкту, і задачам, для розв'язання яких цей об'єкт вивчається, то це суттєво спрощує проведення самих досліджень. Найбільш очевидним це є в тих областях, де проведення експериментів пов'язане з великими економічними, часовими, технічними затратами. Це стосується, наприклад, проведення досліджень у економіці (тут спостереження потребують багато часу), медицині (наявність імітаційної моделі виключає потребу проведення експериментів із пацієнтами), досліджень космічного та інших важкодоступних середовищ, досліджень, пов'язаних із значними руйнуваннями. Імітаційні моделі сигналів використовуються також для тестування інформаційних систем, в задачах прогнозування, у різноманітних навчаючих системах та ін.

Перша частина посібника (модуль 1) охоплює базові питання комп'ютерного імітаційного моделювання випадкових сигналів із заданими дискретними чи неперервними розподілами. У другій частині (модуль 2) викладено методи імітаційного моделювання інформаційних систем.

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ №1

СИНТЕЗ ГЕНЕРАТОРА ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ

Мета заняття: *набути практичного досвіду комп'ютерного імітаційного моделювання послідовності псевдовипадкових чисел методом лишків.*

Теоретичні відомості

Нехай $\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ - послідовність незалежних випадкових величин (білий шум у вузькому розумінні), кожна з яких має рівномірний розподіл з щільністю $p(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1], \\ 0, x \notin [0,1], \end{cases}$ $\mathbf{M}\xi_k = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{D}\xi_k = \frac{1}{12}, \quad \forall k$. У рамках методу статистичних випробувань введену вище послідовність називають *випадковими числами (*або *базовим білим шумом).*

Важливою проблемою комп'ютерного імітаційного моделювання випадкових чисел (і взагалі, будь-яких випадкових елементів) є те, що всі сучасні комп'ютерні інформаційні системи функціонують за певними алгоритмами, заданими програмним чи апаратним способом. Алгоритм - це детермінована впорядкована сукупність команд, інструкцій і операторів, яка задає обчислювальний чи будь-який інший інформаційний процес (який називається, в даному випадку, алгоритмічним), який починається з вводу певних вхідних даних і спрямований на отримання результату, що повністю визначається цими вхідними даними.

Таким чином, реалізувати комп'ютерний стохастичний експеримент з допомогою якого-небудь алгоритму, по суті, неможливо. Тому, замість випадкових чисел, використовують, так звані, *псевдовипадкові числа*, які отримуються за цілком невипадковим алгоритмом, але мають властивості, дуже подібні до властивостей реалізацій випадкових чисел.

Одним з найбільш вивчених у теоретичному плані та вживаних у практичних застосуваннях методів комп'ютерного генерування псевдовипадкових чисел, є *метод лишків (лінійний конгруентний метод)*, відповідно до якого спочатку отримують послідовність натуральних чисел $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$ за рекурентним алгоритмом виду:

$$u_n = (u_{n-1}M)(\operatorname{mod} N),\ n = \overline{1,\infty}, \tag{1.1}$$

де u_0, M, N - задані взаємно прості натуральні числа;

$x(\operatorname{mod} y)$ - остача від ділення x на y (наприклад, $21(\operatorname{mod} 5) = 1$), послідовність псевдовипадкових чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ отримується з (1.1) як

$$\alpha_n = \frac{u_n}{N},\ n = \overline{1,\infty}, \tag{1.2}$$

легко бачити, що $0 < \alpha_n < 1, \forall n$.

Вираз (1.2) можна також записати наступним чином:

$$\alpha_n = \left\{M\alpha_{n-1}\right\},\ n = \overline{1,\infty},\ \alpha_0 = \frac{u_0}{N}, \tag{1.3}$$

де $\left\{x\right\}$ - дробова частина числа x.

Не при будь-якому виборі u_0, M і N послідовність псевдовипадкових чисел $\left\{\alpha_n\right\}$ буде достатньо добре імітувати реалізації випадкових чисел. Наприклад, якісний алгоритм отримаємо, вибравши

$$u_0 = 1, N = 2^m, M = 5^{2p+1}, \tag{1.4}$$

де m - число двійкових розрядів у мантисі зображення числа;

p - натуральне число, яке рекомендується вибирати максимальним з тих p, що задовольняють умові $5^{2p+1} < 2^m$.

Логарифмуючи нерівність $5^{2p+1} < 2^m$, отримаємо еквівалентну їй: $p < \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\log_2 5} - 1\right)$. Очевидно, що максимальне ціле p, що задовольняє останній нерівності, дорівнює $p = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\log_2 5} - 1 \right) \right]$, де $[x]$ - ціла частина числа x.

Таким чином, якщо $m = 32$ то, згідно (1.4): $u_0 = 1, N = 2^{32}, M = 5^{13}$.

Недоліком розглянутих вище псевдовипадкових чисел (як імітаційної моделі випадкових чисел) є періодичність послідовності (1.1). При виборі констант u_0, M і N, згідно (1.4), послідовність α_n має період 2^{m-2}. Тому в практичних застосуваннях доцільно використовувати лише обмежену кількість чисел α_n, $n = \overline{0, n_1}$, де $n_1 < 2^{m-2}$.

На рис. 1.1 наведено графічне зображення послідовності псевдовипадкових чисел, отриманої за алгоритмом (1.2) при $u_0 = 1$, $N = 2^{32}$, $M = 5^{13}$.

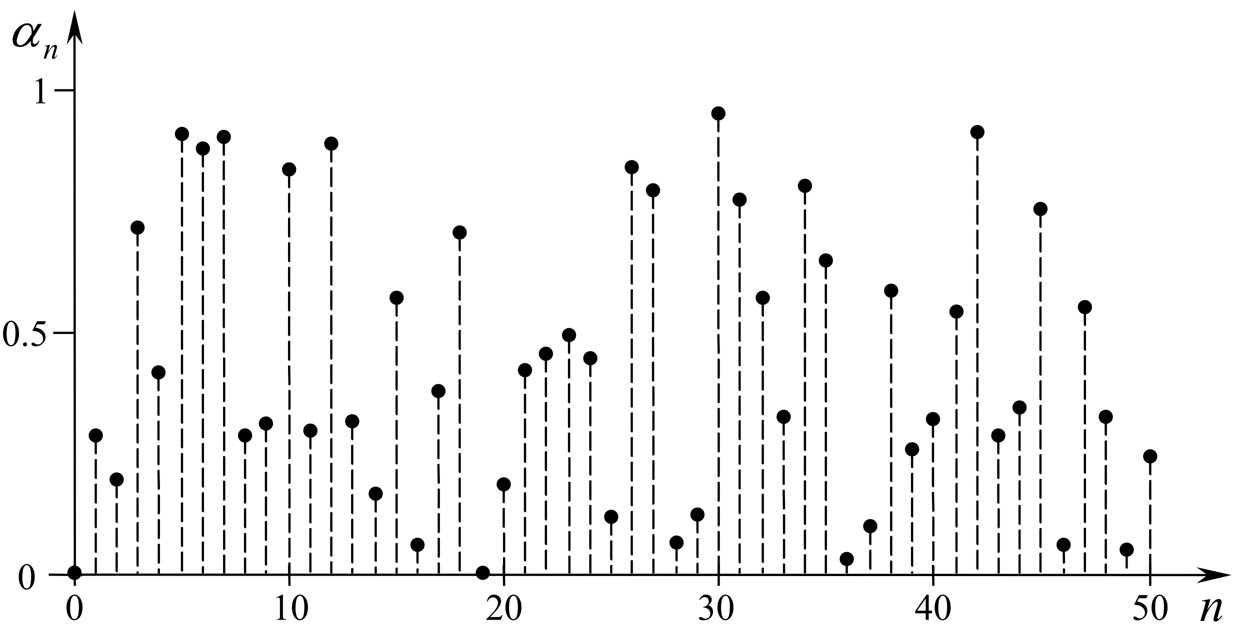

Рисунок 1.1

Те, наскільки добре псевдовипадкові числа імітують реалізації випадкових чисел, можна перевірити, використовуючи методи математичної статистики та спеціальні методи теорії чисел.

Послідовність незалежних рівномірно розподілених у інтервалі [0,1] випадкових величин, власне, і є тою найпростішою випадковою послідовністю, відповідними перетвореннями якої можна отримувати інші, більш складні, випадкові процеси.

Порядок виконання роботи

1. Написати програму для генерування псевдовипадкових чисел $\alpha_n,\ n=\overline{1,K},\quad K=1000$.
2. Представити графічно послідовність псевдовипадкових чисел.
3. Згенеровану послідовність псевдовипадкових чисел оцінити на якість візуально, розмістивши її для цього в одиничному квадраті. Для розміщення використати наступний алгоритм. Якщо $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_K$ - послідовність, то в якості координат точок квадрата взяти пари чисел
$$\left(\alpha_{2k},\alpha_{2k+1}\right),\quad k=0,1,2,...,\frac{K}{2}.$$
4. Отримати оцінки:

   - математичного сподівання

   $$\hat{m}=\frac{1}{K}\sum_{n=1}^{K}\alpha_n\,,$$

   де K - обсяг вибірки; α_n −послідовність псевдовипадкових чисел;

   - дисперсії

   $$\hat{d}=\frac{1}{K-1}\sum_{n=1}^{K}\left(\alpha_n-\hat{m}\right)^2;$$

   - кореляційної функції

   $$\gamma_\tau=\frac{1}{K-\tau}\sum_{n=1}^{K-\tau}\left(\alpha_n-\hat{m}\right)\left(\alpha_{n+\tau}-\hat{m}\right),\ \ \tau=0,1,2,...,n_1<<K\,,$$

   та порівняти їх з відповідними характеристиками випадкових чисел.
5. Побудувати гістограму розподілу змодельованого білого шуму.
6. Перевірити гіпотези на:

a) некорельованість значень білого шуму (на основі оцінки кореляційної функції);
b) рівномірність розподілу білого шуму, використавши для цього критерій згоди χ^2.

7. Оформити звіт з виконаної роботи.

Звіт повинен включати:

- тему, мету роботи;
- короткий виклад основних теоретичних положень;
- графік послідовності псевдовипадкових чисел;
- графічне зображення отриманої послідовності в одиничному квадраті;
- обчислені значення реалізацій оцінок математичного сподівання, дисперсії змодельованого білого шуму і порівняння їх з теоретичними значеннями;
- графік реалізації оцінки кореляційної функції;
- гістограму, згладжуючу її функцію для гіпотетичного розподілу; обчислені значення параметрів цього розподілу; результати перевірки висунутих статистичних гіпотез про відповідність згенерованої послідовності білого шуму поставленим вимогам;
- висновки, в яких необхідно проаналізувати отримані результати, в тому числі вказати на придатність отриманого білого шуму для подальшого використання;
- додатки (тексти програм).

Контрольні запитання

1. Що таке білий шум, в тому числі базовий білий шум; якою є щільність розподілу базового білого шуму?
2. Що таке псевдовипадкові числа?
3. Охарактеризуйте метод лишків генерування псевдовипадкових чисел.
4. Які існують проблеми, пов’язані з генерацією білого шуму програмним методом та шляхи їх вирішення?
5. Які є методи перевірки якості згенерованого білого шуму?

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ №2

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ІЗ ДИСКРЕТНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

***Мета заняття**: набути практичного досвіду комп'ютерного імітаційного моделювання випадкових сигналів із дискретними розподілами.*

Теоретичні відомості

Нехай $\xi_t, t = \overline{0,\infty}$ - послідовність незалежних випадкових величин, кожна з яких має один і той же дискретний розподіл $p_j = \mathbf{P}\left\{\xi_t = x_j\right\}$, $j = \overline{1,m}$, $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_m$ (m - скінченне число або $m = \infty$), $\mathbf{M}\xi_t = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot p_j$, $\mathbf{D}\xi_t = \sum_{j=1}^{m}\left(x_j - \mathbf{M}\xi_t\right)^2 \cdot p_j, \forall t.$ І нехай α_t, $t = \overline{0,\infty}$ - послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених у інтервалі $\left[0,1\right]$.

Розглянемо розбиття відрізка $\left[0,1\right]$ на m інтервалів точками s_0, $s_k = \sum_{j=1}^{k} p_j$, $k = \overline{1,m}$ (див. рис.2.1).

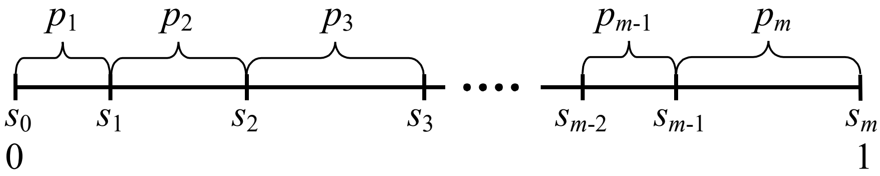

Рисунок 2.1

Легко бачити, що $\mathbf{P}\left\{s_{k\text{-}1} \le \alpha_t < s_k\right\} = s_k - s_{k-1} = \sum_{j=1}^{k} p_j - \sum_{j=1}^{k-1} p_j = p_k$, $k = \overline{1,m}$. Тобто, ймовірність попадання α_t, $\forall t$ в k-ий інтервал $\left[s_{k-1}, s_k\right)$ рівна ймовірності того, що випадкова величина ξ_t, $\forall t$ набуде значення x_k. Звідси, очевидним чином, випливає алгоритм імітаційного моделювання випадкової послідовності ξ_t (алгоритм імітаційного моделювання випадкової послідовності α_t ми розглянули вище). А саме: для будь-якого $t=\overline{0,\infty}$ отримуємо реалізацію α_t і шукаємо той k-ий інтервал $[s_{k-1},s_k)$, у який попадає α_t, тобто $\alpha_t\in[s_{k-1},s_k)$, після цього маємо: $\xi_t=x_k$. Наведений алгоритм можна представити у вигляді наступного співвідношення:

$$\xi_t=\sum_{k=1}^{m}x_k I_t(s_{k-1},s_k),\ t=\overline{0,\infty},$$

де $I_t(s_{k-1},s_k)=\begin{cases}1, & s_{k-1}\le\alpha_t<s_k;\\ 0, & \text{в інших випадках}.\end{cases}$

Звичайно, на практиці, немає потреби наперед здійснювати розбиття відрізка $[0,1]$, а потім аналізувати кожен отриманий підінтервал (особливо, коли $m=\infty$). Достатньо, наприклад, скористатися цілком зрозумілим алгоритмом, блок-схему якого наведено на рис. 2.2.

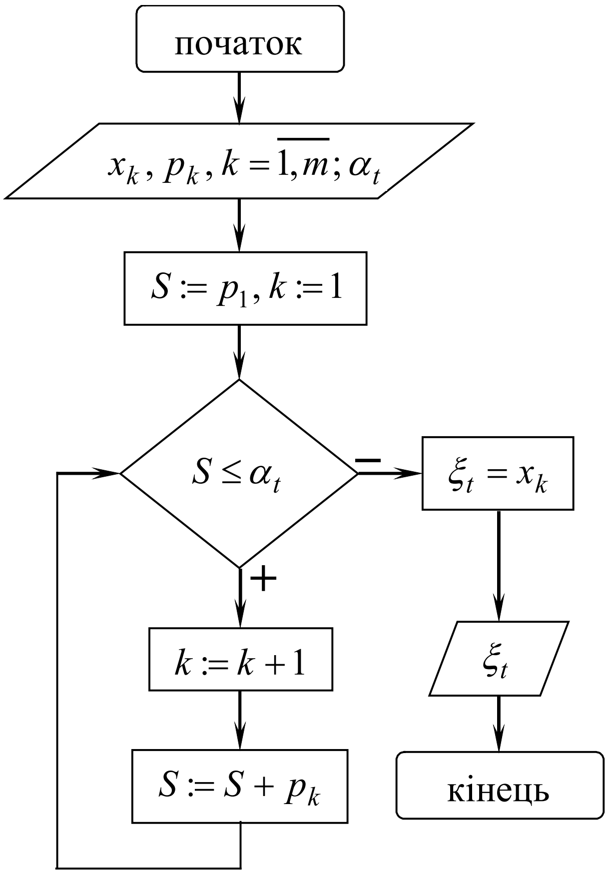

Рисунок 2.2

На рис. 2.3 наведено результати імітаційного моделювання послідовностей незалежних випадкових величин з такими розподілами: Бернуллі $(a;\ p = 0.6)$, біноміальний $(б;\ p = 0.6,\ n = 10)$, Пуассона $(в;\ a = 10)$, геометричний $(г;\ p = 0.3)$.

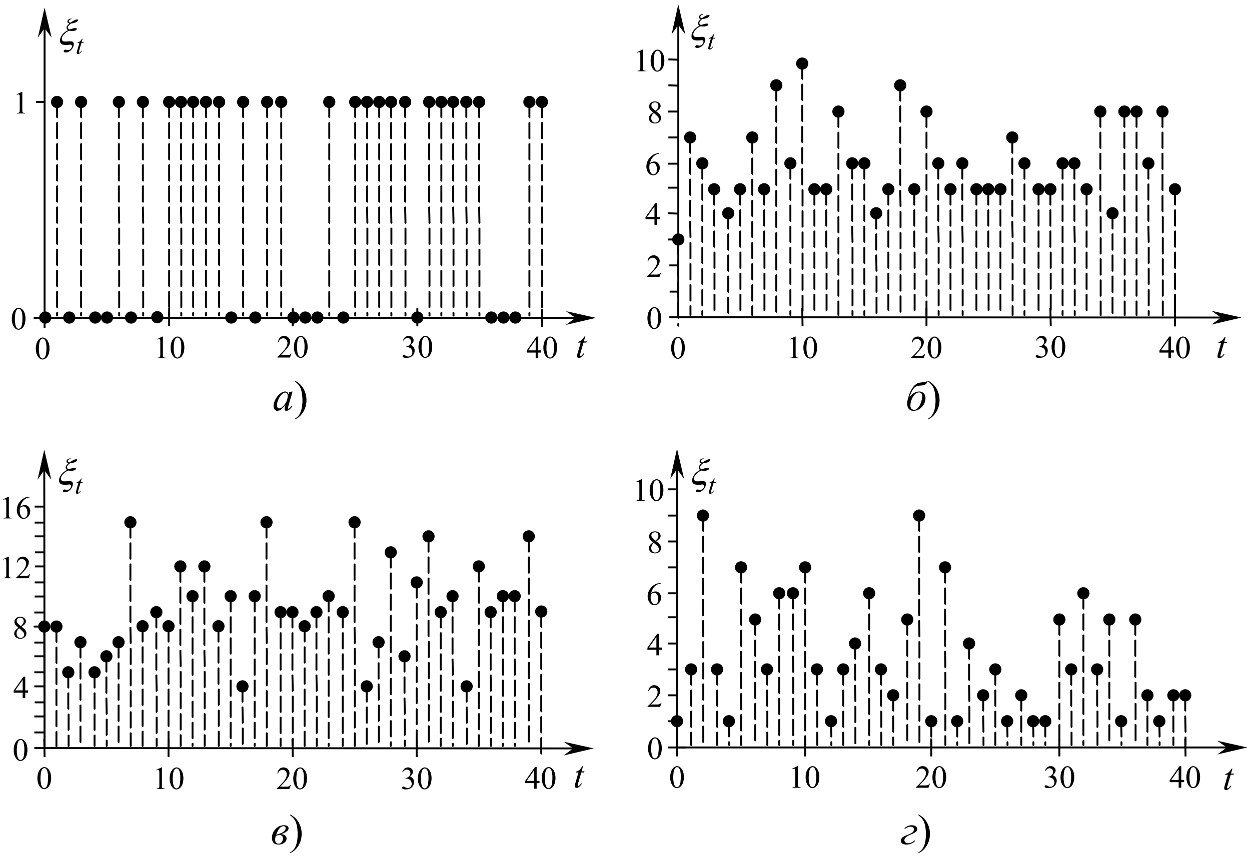

Рисунок 2.3

Порядок виконання роботи

1. Згенерувати реалізації базового білого шуму.
2. Написати програму для генерування реалізацій білого шуму з дискретним розподілом, задавшись при цьому довільною кількістю значень випадкових величин та відповідними їм ймовірностями.
3. Представити графічно реалізації білого шуму з дискретним розподілом.
4. Згенеровану послідовність псевдовипадкових чисел оцінити на якість візуально, розмістивши її для цього на площині. Для розміщення використати наступний алгоритм. Якщо $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_K$

- послідовність, то в якості координат точок взяти пари чисел $\left(\xi_{2k}, \xi_{2k+1}\right), \quad k = 0, 1, 2, ..., \frac{K}{2}$.

5. Отримати оцінки:

   - математичного сподівання $\hat{m} = \frac{1}{K}\sum_{n=1}^{K}\xi_n$,

   де K - обсяг вибірки; ξ_n – випадкова послідовність;

   - дисперсії $\hat{d} = \frac{1}{K-1}\sum_{n=1}^{K}\left(\xi_n - \hat{m}\right)^2$;

   - кореляційної функції

$$\gamma_\tau = \frac{1}{K-\tau}\sum_{n=1}^{K-\tau}\left(\xi_n - \hat{m}\right)\left(\xi_{n+\tau} - \hat{m}\right), \ \ \tau = 0, 1, 2, ..., n_1 << K$$

   змодельованого білого шуму та порівняти їх із теоретичними значеннями.

6. Оформити звіт з виконаної роботі.

   Звіт повинен включати:

   - тему, мету роботи;
   - короткий виклад основних теоретичних положень;
   - графік реалізацій випадкової послідовності з дискретним розподілом; графічне зображення отриманої послідовності на площині;
   - обчислені значення реалізацій оцінок математичного сподівання, дисперсії білого шуму; порівняти їх із заданими значеннями;
   - графік реалізації оцінки кореляційної функції;
   - висновки, в яких необхідно проаналізувати отримані результати;
   - додатки (тексти програм).

Контрольні запитання

1. У чому полягає алгоритм імітаційного моделювання білого шуму з дискретним розподілом?
2. Які є методи перевірки якості згенерованого білого шуму з дискретним розподілом?
3. Як знайти статистичні оцінки математичного сподівання, дисперсії та кореляційної функції?

ЛАБОРАТОРНЕ ЗАНЯТТЯ №3

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ІЗ НЕПЕРЕРВНИМИ РОЗПОДІЛАМИ

***Мета заняття**: набути практичного досвіду комп'ютерного імітаційного моделювання випадкових послідовностей із неперервними розподілами*

Теоретичні відомості

Універсальний метод імітаційного моделювання неперервно розподіленого білого шуму дає наступна

***Теорема 1.** Нехай α - випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $[0,1]$, $F(x)$ - деяка неперервна функція розподілу. Тоді випадкова величина $\xi = F^{-1}(\alpha)$ (де $F^{-1}(x)$, $x \in [0,1]$ - функція обернена до $F(x)$) має функцію розподілу $F(x)$.*

Доведення. Функція розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\left\{F^{-1}(\alpha) < x\right\} = \mathbf{P}\left\{F\left(F^{-1}(\alpha)\right) < F(x)\right\} = \mathbf{P}\left\{\alpha < F(x)\right\}.$$

Функція розподілу випадкової величини α має вигляд:

$$F_\alpha(y) = \mathbf{P}\{\alpha < y\} = \begin{cases} 0, \; y < 0; \\ y, \; 0 \le y \le 1; \\ 1, \; y > 1. \end{cases}$$

Тому $F_\xi(x) = \mathbf{P}\left\{\alpha < F(x)\right\} = \begin{cases} 0, \; F(x) < 0; \\ F(x), \; 0 \le F(x) \le 1; \\ 1, \; F(x) > 1. \end{cases} = F(x).$

Таким чином, якщо змодельовано послідовність α_t, $t = \overline{0,\infty}$, то імітаційне моделювання послідовності ξ_t, $t = \overline{0,\infty}$ незалежних випадкових величин, кожна з яких є неперервно розподіленою з функцією розподілу $F(x)$, здійснюється наступним чином:

$$\xi_t = F^{-1}(\alpha_t),\ t = \overline{0,\infty}.$$

Описаний алгоритм називається *методом оберненої функції*. Варто зауважити, що, по суті, той же метод, але у неявному вигляді, ми використовували вище для імітаційного моделювання дискретних випадкових величин. Основною проблемою при практичній реалізації цього методу є відшукання функції $F^{-1}(x)$ по заданій функції розподілу $F(x)$.

Для низки важливих розподілів ця проблема вирішується без особливих труднощів. Зокрема, простими аналітичними перетвореннями можна отримати обернені функції для:

- рівномірного розподілу: $F^{-1}(x) = (b-a)x + a$;

- експоненційного розподілу: $F^{-1}(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{\lambda}$;

- розподілу Релея: $F^{-1}(x) = \sigma\sqrt{-2\ln(1-x)}$;

- розподілу арксинуса: $F^{-1}(x) = a\cos(\pi(1-x))$.

Таким чином, алгоритм імітаційного моделювання стаціонарного білого шуму, рівномірно розподіленого в інтервалі $[a,b]$ має вигляд: $\xi_t = (b-a)\alpha_t + a$, $t = \overline{0,\infty}$.

Зауважимо тепер, що функція розподілу випадкової величини $1-\alpha$ (α - випадкова величина з рівномірним розподілом у інтервалі $[0,1]$) дорінює:

$$F_{1-\alpha}(x) = \mathbf{P}\{1-\alpha < x\} = \mathbf{P}\{\alpha > 1-x\} = 1 - F_\alpha(1-x) =$$

$$= 1 - \begin{cases} 0, & 1-x < 0; \\ 1-x, & 0 \le 1-x \le 1; \\ 1, & 1-x > 1. \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < 0. \end{cases} = F_\alpha(x).$$

Тобто, випадкові величини α і $(1-\alpha)$ мають однакові розподіли.

Звідси отримуємо наступні алгоритми імітаційного моделювання стаціонарних білих шумів з експоненційним розподілом: $\xi_t = -\dfrac{\ln\alpha_t}{\lambda}$, розподілом Релея: $\xi_t = \sigma\sqrt{-2\ln\alpha_t}$, розподілом арксинуса: $\xi_t = a\cos(\pi\alpha_t)$, $t=\overline{0,\infty}$.

Однак, для багатьох розподілів отримати обернену функцію у вигляді простого аналітичного виразу неможливо. У таких випадках намагаються знайти такий оператор $\mathbf{A}[\cdot]$, щоб було $\xi_t = \mathbf{A}\left[\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}, ..., \xi_t^{(n)}\right]$ (де ξ_t - білий шум, який необхідно змоделювати, а $\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)}, ..., \xi_t^{(n)}$ - білі шуми, імітаційні моделі яких легко отримати методом оберненої функції) або використовують наближені методи імітаційного моделювання [1, 2].

Прикладом розподілу, для якого неможливо знайти простий вираз оберненої функції є розподіл Гаусса. Для імітаційного моделювання білого шуму з розподілом Гаусса використовується наступна

Теорема 2. *Нехай α і η - незалежні випадкові величини, причому α розподілена рівномірно в інтервалі $[0,1]$, а η має розподіл Релея з параметром σ. Тоді випадкові величини $\xi_1 = \eta\cos(2\pi\alpha)$ і $\xi_2 = \eta\sin(2\pi\alpha)$ є незалежними і мають один і той самий розподіл Гаусса $N(0,\sigma)$.*

Таким чином, алгоритм імітаційного моделювання стаціонарного білого шуму з розподілом $N(a,\sigma)$ буде мати такий вигляд. Генеруємо послідовність α_t, $t=0,1,2,...$ і розбиваємо її на дві підпослідовності, наприклад, так: $\alpha_t^{(1)} = \alpha_{2t+1}$ і $\alpha_t^{(2)} = \alpha_{2t}$, $t=0,1,2,...$ (можна, звичайно, просто генерувати послідовності $\left\{\alpha_t^{(1)}\right\}$ і $\left\{\alpha_t^{(2)}\right\}$ за різними алгоритмами). Після цього можна змоделювати дві послідовності незалежних білих шумів з розподілом $N(a,\sigma)$, а саме: $\xi_t^{(1)} = a + \sigma\sqrt{-2\ln\alpha_t^{(1)}}\sin(2\pi\alpha_t^{(2)})$, $\xi_t^{(2)} = a + \sigma\sqrt{-2\ln\alpha_t^{(1)}}\cos(2\pi\alpha_t^{(2)})$, $t=0,1,2,...$.

На рис. 3.1 наведено результати імітаційного моделювання стаціонарних білих шумів з експоненційним розподілом $(a; \lambda = 0.2)$, розподілом Релея $(б; \sigma = 1)$, розподілом арксинуса $(в; a = 1)$, розподілом Гаусса $(г; a = 0, \sigma = 1)$.

Інший, наближений метод імітаційного моделювання гауссівського білого шуму ґрунтується на використанні наслідку центральної граничної теореми, який в даному випадку можна сформулювати наступним чином: незалежні випадкові величини $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ однаково розподілені (рівномірно в інтервалі $[0,1]$) з математичним сподіванням $\mathbf{M}\alpha_n = \frac{1}{2}$ і дисперсією $\mathbf{D}\alpha_n = \frac{1}{12}$, тому при достатньо великому n випадкова величина $\xi_n = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k - \frac{1}{2} \right)$ має наближено нормальний розподіл $N(0,1)$. Достатня, для більшості практичних застосувань, близькість розподілу ξ_n до $N(0,1)$ досягається вже при $n > 10$.

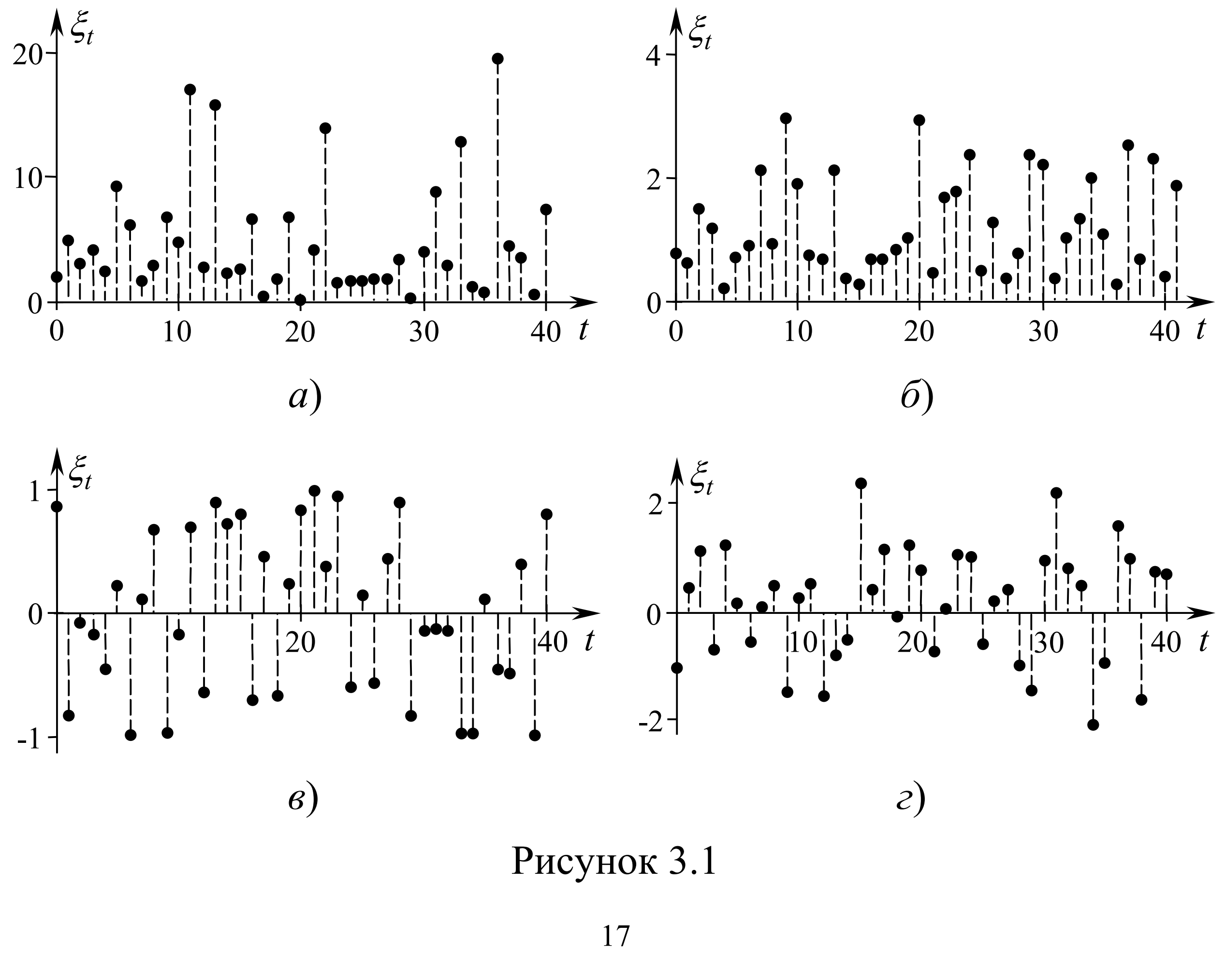

Рисунок 3.1

Практично, розглядуваний метод імітаційного моделювання виглядає наступним чином.

1) Генеруємо послідовність α_t, $t = 0, 1, 2, ...$,

2) отримуємо послідовність незалежних випадкових величин

$$\xi_t = \sqrt{\frac{12}{n}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_{tn+k} \right) - \frac{n}{2} \right], \ t = 0, 1, 2, ...$$

(зручно вибрати $n = 12$) з розподілом, наближеним до $N(0,1)$.

Зрозуміло, що для отримання реалізації ξ_t, обсягом n_1 елементів $\left(t = \overline{0, n_1 - 1}\right)$, необхідно згенерувати $n_1 \cdot n$ псевдовипадкових чисел α_t, $t = \overline{0, n_1 \cdot n - 1}$.

3) Для того, щоб отримати білий шум ξ'_t, $t = 0, 1, 2, ...$ з розподілом, наближеним до $N(a, \sigma)$ тепер достатньо скористатися простим лінійним перетворенням, тобто

$$\xi'_t = \sigma \xi_t + a, \ t = 0, 1, 2, ...$$

Порядок виконання роботи

1. Згенерувати реалізації базового білого шуму.
2. Написати програму для генерування реалізацій білого шуму з неперервними розподілами, задавшись при цьому відповідними параметрами (для експоненційного - λ (№ варіанту), для гауссівського - $a, \sigma > 0$ (взяти довільно)).
3. Представити графічно реалізації білого шуму з неперервними розподілами.
4. Згенеровані послідовності псевдовипадкових чисел оцінити на якість візуально, розмістивши їх для цього на площині (див. попередні лабораторні роботи).
5. Отримати оцінки:
   5.1. Математичного сподівання та дисперсії білого шуму з експоненційним розподілом (див. п.5 порядку виконання лаб.роб. №2) і порівняти їх із теоретичними значеннями:

- математичного сподівання $\mathbf{M}\xi_n = \frac{1}{\lambda}$;
- дисперсії $\mathbf{D}\xi_n = \frac{1}{\lambda^2}$.

5.2. Математичного сподівання та дисперсії білого шуму з гауссівським розподілом (див. п.5 порядку виконання лаб. роб. №2) і порівняти їх із теоретичними значеннями:

- математичного сподівання $\mathbf{M}\xi_n = a$;
- дисперсії $\mathbf{D}\xi_n = \sigma^2$.

6. Оформити звіт з виконаної роботи.

   Звіт повинен включати:
   - тему, мету роботи;
   - короткий виклад основних теоретичних положень;
   - графіки реалізацій випадкових послідовностей відповідно з експоненційним та гауссівським розподілами;
   - графічне зображення отриманих послідовностей на площині;
   - обчислені значення реалізацій оцінок математичного сподівання та дисперсії білих шумів; порівняти їх із теоретичними значеннями;
   - висновки, в яких необхідно проаналізувати отримані результати;
   - додатки (тексти програм).

Контрольні запитання

1. У чому полягає алгоритм імітаційного моделювання білого шуму з неперервним розподілом методом оберненої функції?
2. Охарактеризуйте особливості імітаційного моделювання гауссівських білих шумів.
3. Які є методи методи перевірки якості згенерованого білого шуму з неперервним розподілом?
4. Як знайти статистичні оцінки математичного сподівання та дисперсії?

Рекомендована література

1. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
2. Ситник В. Ф., Орленко Н. С. Імітаційне моделювання: Навч. Посібник. – К.: КНЕУ, 1998. – 232 с.
3. Антонов В.М., Антонова-Рафі Ю.В. Комп’ютерне моделювання зображень: Навчальний посібник. - К.: КНТ, 2007
4. Стеценко І.В. Моделювання систем: навч. посіб. [Електронний ресурс, текст] / І.В. Стеценко ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. 400 с.
5. Томашевський В.М. Моделювання систем. - К.: Видавнича група BHV, 2005.
6. Васильєв В.В., Сімак Л.О. Математичне і комп'ютерне моделювання процесів і систем. - К.: НАН України 2007.
7. Гліненко Л.К., Сухоносов О.Г. Основи моделювання технічних систем: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів.
8. М. Є. Фриз, Л. М. Щербак. Властивості перемішування та ергодичності лінійних процесів у задачах математичного моделювання та статистичного аналізу випадкових сигналів // Моделювання та інформаційні технології: Зб. наук. пр. — К.: ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України, 2009. — Вип. 51. — С. 53-57.
9. Т. В. Михайлович, М. Є. Фриз. Інформаційна система для імітаційного моделювання водоспоживання // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. - 2013. - № 6. - С. 264 - 268.
10. Orfanidis S.J. Optimum signal processing: An introduction. – New York: McGraw-Hill, 1998. – 590 p.
11. H. Pishro-Nik, "Introduction to probability, statistics, and random processes", available at https://www.probabilitycourse.com, Kappa Research LLC, 2014.
12. Sheldon M. Ross, "Introduction to probability Models", 11th Edition, Academic Press, 2014
13. Sheldon M. Ross, "Simulation", Academic Press, 5th edition, 2012
14. M. Fryz and B. Mlynko, "Properties of Stationarity and Cyclostationarity of Conditional Linear Random Processes," 2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in

Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), Lviv-Slavske, Ukraine, 2020, pp. 166-170.
15. M. Fryz, "Mixing property and ergodicity of linear random processes," 2009 IEEE International Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, Rende, Italy, 2009, pp. 343-346.

Інформаційні ресурси

1. Електронний навчальний курс «Методи та системи імітаційного моделювання інформаційних сигналів та систем» (ID: 997)
2. Allen B. Downey, "Modeling and Simulation in Python", Green Tea Press, available at http://greenteapress.com/wp/modsimpy/