

**Міністерство освіти і науки України**

**Тернопільський національний технічний університет  
імені Івана Пулюя**

*Кафедра технічної механіки  
та сільськогосподарських машин*

# **ДИНАМІКА МАШИН**

## **НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

для студентів денної та заочної форм навчання  
спеціальностей

**133 «Галузеве машинобудування»**

**208 «Агроінженерія»**

для здобуття освітнього ступеня  
**«МАГІСТР»**

Тернопіль – 2023

УДК 531.3:631.3

Б12

Укладачі:

**Андрій БАБІЙ**, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин;

**Тарас ДОВБУШ**, кандидат технічних наук, доцент кафедри технічної механіки та сільськогосподарських машин;

**Марія БАБІЙ**, кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобілів;

**Олександр ТКАЧЕНКО**, спеціаліст вищої категорії Борщівського агротехнічного фахового коледжу;

**Микола СТАШКІВ**, кандидат технічних наук, доцент технічної механіки та сільськогосподарських машин.

Рецензенти:

**Павло МАРУЩАК**, проректор з наукової роботи Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, доктор технічних наук, професор;

**Андрій СИРОТЮК**, провідний науковий співробітник Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України, доктор технічних наук, старший науковий співробітник.

*Схвалено й рекомендовано до друку та впровадження у навчальний процес на засіданні вченої ради ТНТУ імені Івана Пулюя, протокол № 4 від 19.04.2022 р.*

Б12

Бабій А.В., Довбуш Т.А., Бабій М.В., Ткаченко О.І., Сташків М.Я. Динаміка машин. Навчальний посібник для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей 133 «Галузеве машинобудування» та 208 «Агроінженерія» для здобуття освітнього ступеня «Магістр». Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя. 2023. 246 с.

© Бабій А.В., Довбуш Т.А., Бабій М.В. Ткаченко О.І., Сташків М.Я.

© Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2023

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП .....</b>	<b>6</b>
<b>ТЕМА 1. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ .....</b>	<b>7</b>
1.1. Основні поняття .....	7
1.2. Вільні коливання без врахування сил опору.....	13
1.3. Отримання розв’язку диференціального рівняння гармонічних коливань..	21
1.4. Аналіз параметрів коливального процесу.....	24
1.5. Використання комплексних функцій для вирішення диференціального рівняння руху осцилятора.....	30
1.6. Механічна енергія коливальної системи.....	33
<b>ТЕМА 2. ГРАФІЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ.....</b>	<b>36</b>
2.1. Метод векторних діаграм.....	36
2.2. Складання гармонічних коливань, що відбуваються по одній прямій .....	43
2.3. Складання взаємно перпендикулярних коливань .....	51
<b>ТЕМА 3. ГАРМОНІЧНИЙ (СПЕКТРАЛЬНИЙ) АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ .....</b>	<b>60</b>
3.1. Гармонічний аналіз періодичних негармонічних рухів .....	60
3.2. Гармонічний аналіз неперіодичних рухів .....	66
3.3. Приклади складання диференціальних рівнянь руху трьома способами.....	69

3.4. Приклади розрахунків.....	73
<b>ТЕМА 4. ВПЛИВ СИЛ ОПОРУ НА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ.....</b>	<b>78</b>
4.1. Затухаючі коливання при дії сил опору.....	78
4.2. Основні характеристики затухаючих коливань.....	86
4.3. Графічне представлення затухаючих коливань.....	95
4.4. Затухаючі коливання при дії на осцилятор постійної сили тертя.....	98
4.5. Умовний критерій затухання коливань.....	104
<b>ТЕМА 5. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>107</b>
5.1. Рівняння вимушених коливань.....	107
5.2. Аналіз амплітуд і фаз вимушених коливань.....	117
5.3. Побудова та аналіз графіків амплітуд та зсувів фаз від частоти.....	124
5.4. Поглинання потужності.....	128
5.5. Аналіз відмінності вимушених коливань в залежності від частот.....	129
5.6. Добротність осцилятора і ширина резонансної кривої.....	134
5.7. Системи з багатьма ступенями вільності.....	138
<b>ТЕМА 6. НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ.....</b>	<b>157</b>
6.1. Вільні нелінійні коливання.....	157
6.2. Вимушені нелінійні коливання.....	172

<b>ТЕМА 7. АВТОКОЛИВАННЯ.....</b>	<b>180</b>
7.1. Загальні відомості про автоколивальні процеси .....	180
7.2. Прикладне застосування автоколивань в конструкціях галузевих машин	185
<b>ТЕМА 8. ВІБРАЦІЙНЕ ПЕРЕМІЩЕННЯ .....</b>	<b>205</b>
8.1. Застосування принципу вібраційного переміщення на практиці .....	205
8.2. Теоретичні основи вібраційного переміщення матеріалу на коливальній площині.....	209
8.3. Умови проходження зерен крізь отвори .....	213
8.4. Середня швидкість руху матеріалу по коливальній площині.....	215
<b>ТЕМА 9. ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ .....</b>	<b>219</b>
9.1. Незатухаючі параметричні коливання .....	219
9.2. Рівняння Мат'є. Діаграма Айнса – Стретта.....	223
9.3. Коливання оберненого маятника.....	225
9.4. Параметричні коливання в приводі кривошипно-шатунного механізму...	227
9.5. Стійкість коливальної системи.....	232
<b>ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....</b>	<b>240</b>

## ВСТУП

Дисципліна «ДИНАМІКА МАШИН» викладається з метою підвищення теоретичного і практичного професійного рівня здобувачів ступеня «МАГІСТР» при розв'язанні динамічних задач, якими моделюють ряд машини та процесів в галузевому машинобудуванні та агроінженерії. Це досягається шляхом опанування студентами основних задач динаміки та вміннями моделювати динамічні процеси для реальних об'єктів.

В даний час, з використанням цифрових технологій, створені умови для безперешкодного доступу до величезних об'ємів інформації. Це, з одного боку, великий позитив, а з іншого – викликає певні труднощі. Що стосується навчального процесу, то студентів для засвоєння конкретної теми потрібно переосмислити багато інформації і це призводить до того, що він губиться у масі матеріалу, а ефект його вивчення може бути діаметрально протилежним. Тому одним із шляхів вирішення такої проблеми є укладання науково-педагогічними працівниками різних посібників, які чітко відповідають тим темам, які розглядаються в курсі.

У навчальному посібнику «Динаміка машин» стисло та в достатньому об'ємі викладено теоретичний матеріал, де розкрито наступні теми: вільні коливання механічної системи; графічне представлення вільних коливань; гармонійний (спектральний) аналіз коливань; вплив сил опору на вільні коливання механічної системи; вимушені коливання механічних систем; нелінійні коливання механічних систем; автоколивання; вібраційне переміщення; параметричні коливання. Опрацювання вказаних тем, відповідно до робочих програм курсів, дозволить студентам набути програмних результатів навчання, що регламентовані освітньо-професійними чи освітньо-науковими програмами підготовки магістрів відповідної спеціальності.

Посібник добре проілюстрований, наведено достатню кількість практичних прикладів, є питання для самоконтролю – всі ці чинники направлені на ефективне сприйняття матеріалу та отримання вищої якості освіти при підготовці здобувачів.

# ТЕМА 1. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

## 1.1. Основні поняття

Динаміка машин вивчає закони руху матеріальних тіл під дією сил, які цей рух викликають.

Дисципліна «Динаміка машин» базується на основних законах динаміки і має за мету їх використання при описі динамічних процесів реальних галузевих машин.

Пригадаємо основні поняття, що використовуються в динаміці:

**матеріальна точка** – матеріальне тіло дуже малих розмірів, при поступальному русі якого, його обертовим рухом можна знехтувати;

**вільною** називається матеріальна точка, якщо на її рух не накладено жодних обмежень (в'язів), і навпаки, **невільною**, якщо такі обмеження в русі матеріальної точки є;

**інертність** – це властивість матеріального тіла продовжувати рух, після того як перестають діяти сили, що цей рух викликали або поступово змінювати цей рух (за часом) при початку дії сил;

**перший закон Ньютона** (закон інерції) – «Ізольована матеріальна точка зберігає свою швидкість незмінною за абсолютною величиною та за напрямком»;

**другий закон** (основний закон динаміки) – «Прискорення, що надається матеріальній точці силою, яка до неї прикладена, має напрямок сили та за модулем пропорційна цій силі», тобто

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (1.1)$$

$m$  – маса, кг;

$\bar{a}$  – прискорення, м/с<sup>2</sup>;

**третій закон** (закон рівності дії та протидії) – «Сили, з якими тіла діють одне на одного, рівні за модулем направлені в протилежні сторони по одній

прямій»;

**четвертий закон** (закон незалежності дії сил) – «При одночасній дії декількох сил прискорення матеріальної точки дорівнює векторній сумі прискорень, які мала би точка при дії на неї окремо кожної з сил», тобто

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \dots + \overline{a}_n,$$

$$\text{де } \overline{a}_1 = \frac{\overline{F}_1}{m}, \overline{a}_2 = \frac{\overline{F}_2}{m}, \dots, \overline{a}_n = \frac{\overline{F}_n}{m}.$$

Для аналізу ефективності роботи та проектування галузевих машин необхідно досліджувати динамічні процеси, які там виникають. Оскільки навіть приведенні статичні навантаження не дають вичерпної відповіді щодо дійсного навантаження окремого елемента, а також це має суттєве значення щодо характеру його руйнування. Тому дисципліна «Динаміка машин» здебільшого направлена на вивчення основних типів коливальних процесів, які виникають в системах при різних навантаженнях (збуреннях).

За своєю природою розрізняють механічні, електричні та оптичні коливання. Ці типи коливань є відмінними, але одночасно з тим мають між собою відповідні аналогічні закономірності.

Оскільки метою дисципліни є вивчення динаміки галузевих машин (агропромислового комплексу, харчового обладнання, верстатів тощо), то в основі розгляду коливальних процесів будуть механічні коливання.

**Механічні коливання** – це рух тіла, при якому тіло відхиляється то в одну, то в другу сторону від положення рівноваги при дії на нього сил, які змінюються за напрямком та величиною.

Якщо на тіло, яке коливається, накладені в'язі, то утворюється **коливальна система** або **осцилятор**.

Механічні коливання, що виникають в техніці можна класифікувати за зовнішніми ознаками, тобто законом зміни руху. Таку класифікацію ще називають **кінематичною**.



Розрізняють два основні класи коливань – **періодичні і неперіодичні**. В літературі можна зустріти ще термін «**майже періодичні коливання**».

**Періодичні коливання** – будь-яка величина, що коливається, яка зафіксована в довільний момент часу, має такі ж значення через однакові проміжки часу (період)  $T$ . Математичний опис періодичної функції

$$f(t + T) = f(t), \quad (1.2)$$

$t$  – час (змінна).

Графічно це можна зобразити так, рис. 1.1.

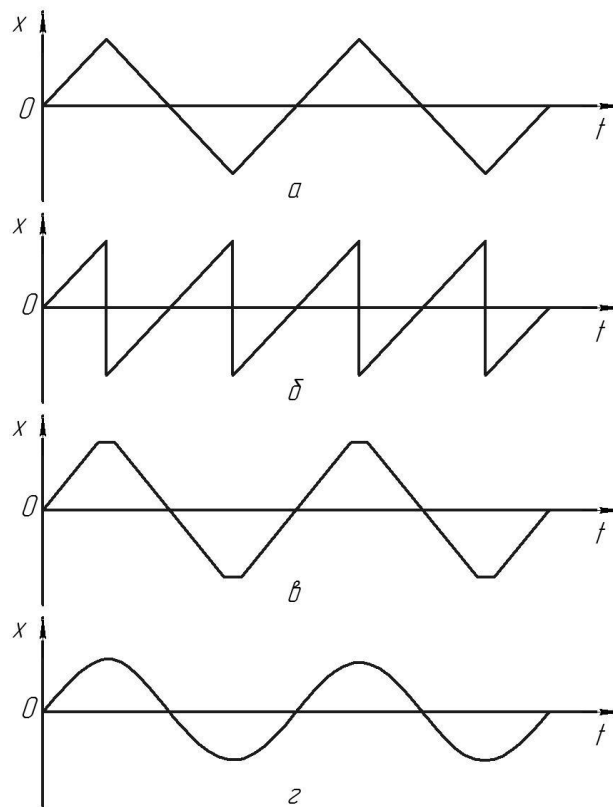


Рисунок 1.1

Звідси випливає, що одне повне коливання здійснюється за один і той же час.

**Неперіодичні коливання** не витримують наведеної умови (1.2), тобто повні коливання виникають за різних проміжків часу, рис. 1.2.

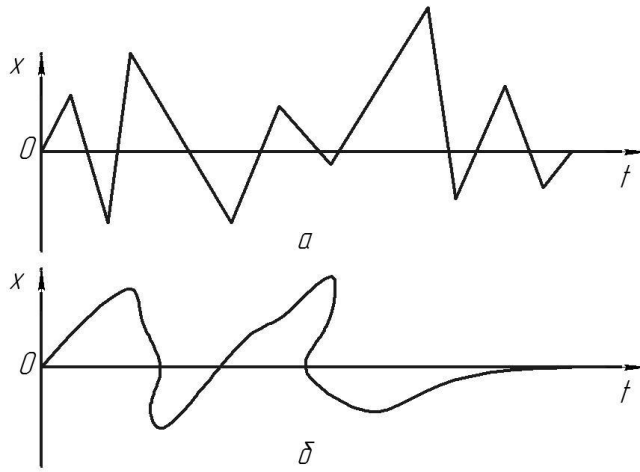


Рисунок 1.2

**Майже періодичні коливання** визначаються умовою

$$|f_1(t + \tau) - f_1(t)| \leq \varepsilon, \quad (1.3)$$

де  $\tau$  і  $\varepsilon$  – визначені постійні величини. Тут  $\tau$  – «майже період».

Якщо  $\varepsilon$  має досить мале значення у порівнянні з модулем функції  $f_1(t)$ , то загалом майже періодичну функцію коливального процесу можна розглядати як періодичну.

Спочатку розглянемо періодичні коливання. На рис. 1.1 показано різний вигляд законів руху осцилятора. Досить багато задач коливань в механіці моделюють за законами синуса чи косинуса (простими гармонічними законами).

В залежності якими рівняннями описано динамічний рух системи, розрізняють **лінійні коливання** (опис проведено лінійними рівняннями) та **нелінійні коливання** (опис проведено нелінійними рівняннями).

Коливання поділяють на **вільні** (незатухаючі та затухаючі) і **вимушені**.

За енергетичним принципом коливання діляться на **консервативні** (енергія при коливаннях зберігається) та **неконсервативні** (енергія витрачається на подолання сил опорів).

Кожен клас коливань ділять на різні підкласи (типи), про які ми

розглянемо пізніше.

Будь-яка машина є складною механічною системою. Теоретичний аналіз динаміки галузевих машин з урахуванням всіх особливостей їх функціонування досить важкий, тому на практиці при розрахунках використовують прості скінченні моделі. Практика показує, що використання таких моделей приносить значно більше користі, ніж складніших моделей з ймовірно вищою точністю.

При виборі розрахункової схеми, перш за все, вирішують питання про число **ступеней вільності**. Мірою вільності коливань називають число незалежних координат механічної системи, що повністю визначають положення всіх її точок. Реальна механічна система складається з нескінченного числа матеріальних точок. Оскільки зв'язки між ними не є абсолютно жорсткими, то число ступеней вільності такої системи нескінченно велике. Проте, залежно від конкретно вирішуваного завдання можна без втрати точності визнати кінцеве число ступеней вільності. Експериментальні дослідження галузевих машин в лабораторних і виробничих умовах показали, що у багатьох випадках їх можна представити у вигляді механічної системи з одним ступенем вільності, що істотно спрощує вирішення динамічних завдань.

Можна виділити три способи утворення скінченномірних моделей.

**Перший спосіб** полягає в тому, що відносно менш масивні частини системи вважаються зовсім позбавленими маси і представляються у вигляді безінерційних елементів, а найбільш жорсткі частини конструкції беруться за абсолютно тверді тіла з кінцевою масою.

Відповідно до **другого способу** розподілені по всьому об'ємі системи властивості податливості локалізуються в кінцевому числі точок. При цьому система представляється у вигляді сукупності пружно зчленованих жорстких елементів.

**Третій спосіб** заснований на деяких апріорних припущеннях про зміни конфігурації системи в процесі коливань (форми коливань). Якщо форма задана, то положення всіх точок системи визначене, отже, в системі є одна ступінь вільності.

Дослідження динамічної моделі механічної системи полягає в записі та вирішенні диференціальних рівнянь руху. Оскільки рух обумовлений силами, то розглянемо їх види.

**Узагальнені вимушуючі сили** – зовнішні сили  $P(t)$  є заданими функціями часу. Джерела виникнення вимушуючих сил дуже різноманітні: незрівноважені сили інерції рухомих мас, сили тиску газової суміші в циліндрах двигунів внутрішнього згорання, опір ґрунту робочим органам ґрунтообробних машин і ін. Дуже різні і закони їх зміни в часі, хоча на практиці найчастіше зустрічаються періодичні вимушуючі сили.

**Узагальнені позиційні сили** – сили, які залежать від положення системи, тобто від узагальнених координат. Серед позиційних сил особливе значення мають **поновлюючі сили**, тобто сили, що виникають при відхиленнях системи від положення рівноваги і направлені так, щоб повернути систему в це положення. У механічних системах з пружними елементами поновлюючими силами є **сили пружності**. При дослідженні руху галузевих машин часто поновлюючими силами є **сили опору робочих органів**.

Залежності поновлюючих сил від узагальнених координат, як правило, нелінійні, проте при дослідженні малих рухів, що у багатьох випадках достатньо, допустима лінеаризація таких залежностей.

До позиційних сил відносяться **сили тертя**, які в тій чи іншій мірі залежать від узагальнених швидкостей і направлені протилежно руху.

Зазвичай сили тертя перешкоджають розвитку коливань, проте в деяких випадках можуть порушити коливання (автоколивання, про які буде сказано далі).

## 1.2. Вільні коливання без врахування сил опору

**Вільними (власними)** називають коливання, що виникають в ізольованій системі, які виникли за рахунок зовнішнього збурення (виведення системи з положення рівноваги чи надання початкової швидкості) та підтримуються за рахунок відновлюючих сил.

Якщо в осциляторі сили тертя та інші опори надто малі (або теоретично відсутні) у порівнянні з відновлюючими силами, то такі коливання називаються **вільними незатухаючими**. Тіло, що коливається, можна моделювати як матеріальну точку чи абсолютно тверде тіло.

Такий осцилятор після виведення його з положення рівноваги почне колитися під дією внутрішніх сил  $\overline{F}$  чи моментів від цих сил  $\overline{M}$ , які будуть повертати його до положення рівноваги.

Коливання осцилятора, який моделюється як матеріальна точка, підпорядковуються другому закону Ньютона (1.1)

$$m\overline{a} = \overline{F}.$$

Якщо осцилятор моделюється абсолютно твердим тілом, то коливання підпорядковуються рівнянню моментів обертового руху

$$J\overline{\beta} = \overline{M}, \quad (1.3)$$

де  $J$  – момент інерції системи відносно осі обертання;

$\overline{\beta}$  – кутове прискорення;

$\overline{M}$  – момент сил, що діють в системі.

Вважаючи, що коливальні системи мають одну ступінь вільності, то відповідно до записаних законів (1.1) та (1.3) можна їх записати в проекціях на відповідні координатні осі.

Для матеріальної точки, яка рухається по прямій лінії, запишемо

динамічний закон в проекції на вісь  $x$

$$ma_x = F_x \quad \text{або} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(x), \quad (1.4)$$

де  $x$  – координати тіла, що коливається.

При обертовому русі запишемо (1.3) відносно осі  $z$ , навколо якої проходить коливання твердого тіла

$$J\beta_z = M_x \quad \text{або} \quad J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M_z(\alpha), \quad (1.5)$$

тут  $\alpha$  – кут відхилення абсолютно твердого тіла від положення рівноваги.

Описані твердження розглянемо на найпростіших прикладах.

Маємо осцилятор, рис. 1.3.

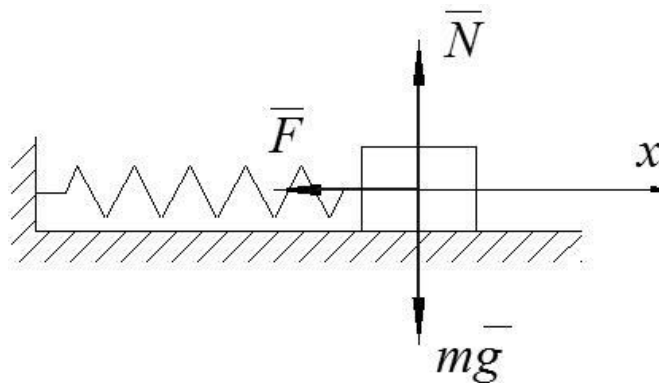


Рисунок 1.3

Як видно з рис. 1.3, що вантаж масою  $m$  знаходиться на горизонтальній основі та до опор приєднаний з допомогою пружного елемента (пружини) з жорсткістю  $k$ . Після виведення системи з рівноваги маса  $m$  буде здійснювати коливальні рухи вздовж горизонталі. Тут припускаємо, що масою пружини у порівнянні з масою вантажу, а також силою тертя можна знехтувати.

Наша задача полягає в тому, щоб дослідити кінематичні параметри

коливальної системи, рис. 1.3. Мета досягається через опис даної системи диференціальним рівнянням руху маси та аналізом отриманих розв'язків.

Як було відзначено вище, що такі системи підпорядковані другому закону Ньютона, запишемо його вираз для конкретного прикладу, рис. 1.3.

В загальному випадку сила інерції системи буде рівна векторній сумі діючих сил на масу (масою тут будемо називати тіло, що моделюється в розрахунковій схемі як матеріальна точка).

$$m\bar{a} = \bar{F} + m\bar{g} + \bar{N}, \quad (1.6)$$

де  $\bar{F}$  – сила пружності пружини;

$m\bar{g}$  – сила ваги вантажу, що коливається;

$\bar{N}$  – нормальна реакція опори.

Оскільки система має одну ступінь вільності – рух можливий тільки вздовж осі  $x$ , то проектуємо вектори діючих сил на цю вісь, отримаємо

$$ma_x = F_x.$$

Зауважимо, що сила ваги та нормальна реакція опори проектуються в нуль, а за умовою сила тертя відсутня. Отже, на масу діє тільки сила пружності пружини, яка є відновлюючою силою. Запишемо її значення в припущенні, що деформація пружини є такою, що сила пружності змінюється за лінійним законом

$$F = k \Delta l, \quad (1.7)$$

де  $\Delta l$  – деформація пружини,  $\Delta l = |x|$ , якщо відлік від положення рівноваги.

Тоді, повертаючись до проекції сили  $F$  на вісь  $x$ , отримаємо

$$F_x = -k x. \quad (1.8)$$

Далі записуємо другий закон Ньютона для даної системи – диференціальне рівняння руху осцилятора

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (1.9)$$

Виконаємо деякі перетворення в (1.9), та приведемо дане рівняння до стандартного вигляду:

– переносимо праву частину рівняння в ліву та ділимо на масу  $m$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0;$$

– **квадрат власної частоти коливань** позначимо так

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Тоді рівняння (1.9) набуде стандартного вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (1.10)$$

Тут легко можна бачити, що отримано лінійне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, розв'язки якого добре відомі. Форма коливань – гармонічна.

Далі розглянемо осцилятор за прикладом фізичного маятника, рис. 1.4.



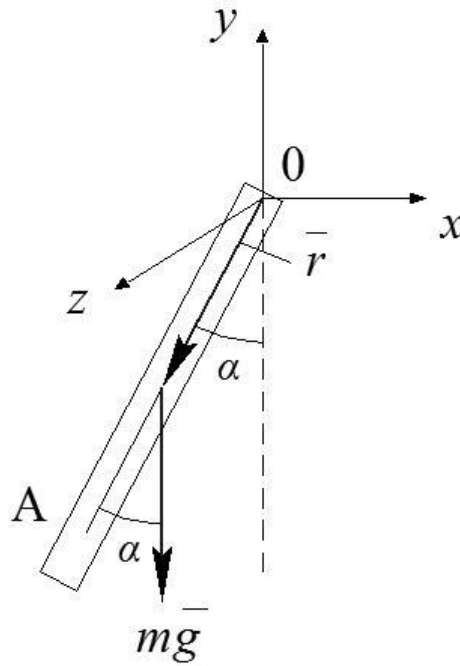


Рисунок 1.4

Тут маємо однорідний стержень, який має масу  $m$ , шарнірно закріплений та обертається навколо осі  $z$ .

Його закон руху описано виразом (1.5), де модуль моменту сили ваги відносно точки шарнірного закріплення  $O$  набуде вигляду  $M = mgr \sin \alpha$ , де  $\alpha$  – кут відхилення стержня від положення рівноваги (кутове переміщення).

Тут прийняте правило знаків: «-» – момент направлений проти ходу стрілки годинника.

Тоді

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgr \sin \alpha, \quad (1.11)$$

де  $r$  – відстань від осі обертання до центру ваги стержня.

Аналогічним чином виконуємо певні стандартні перетворення як і в попередньому випадку, тобто

$$\frac{mgr}{J} = \omega^2.$$

Тоді рівняння (1.11) набуде вигляду

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega^2 \sin \alpha = 0. \quad (1.12)$$

В дійсності рівняння (1.12) є нелінійним, але через відносну малість кута  $\alpha$  (без доведення) можна прийняти, що  $\sin \alpha \approx \alpha$ , тоді  $M_z = -mgr \alpha$ , а рівняння (1.12) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0. \quad (1.13)$$

Отримане рівняння є також лінійним, а коливання гармонічними.

Частковим випадком фізичного маятника, який ми розглянули, може бути фізичний маятник, рис. 1.5.

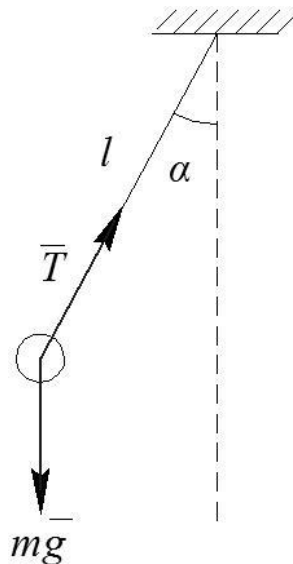


Рисунок 1.5

Тут вважаємо, що маса  $m$  (матеріальна точка) підвішена на невагомій нитці довжиною  $l$  і здійснює коливальні рухи. Для даного випадку момент інерції вантажу відносно осі обертання буде становити  $J = ml^2$ , кут  $\alpha$  також

вважаємо відносно малим, тоді  $\frac{g}{l} = \omega^2$ , а рівняння руху маятника матиме вигляд

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0. \quad (1.14)$$

Коливання будуть гармонічними. Варто зауважити, що відмінність виразів (1.14) та (1.13) полягає у визначенні квадрату власної частоти.

І наведено ще один характерний приклад осцилятора, рис. 1.6.

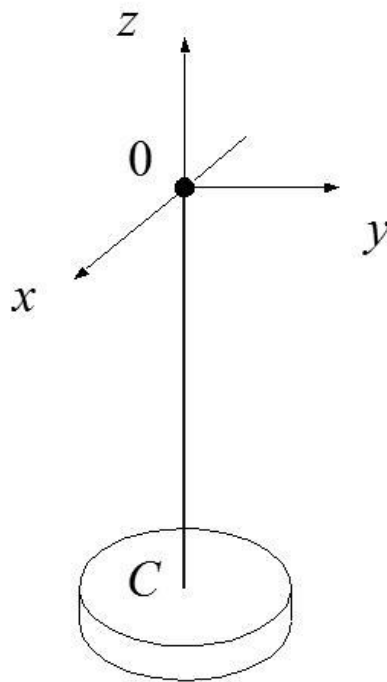


Рисунок 1.6

Розглянемо однорідний диск, який в своєму центрі ваги підвішений на пружній невагомій нитці ОС. При виведенні диска з рівноваги обертанням він буде здійснювати коливальні рухи. Поновлюючим моментом тут буде момент від сили пружності від закручування нитки на кут  $\alpha$  (кут відносно малий для дотримання лінійної залежності)

$$M = D\alpha,$$

де  $D$  – коефіцієнт пружності нитки.

Тоді за аналогією

$$J\bar{\beta} = \bar{M}, \quad (1.15)$$

де  $J$  – момент інерції диска відносно осі ОС.

За вісь обертання приймемо вісь  $z$ , тоді запишемо другий закон Ньютона в проекції на цю вісь

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -D \alpha,$$

ділимо обидві частини на момент інерції диска

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{D}{J} \alpha = 0,$$

вводимо позначення квадрату власної частоти

$$\frac{D}{J} = \omega^2$$

і остаточно запишемо динамічне рівняння руху осцилятора у вигляді суцільного диска

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0. \quad (1.16)$$

Так само як і в попередніх випадках було отримано лінійне диференціальне рівняння другого порядку, а виникаючі коливання – гармонічними.

Таким чином, всі наведені приклади об'єднує аналогічний вигляд кінцевого диференціального рівняння. Тому можна зосередитись на одному з

наведених осциляторів, вивчити властивості розв'язків глибше, а на інші типи розв'язки переносити за аналогією.

### 1.3. Отримання розв'язку диференціального рівняння гармонічних коливань

Вирішення диференціального рівняння рух приведемо на прикладі осцилятора, рис. 1.3.

Для якого записано за другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху та виконано приведення до стандартного вигляду. Коротко пригадаємо процедуру:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0, \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}, \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (1.17)$$

Отримане диференціальне рівняння повинно мати такі розв'язки:

$$x_1 = A_\omega \sin \omega t \text{ або } x_2 = B_\omega \cos \omega t. \quad (1.18)$$

Щоб перевірити чи отримано правдиві корені розв'язку будь-якого рівняння, варто отриманий результат підставити в початкове рівняння та переконатись, що вони перетворюють його в тотожність.

Оскільки отримані корені є функціями часу ( $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ), то потрібно знайти першу і другу їх похідні та підставити у рівняння (1.17).

Виконаємо цю процедуру

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d(A_\omega \sin \omega t)}{dt} = A_\omega \omega \cos \omega t,$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2(A_\omega \sin \omega t)}{dt^2} = -A_\omega \omega^2 \sin \omega t;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d(B_\omega \cos \omega t)}{dt} = -B_\omega \omega \sin \omega t,$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d^2(B_\omega \cos \omega t)}{dt^2} = -B_\omega \omega^2 \cos \omega t.$$

Перевіримо чи перетворять отримані корені рівняння (1.17) у тотожність.

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = -A_\omega \omega^2 \sin \omega t + \omega^2 A_\omega \sin \omega t = 0,$$

отримаємо тотожність. Корінь  $x_1 = A_\omega \sin \omega t$  – задовольняє розв’язок рівняння.

Для кореня  $x_2 = B_\omega \cos \omega t$ :

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = -B_\omega \omega^2 \cos \omega t + \omega^2 B_\omega \cos \omega t = 0,$$

умова тотожності виконується – корінь  $x_2$  також задовольняє розв’язок рівняння (1.17).

Виходячи з цього, загальний розв’язок рівняння (1.17) матиме наступний вигляд

$$x = x_1 + x_2 = A_\omega \sin \omega t + B_\omega \cos \omega t. \quad (1.19)$$

Отриманий загальний розв’язок перепишемо у наступному вигляді, не порушуючи його змісту.

Щоб значення дроби не було змінено, чисельник та знаменник можна помножити на одне і те саме число.

Введемо вираз  $\sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2}$  (геометрична сума амплітуд  $A$  і  $B$ ), на який

поділимо і помножимо праву частину загального розв'язку (1.19), отримаємо

$$x = \sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2} \left( \frac{A_\omega}{\sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2}} \sin \omega t + \frac{B_\omega}{\sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2}} \cos \omega t \right). \quad (1.20)$$

Значення отриманого виразу (1.20) абсолютно не змінилося, але для нас це дозволить виділити важливі властивості загального розв'язку рівняння (1.17).

Якщо припустити, що загальний розв'язок існує у вигляді (1.19), то

$$\frac{A_\omega}{\sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2}} < 1, \quad \frac{B_\omega}{\sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2}} < 1$$

і неважко переконатись, що

$$\left( \frac{A_\omega}{\sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2}} \right)^2 + \left( \frac{B_\omega}{\sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2}} \right)^2 = 1.$$

Тоді за основною тригонометричною тотожністю будемо мати

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$\text{де: } \frac{A_\omega}{\sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{B_\omega}{\sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2}} = \sin \varphi.$$

Тоді (1.20) набуде вигляду

$$x = \sqrt{A_\omega^2 + B_\omega^2} (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi),$$

$$\text{тут } \sqrt{A_{\omega}^2 + B_{\omega}^2} = A.$$

Використовуючи формулу для складання і виділення аргументів

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi,$$

тоді вираз загального розв'язку рівняння (1.17) набуде кінцевого вигляду

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.21)$$

де  $A$  – амплітуда коливань (характеризує їх розмах);

$\omega$  – циклічна частота коливань ( $\frac{\omega}{2\pi}$  – число коливань за одиницю часу);

$t$  – час;

$\varphi$  – початкова фаза коливань;

$\omega t + \varphi$  – фаза коливань (визначає положення точки в будь-який момент часу).

#### 1.4. Аналіз параметрів коливального процесу

Вище було вказано на те, що  $A$  – амплітуда коливань, вона характеризує їх розмах. Як це розуміти?

Відомо, що  $\sin$  як тригонометрична функція будь-якого аргументу знаходиться в межах  $\pm 1$ , тому амплітуда коливань при  $\sin(\omega t + \varphi) = \pm 1$  може сягати  $A = |x_{\max}|$ , де  $|x_{\max}|$  – модуль максимального відхилення маси від положення рівноваги є **амплітудою**.



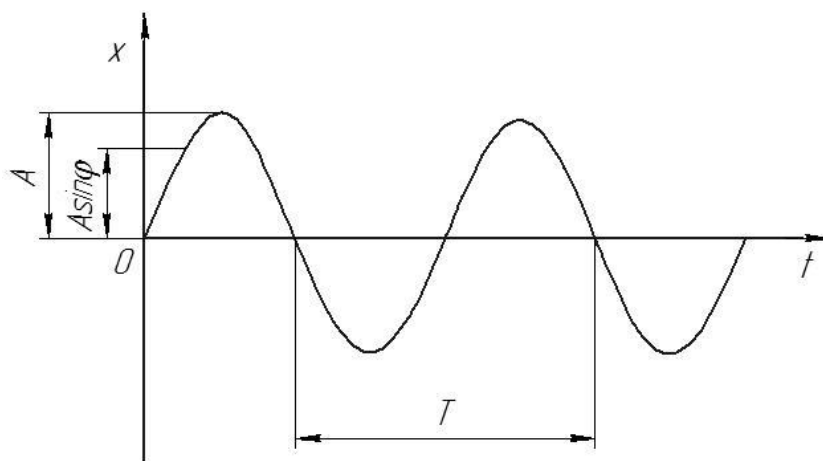


Рисунок 1.7

Якщо взяти початковий момент коливань, коли  $t = 0$ ,  $\omega t = 0$  і вираз (1.21) набуде вигляду

$$x_0 = A \sin \varphi, \quad (1.22)$$

де  $\varphi$  – **початкова фаза коливань**, яка характеризує початкове положення маси, що коливається.

Визначимо період гармонічних коливань для розглянутих осциляторів.

Закон руху набув вигляду

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.23)$$

Таким чином, маємо гармонічну тригонометричну функцію, яка описує розглядуваний коливальний процес. Така функція (1.23) є періодичною та повторюється через  $2\pi$ . Періодом коливань  $T$  для такої залежності буде час, після якого точка з координатою  $x$  буде мати таке ж значення та напрямок швидкості.

Це означає, що буде виконуватись рівність

$$A \sin(\omega t_1 + \varphi) = A \sin(\omega(t_1 + T) + \varphi),$$

а різниця фаз становитиме  $2\pi$ , тобто

$$\omega(t_1 + T) + \varphi - (\omega t_1 + \varphi) = 2\pi.$$

Звідси  $\omega T = 2\pi$  або  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – **циклічна частота** (кількість коливань за час періоду  $2\pi$ ),  $\text{с}^{-1}$ .

Тепер, використовуючи основні залежності, можна записати **періоди коливань** розглянутих коливальних систем:

– для пружного осцилятора, рис. 1.3

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}};$$

– для фізичного маятника, рис. 1.4

$$\omega^2 = \frac{mgr}{J}, \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgr}{J}}, \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr}};$$

– для математичного маятника, рис. 1.5

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

– для крутильних коливань суцільного диска, рис. 1.6

$$\omega^2 = \frac{D}{J}, \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{J}}, \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}.$$

Покажемо **взаємозв'язок між амплітудою, початковою фазою від початкових параметрів (умов).**

Розглянемо найпростіший випадок, коли закон руху набув вигляду (1.23)

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

За відомим законом руху точки, взявши першу похідну, матимемо її швидкість, тобто

$$\mathcal{V} = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.24)$$

максимальна швидкість буде спостерігатися, коли складова  $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ , тоді

$$\mathcal{V}_{\max} = A\omega.$$

Розглянемо початкові умови при  $t = 0$ , тоді

$$x_0 = A \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = A \sin \varphi, \quad (1.25)$$

аналогічно початкова швидкість

$$\mathcal{V}_0 = A\omega \cos \varphi. \quad (1.26)$$

Виділимо з (1.25)  $\sin \varphi$

$$\sin \varphi = \frac{x_0}{A}, \quad (1.27)$$

а з (1.26)  $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{\mathcal{V}_0}{A\omega}. \quad (1.28)$$

**Початкова фаза коливань  $\varphi$**  буде визначатись через  $\operatorname{tg} \varphi$  (відношення

$\sin \varphi$  до  $\cos \varphi$ )

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{x_0 A \omega}{A \mathcal{G}_0} = \frac{x_0 \omega}{\mathcal{G}_0}, \quad (1.29)$$

тоді

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega}{\mathcal{G}_0}. \quad (1.30)$$

Встановимо взаємозв'язок між амплітудою  $A$  та початковими умовами. За основною тригонометричною тотожністю матимемо

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$

Це означає, що

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{\mathcal{G}_0^2}{A^2 \omega^2} = 1,$$

звідки

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\mathcal{G}_0^2}{\omega^2}}. \quad (1.31)$$

Навівши вирази (1.30) та (1.31), бачимо конкретні співвідношення між початковою фазою коливань  $\varphi$ , амплітудою  $A$  та початковими параметрами  $x_0$  та  $\mathcal{G}_0$ , а також циклічною частотою  $\omega$ , яка визначається конкретними властивостями осцилятора.

Далі розглянемо **вид кінематичних рівнянь при заданих початкових умовах.**

Припустимо, що початкова швидкість виведення осцилятора з положення рівноваги рівна  $\mathcal{G}_0 = 0$ , а початкове відхилення становить  $x_0$  (масу відхилили, перемістили на величину  $x_0$  та відпустили без надання початкової швидкості  $\mathcal{G}_0$ , тобто вивели з положення рівноваги вказаним способом).

За таких умов та, використовуючи (1.31), амплітуда  $A$  становитиме

$$A = \sqrt{x_0^2} = x_0.$$

При цьому, якщо  $\mathcal{G}_0 = 0$ , то (нагадаємо, що  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \omega}{\mathcal{G}_0}$ )  $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ , тоді відповідно  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Повернемося до закону руху  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ , перепишемо його у вигляді

$$x = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ або } x = x_0 \cos \omega t. \quad (1.32)$$

Швидкість коливальної маси становитиме

$$\mathcal{G} = \frac{d(x_0 \cos \omega t)}{dt} = -x_0 \omega \sin \omega t. \quad (1.33)$$

З виразу (1.33) видно, що  $x_0 \omega = \mathcal{G}_{\max}$ . Тоді (1.33) можна переписати

$$\mathcal{G} = -\mathcal{G}_{\max} \sin \omega t. \quad (1.34)$$

Розглянемо випадок, коли масі (тілу) осцилятора, яка знаходиться в стані рівноваги ( $x_0 = 0$ ), **надали початкової швидкості  $\mathcal{G}_0$** .

При цьому, якщо  $x_0 = 0$ , то ( $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \omega}{\mathcal{G}_0}$ )  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ , тоді відповідно  $\varphi = 0$ .

Амплітуда –  $A = \sqrt{\frac{\mathcal{G}_0^2}{\omega^2}} = \frac{\mathcal{G}_0}{\omega}$ .

Закон руху набуде вигляду

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\mathcal{G}_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (1.35)$$

Швидкість точки становитиме

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cos \omega t . \quad (1.36)$$

### 1.5. Використання комплексних функцій для вирішення диференціального рівняння руху осцилятора

Приведемо диференціальне рівняння руху матеріальної точки, яка здійснює гармонічні незатухаючі коливання (1.10)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 .$$

За теорією диференціальних рівнянь, розв'язок такого рівняння можна представити, застосувавши комплексну функцію, та записати у вигляді

$$x = C e^{rt} , \quad (1.37)$$

де  $C$ ,  $r$  – постійні величини;  $e = 2,718$  – математична стала (число Ейлера).

Перевіримо чи отриманий вираз (1.37) є справді коренем рівняння (1.10). Знайдемо похідні:

– перша похідна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(Ce^{rt})}{dt} = C r e^{rt} ,$$

– друга похідна

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2(Ce^{rt})}{dt^2} = C r^2 e^{rt} .$$

Отримані складові підставимо у рівняння (1.10) та перевіримо чи воно

перетворюється в тотожність

$$Cr^2e^{rt} + \omega^2Ce^{rt} = 0. \quad (1.38)$$

Проаналізуємо отриману залежність (1.38). Згрупуємо таким чином

$$Ce^{rt}(r^2 + \omega^2) = 0.$$

Звідси випливає, якщо  $Ce^{rt} \neq 0$ , то  $r^2 + \omega^2 = 0$ , де  $r = \pm i\omega$ , але якщо будь-яке від'ємне число піднести до квадрату, отримаємо додатне. Це означає, що є необхідність скористатися **уявною одиницею**, яку записують у вигляді  $i = \sqrt{-1}$ .

Тоді коренями рівняння (1.10) будуть вирази

$$x_1 = C_1e^{i\omega t}, \quad x_2 = C_2e^{-i\omega t},$$

а загальне рішення рівняння (1.10) при використанні комплексної функції матиме вигляд

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{або} \quad x = C_1e^{i\omega t} + C_2e^{-i\omega t}, \quad (1.39)$$

де  $C_1, C_2$  – постійні коефіцієнти (комплексні величини виду  $b = \alpha + \beta i$ , де  $\alpha$  – дійсна (Re) частина комплексного числа  $b$ ,  $\beta i$  – уявна частина).

Пригадаємо формулу Ейлера

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha,$$

тоді за аналогією

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t, \quad e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t.$$

Перепишемо вираз загального розв'язку (1.39) у вигляді

$$x = C_1 \cos \omega t + C_1 i \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - C_2 i \sin \omega t ,$$

згрупуємо

$$x = (C_1 + C_2) \cos \omega t + (C_1 - C_2) i \sin \omega t . \quad (1.40)$$

Вважаємо, що

$$C_1 = b \cos \alpha + bi \sin \alpha , \quad C_2 = b \cos \alpha - bi \sin \alpha ,$$

тоді

$$C_1 + C_2 = 2b \cos \alpha ; \quad C_1 - C_2 = 2bi \sin \alpha . \quad (1.41)$$

Тоді, підставляючи (1.41) в (1.40), отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$x = 2b(\cos \alpha \cos \omega t - \sin \alpha \sin \omega t) . \quad (1.42)$$

Залежність (1.42) можна переписати у вигляді

$$x = 2b \cos(\omega t + \alpha) . \quad (1.43)$$

Якщо позначити  $2b = A$ , то

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) . \quad (1.44)$$

Розв'язок (1.44) може бути представлений також у вигляді

$$x = A e^{i(\omega t + \alpha)} . \quad (1.45)$$



Тут потрібно розуміти, що розв'язком  $x$  є дійсна (Re) частина комплексного числа

$$x = \operatorname{Re}(x) = A \cos(\omega t + \alpha).$$

## 1.6. Механічна енергія коливальної системи

Повна енергія коливальної системи рівна сумі потенціальної енергії  $E_n$  та кінетичної  $E_k$

$$E = E_n + E_k, \quad (1.46)$$

тут маємо  $E_n = \frac{kx^2}{2}$ ,  $E_k = \frac{m\mathcal{G}^2}{2}$ .

Попередньо для осцилятора було встановлено, що його закон руху при гармонічних коливаннях буде мати вигляд  $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ , швидкість при цьому  $\mathcal{G} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$ . Підставимо записані вирази у залежності для визначення потенціальної та кінетичної енергій осцилятора:

– потенціальна енергія

$$E_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{k(A \sin(\omega t + \varphi))^2}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2}; \quad (1.47)$$

– кінетична енергія

$$E_k = \frac{m\mathcal{G}^2}{2} = \frac{m(A\omega \cos(\omega t + \varphi))^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2}, \quad (1.48)$$

пригадаємо, що квадрат власної частоти позначали як  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , звідки  $k = \omega^2 m$ , тоді

$$E_n = \frac{\omega^2 m A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2}.$$

Тепер повна енергія осцилятора становитиме

$$\begin{aligned} E = E_n + E_k &= \frac{\omega^2 m A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2} + \frac{m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2} = \\ &= \frac{m A^2 \omega^2}{2} (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) = \frac{m A^2 \omega^2}{2}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що повна механічна енергія осцилятора є величина стала, тобто

$$E = const.$$

Середня потенціальна енергія осцилятора за період (без доведення)

$$\langle E_n \rangle = \frac{1}{2T} \frac{m A^2 \omega^2}{2}. \quad (1.49)$$

Середня кінетична енергія осцилятора за період

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2T} \frac{m A^2 \omega^2}{2}. \quad (1.50)$$

Таким чином підтверджується, що

$$\langle E_n \rangle = \langle E_k \rangle.$$

### **Перелік контрольних питань:**

1. Що вивчає дисципліна «Динаміка машин»?
2. Дати визначення таким поняттям: «матеріальна точка», «інертність».
3. Викласти основну суть 1-4 законів Ньютона.
4. Що таке механічні коливання?
5. Осцилятор? Навести приклад.
6. Приклад періодичних, неперіодичних коливань.
7. Пояснити на прикладах виникнення вільних та вимушених коливань.
8. Ступені вільності механічної системи.
9. Три способи утворення скінченномірних моделей.
10. Узагальнені вимушуючі сили.
11. Узагальнені позиційні сили.
12. Поняття поновлюючих сил. Приклади.
13. Визначення вільних незатухаючих коливань?
14. Записати другий закон Ньютона. Пояснити складові.
15. Навести аналогії другого закону Ньютона для прямолінійного та обертового рухів матеріальної точки.
16. Фізичний та математичний маятники, в чому їх відмінність?
17. Як перевірити чи знайдені корені є справді розв'язком рівняння?
18. Навести вираз основної тригонометричної тотожності?
19. Пояснити «амплітуда коливань»?
20. Що таке початкова фаза коливань?
21. Поняття: період коливань, циклічна частота, початкові умови?
22. Зміст використання комплексних функцій для вирішення диференціального рівняння руху осцилятора?
23. Що таке уявна одиниця при використанні комплексних функцій?
24. Записати вирази кінетичної та потенціальної енергій системи.
25. Як співвідносяться кінетична та потенціальна енергії системи осцилятора за період?

## ТЕМА 2. ГРАФІЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

### 2.1. Метод векторних діаграм

Запишемо рівняння для координати  $x$ , швидкості  $\mathcal{V}$  і прискорення  $a$  як функції часу  $t$ .

Порівняємо фази між швидкістю і зсувом та між прискоренням і зсувом. З цією метою вирази для  $x$ ,  $\mathcal{V}$  і  $a$  представимо у вигляді:

$$\begin{aligned}x &= A \sin(\omega t + \varphi), \\ \mathcal{V} &= \mathcal{V}_{\max} \cos(\omega t + \varphi), \\ a &= -a_{\max} \sin(\omega t + \varphi).\end{aligned}$$

Порівняємо фази між швидкістю і зсувом та між прискоренням і зсувом. Тому вирази  $x$ ,  $\mathcal{V}$  і  $a$  представимо у вигляді:

$$\begin{aligned}x &= A \sin(\omega t + \varphi), \\ \mathcal{V} &= \mathcal{V}_{\max} \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}), \\ a &= a_{\max} \sin(\omega t + \varphi + \pi).\end{aligned}$$

Звідси видно, що фаза швидкості більша від фази переміщення на  $\pi/2$ , тобто швидкість випереджає переміщення на  $\pi/2$ . Фаза прискорення більша від фази переміщення на  $\pi$ , тобто прискорення випереджає переміщення на  $\pi$ . Період зміни  $x$ ,  $\mathcal{V}$  і  $a$  однаковий.

Для зображення зсуву фаз між  $x$ ,  $\mathcal{V}$  і  $a$  зручно використовувати «метод векторних діаграм». У цьому методі амплітуди переміщення  $A$ , швидкості  $\mathcal{V}_{\max}$  і прискорення  $a_{\max}$  беруть за вектори.

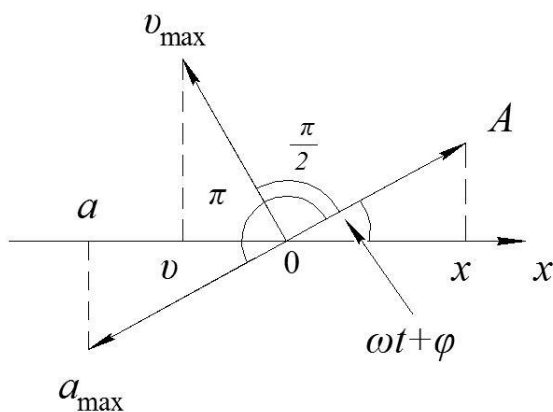


Рисунок 2.1

Зобразимо вісь  $x$  горизонтально і відкладемо з точки  $0$  початку координат вектор амплітуди зміщення амплітуди зсуву  $A$  під кутом  $(\omega t + \varphi)$  до осі  $x$ , амплітуду швидкості  $\mathcal{G}_{\max}$  перпендикулярно до амплітуди переміщення (під кутом  $(\omega t + \varphi + \pi/2)$ ) і амплітуду прискорення  $a_{\max}$  під кутом  $\pi$  до амплітуди переміщення (під кутом  $(\omega t + \varphi + \pi)$ ) до осі  $x$  (рис. 2.1). Миттєві значення  $x$ ,  $\mathcal{G}$  і  $a$  на діаграмі зображають через проекції відповідних амплітуд на вісь  $x$  (вектори амплітуд обертаються з однаковою кутовою швидкістю  $\omega$  щодо осі, що проходить через точку  $0$  перпендикулярно кресленню проти ходу стрілки годинника).

### Плоскі діаграми

Плоскими діаграмами називають графіки залежності координати  $x$  і швидкості  $\mathcal{G}$ , прискорення  $a$  від часу  $t$ . Ці величини виражаються через функції синуса або косинуса, кут яких залежить від часу  $t$ .

Ці функції є періодичні з періодом  $2\pi$ . Період коливань дорівнює періоду  $T$ . Період  $2\pi$  співставляється з періодом  $T$ . Тому при побудові графіків час  $t$  зручно виражати в долях періоду  $T$  і, відповідно, зіставляти з кутами, вираженими в радіанах.

Для знаходження часу  $t$ , вираженого в долях періоду  $T$ , що відповідає даному куту, можна скористатися діаграмою (рис. 2.2).

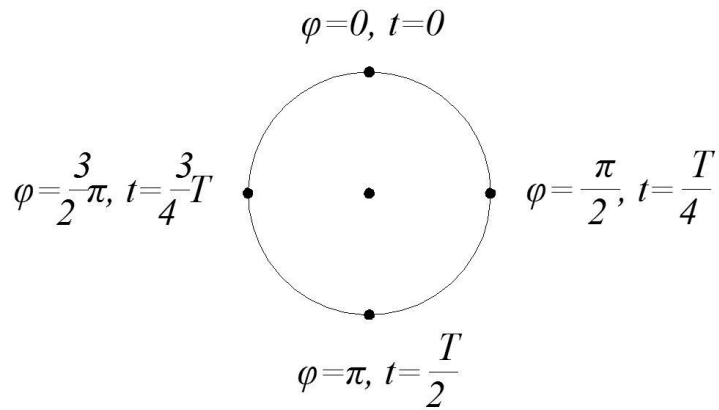


Рисунок 2.2

При побудові графіків, коли початкова фаза не дорівнює нулю, необхідно знайти значення часу  $t$ , відповідно початковій фазі  $\varphi = 0$ , у долях періоду. Побудувати графік синуса або косинуса, оскільки якби  $\varphi = 0$ , і потім перемістити на момент обчисленого часу і, отже, вісь  $x$  на це значення, прийнявши його за нульовий відлік.

**Наприклад**, нехай  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , знайдемо відповідно до цього кута час  $t$ . Куту

$2\pi$  відповідає час  $T$ , куту  $\frac{\pi}{4}$  – час  $\Delta t$ . Відповідно до цього,  $\Delta t = T/8$ .

Побудуємо графік  $x = A \sin \omega t$  і зсунемо вісь  $x$  на  $\Delta t = T/8$ . Це буде графік функції  $x = A \sin(\omega t + \pi/4)$ , рис.2.3.

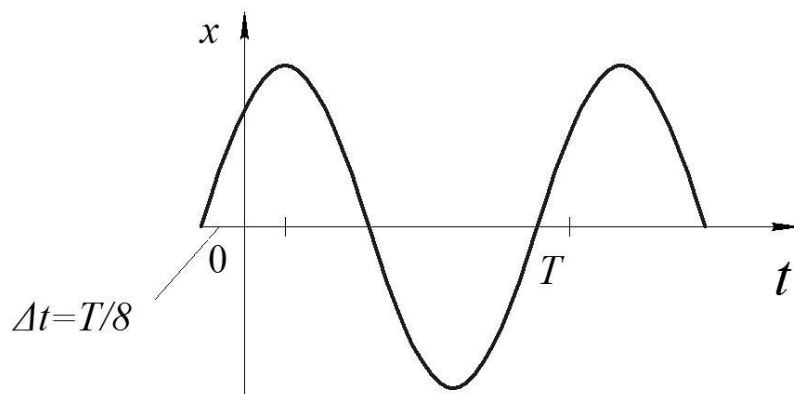


Рисунок 2.3

Приймемо для простоти  $\varphi = 0$  і побудуємо графіки, що показують, як

мінються  $x$ ,  $\mathcal{G}$  і  $a$  (див. рис. 1.8) з часом. Час  $T$  відповідає зсуву фази на  $2\pi$ .

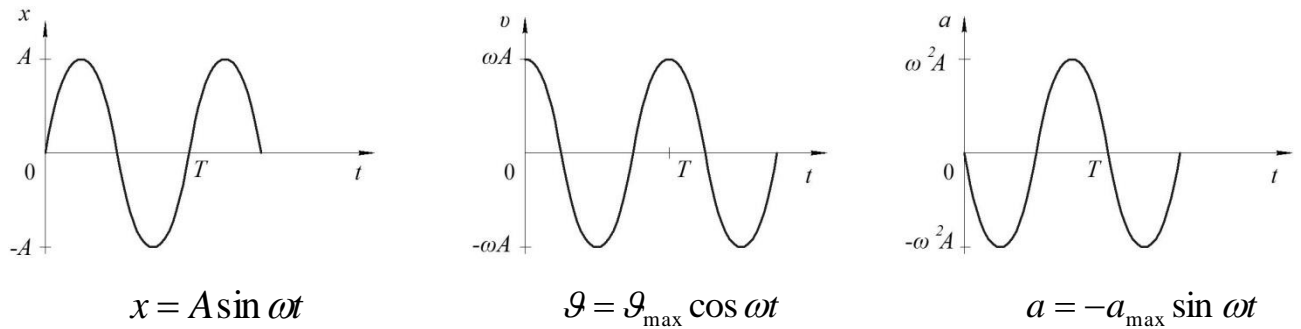


Рисунок 2.4

Запишемо рівняння для кінетичної енергії  $E_k$  і потенціальної енергії  $E_{II}$  як функцій часу:

$$E_k = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi),$$

$$E_{II} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Період зміни  $E_k$  і  $E_{II}$  рівний  $T/2$  і  $E_k > 0$  і  $E_{II} > 0$ , і їх коливання відбуваються біля середнього значення  $\langle E_k \rangle$  або  $\langle E_{II} \rangle$ . Щоб побудувати графік залежності енергії від часу, представимо

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2},$$

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2},$$

тоді

$$E_{II} = \frac{mA^2\omega^2}{4} \sin^2(1 - \cos 2\omega t),$$

$$E_k = \frac{mA^2\omega^2}{4} \sin^2(1 + \cos 2\omega t),$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  – період коливань осцилятора,

$E_{II} = 0$ , якщо  $\cos 2\omega t = +1$ ,  $2\omega t = 2n\pi$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Знайдемо значення часу, при яких потенціальна енергія дорівнює нулю.

$$n = 0; \cos 0 = 1; \quad 2\omega t = 0; \quad t = 0;$$

$$n = 1; \cos 2\pi = 1; \quad 2\omega t = 2\pi; \quad 2 \frac{2\pi}{T} \cdot t = 2\pi; \quad t = \frac{T}{2}$$

$$n = 2; \cos 4\pi = 1; \quad 2\omega t = 4\pi; \quad 2 \frac{2\pi}{T} \cdot t = 4\pi; \quad t = T \text{ і т.д.}$$

$E_{II} = E_{II \max}$ , якщо  $\cos 2\omega t = -1$ ,  $2\omega t = 2n\pi + \pi$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Знайдемо значення часу, при яких потенціальна енергія максимальна

$$n = 0; \cos \pi = -1; \quad 2\omega t = \pi; \quad 2 \frac{2\pi}{T} \cdot t = \pi; \quad t = \frac{T}{4};$$

$$n = 1; \cos 3\pi = -1; \quad 2\omega t = 3\pi; \quad 2 \frac{2\pi}{T} \cdot t = 3\pi; \quad t = \frac{3}{4}T;$$

$$n = 2; \cos 5\pi = -1; \quad 2\omega t = 5\pi; \quad \frac{2\pi}{T} \cdot t = 5\pi; \quad t = \frac{5}{4}T \text{ і т.д.}$$

$E_{II} = mA^2\omega^2/4$ , якщо  $\cos 2\omega t = 0$ ,  $2\omega t = n\pi + \frac{\pi}{2}$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Знайдемо відповідні значення часу.

$$n = 0; \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad 2\omega t = \frac{\pi}{2}; \quad 2 \frac{2\pi}{T} \cdot t = \frac{\pi}{2}; \quad t = \frac{T}{8};$$

$$n = 1; \cos \frac{3\pi}{2} = 0; \quad 2\omega t = \frac{3\pi}{2}; \quad 2 \frac{2\pi}{T} \cdot t = \frac{3\pi}{2}; \quad t = \frac{3}{8}T;$$

$$n = 2; \cos \frac{5\pi}{2} = 0; \quad 2\omega t = \frac{5\pi}{2}; \quad 2 \frac{2\pi}{T} \cdot t = \frac{5\pi}{2}; \quad t = \frac{5}{8}T.$$



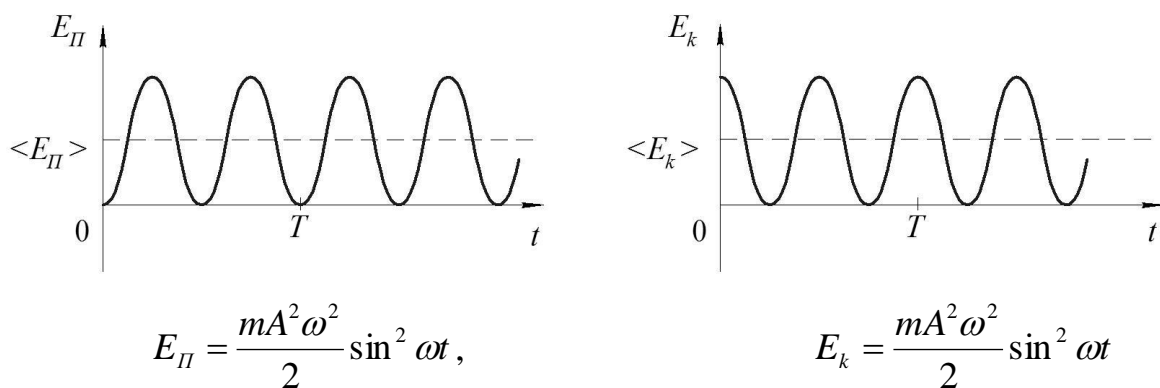


Рисунок 2.5

Відклавши отримані значення  $E_{\text{П}}$  на графіку функції  $E_{\text{П}} = E_{\text{П}}(t)$ , отримаємо графік, зображений на рис. 2.5. Коливання енергії відбуватимуться навколо значення  $mA^2\omega^2/4$  з періодом в два рази меншим, ніж коливання осцилятора.

Аналогічно можна побудувати графік залежності кінетичної енергії  $E_k = E_k(t)$ .

### Фазові діаграми

При побудові фазових діаграм по осі абсцис відкладають переміщення  $x$ , а по осі ординат швидкість  $\dot{x}$ . З плином часу зображувана на діаграмі точка описує криву  $f(x, \dot{x}) = 0$ , яка називається фазовою траєкторією.

Фазові діаграми можна будувати для довільних видів рухів. Наприклад, для гармонічних коливань

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \\ \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0); \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \\ \frac{\dot{x}}{\omega} = A \cos(\omega t + \varphi_0); \end{cases}$$

Візьмемо піднесемо дану систему до квадрату та додамо

$$x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 = A^2.$$

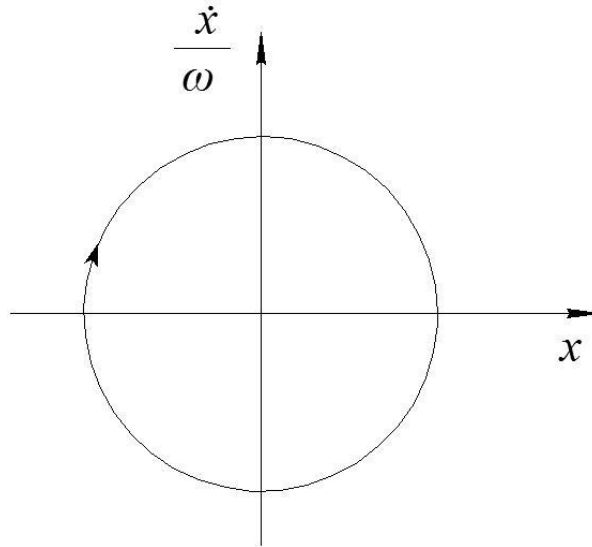


Рисунок 2.6

Дане рівняння є рівнянням кола з радіусом  $A$ . При гармонічному русі по осі ординат часто відкладають «приведену швидкість» –  $\dot{x}/\omega$ . Фазова діаграма, побудована для розглядуваного руху показана на рис. 2.6.

При рівних амплітудах зміщення фазові траєкторії відрізняються одна від іншої початковим положенням точки і швидкістю її руху по траєкторії. Для довільних періодичних рухів фазова траєкторія – замкнута крива.

### **Спектральний метод представлення гармонічного руху**

По горизонталі відкладається частота, а по вертикалі – амплітуда. У випадку чистих гармонічних коливань, безперервних в часі, спектр складається з однієї вертикальної лінії (рис. 2.7).

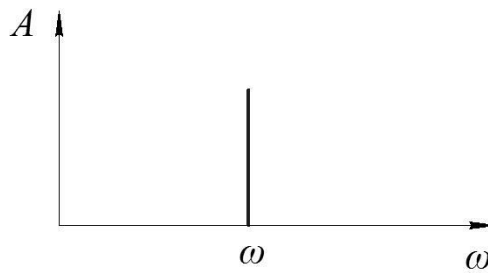


Рисунок 2.7

## 2.2. Складання гармонічних коливань, що відбуваються по одній прямій

### Складання двох коливань однакової частоти

Осцилятор може брати участь в декількох коливальних процесах. Наприклад, тіло може коливатися при дії на нього двох пружин однакової жорсткості. При дії однієї пружини коливання відбувалися б згідно із законом

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1).$$

При дії іншої пружини коливання відбувалися б згідно із законом

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

В результаті одночасної дії на тіло двох пружин коливання відбуватимуться згідно із законом

$$x = x_1 + x_2.$$

Для знаходження  $x$  зручно скористатися методом векторних діаграм (рис. 2.8).

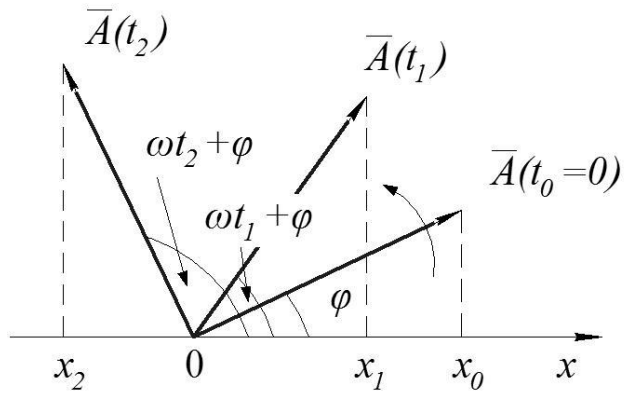


Рисунок 2.8

Прийmemo амплітуду умовно за вектор  $\vec{A}$ , який обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Початкове положення вектора  $\vec{A}$  визначається початковою фазою  $\varphi$ . Проекція вектора  $\vec{A}$  на вісь  $x$  і буде зміщення  $x$  тіла, що коливається від положення рівноваги.

При складанні коливань, що відбуваються по одній прямій, треба від точки  $0$  відкласти два вектори (рис. 2.9)  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$  під кутами  $\alpha_1 = \omega t + \varphi_1$  і  $\alpha_2 = \omega t + \varphi_2$ . Кут  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \varphi_2 - \varphi_1$  – кут між векторами  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$  не залежить від  $t$ , тому рисунок можна зробити для моменту  $t = 0$ .

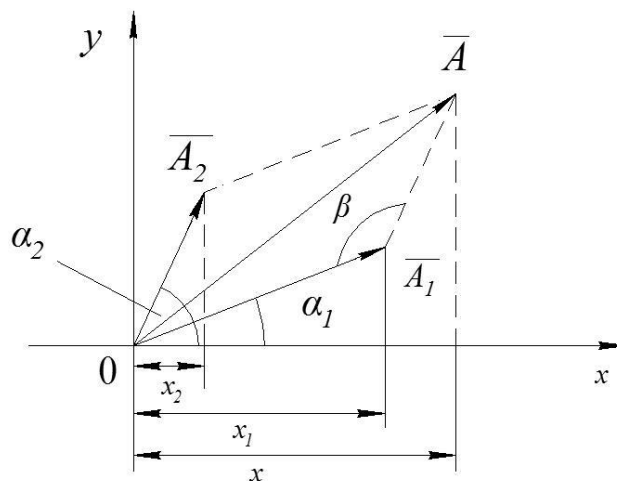


Рисунок 2.9

Тоді

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \quad (2.1)$$

у проекції на вісь  $x$

$$x = x_1 + x_2. \quad (2.2)$$

За теоремою косинусів

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \beta; \quad \beta = \pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Результуюча амплітуда

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (2.3)$$

Знайдемо початкову фазу сумарного коливання.

Для моменту  $t = 0$   $x = A \cos \varphi$ , враховуючи співвідношення (2.2):

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2. \quad (2.4)$$

Проекція рівняння (2.1) на вісь  $y$

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2. \quad (2.5)$$

Розділивши (2.5) на (2.4), отримаємо

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (2.6)$$

Таким чином, тіло, беручи участь в двох гармонічних коливаннях

одного напрямку і однієї частоти, здійснюватиме гармонічне коливання в тому ж напрямі і з тією ж частотою, що і коливання, які складаються.

Розглянемо два випадки

1) якщо різниця фаз коливань, що складаються  $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm 2n\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$ , тоді  $A = A_1 + A_2$ .

2) Якщо  $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm(2n + 1)\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$ , тоді  $A = A_2 - A_1$ .

### Биття

Зазвичай дуже важко досягти випадку, коли кругові частоти коливань, що складаються, рівні. Якщо складаються коливання одного напрямку, але їх частоти трохи відрізняються одна від одної, то виникають коливання, які називають биттям.

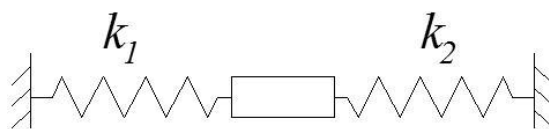


Рисунок 2.10

Припустимо, що маятник здійснює вільні гармонічні коливання уздовж однієї координатної осі під дією двох сил з різними частотами, що незначно відрізняються, наприклад, під дією двох пружин з різними коефіцієнтами пружності  $k_1$  і  $k_2$  (рис. 2.10).

Якби коливання відбувалися під дією однієї сили, то вони відбувалися б згідно із законом

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

якби тільки під дією 2-ої сили, то згідно із законом

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Коли на тіло діють обидві сили, то коливання відбуватимуться згідно із законом

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (2.7)$$

Перетворимо праву частину виразу (2.7) так, щоб замість суми отримати добуток. Для цього до правої частини виразу (2.7) додамо і віднімемо  $A_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ .

$$x = A_1 [\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] + (A_2 - A_1) \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Тоді

$$x = 2A_1 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) + (A_2 - A_1) \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (2.8)$$

В отриманому виразі (1.47) 1-й доданок є добуток двох коливань. Щоб проаналізувати, яке це буде коливання, припустимо, що  $A_1 = A_2$ . Тоді 2-й доданок дорівнюватиме нулю і

$$x = 2A_1 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right). \quad (2.9)$$

Це коливання в загальному випадку не буде гармонічним коливанням, оскільки є добуток двох гармонічних коливань з різними частотами  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  і  $(\omega_1 - \omega_2)/2$ . Але якщо частоти  $\Delta\omega \ll \omega_1$  і  $\Delta\omega \ll \omega_2$ , то  $(\omega_1 + \omega_2)/2 \approx \omega_1$  або  $(\omega_1 + \omega_2)/2 \approx \omega_2$ , і тоді вираз (1.48) можна записати у вигляді

$$x = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (2.10)$$

Оскільки  $\frac{\Delta\omega}{2}t$  мало змінюється з часом, то і вираз

$$B = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad (2.11)$$

буде поволі змінюватися з часом, і рівняння (2.10) переписеться у вигляді

$$x = B \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (2.12)$$

Рівняння (2.12) можна розглядати як гармонічне коливання, що поволі змінюється з часом амплітудою  $B$  (рівняння (2.11)).

Такі коливання і будуть биттям. Амплітуда  $B$  буде змінюватися від  $2A$  до 0. Період зміни амплітуди биття  $B$  від  $2A$  до  $2A$  або від 0 до 0 називається періодом биття  $\tau$ .

Частота зміни  $B$  в два рази більша частоти зміни косинуса, оскільки береться за модулем. Тому  $\tau = 2\pi/\Delta\omega$ . Період коливань  $T = 2\pi/\omega$ . На рис. 2.11 показано графік таких коливань при  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , рівних 0.

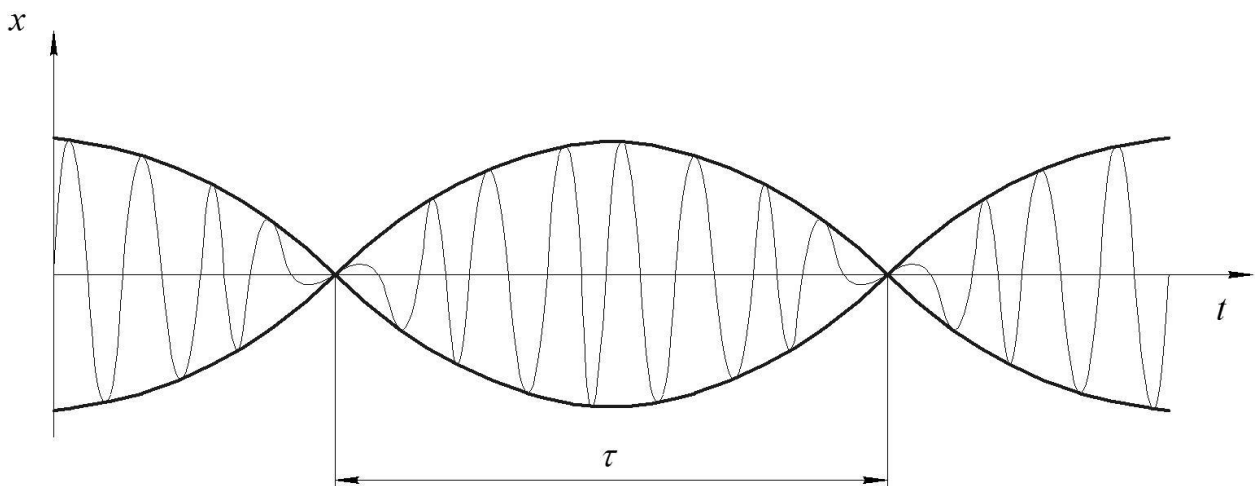


Рисунок 2.11



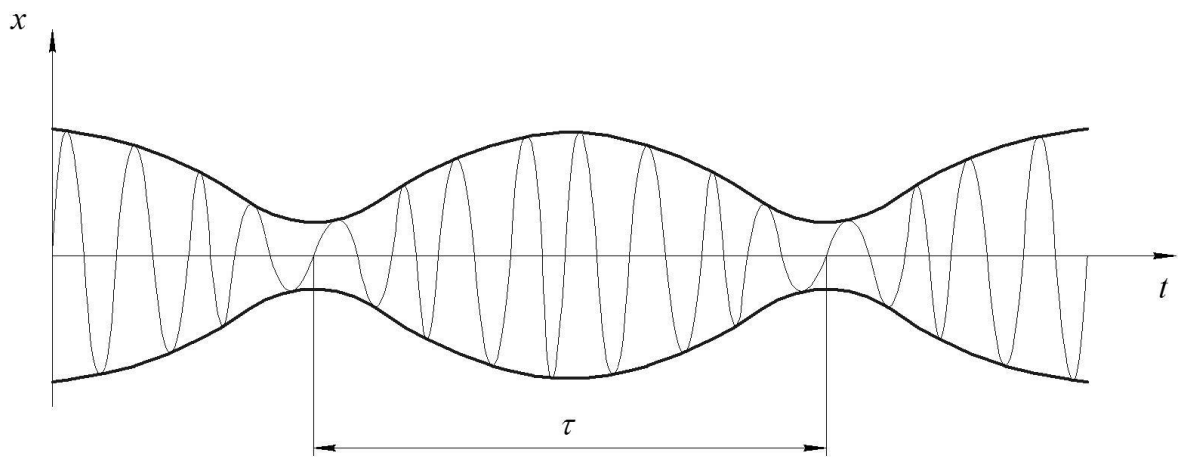


Рисунок 2.12

Якщо  $A_1 \neq A_2$ , то виходить складання двох гармонічних коливань з близькими частотами, що відбуваються на одній прямій. Амплітуда такого результуючого коливання також буде поволі змінюватися ( $\tau > T$ ), але вона ніколи не буде повертатися до 0. На рис. 2.12 показано графік таких коливань.

### Складання коливань з кратними частотами

Нехай осцилятор приймає участь у двох коливальних процесах, що проходять по одній прямій, але частота одного коливання в  $n$  раз більша від частоти другого  $\omega_2 = n\omega_1$ , де  $n$  – ціле число, (наприклад, жорсткість другої пружини в  $n$  раз більше першої).

Тоді за період 1-го коливання осцилятор повинен здійснити  $n$  періодів 2-го коливання. Очевидно, що через період  $T_1$  коливання повинне повторюватися, відповідно до цього результуючі коливання будуть періодичним, але форма не буде синусоїдальною, тобто коливання не будуть гармонічними.

Нехай  $n = 2$

$$x_1 = A \sin \omega_1 t,$$

$$x_2 = B \sin 2\omega_1 t.$$

Для простоти початкові фази приймемо рівними нулю і  $A = B$ .

Щоб отримати графік результуючого коливання  $x = x_1 + x_2$ , побудуємо спочатку графіки  $x_1(t)$  (рис. 2.13, а) і  $x_2(t)$  (рис. 2.13, б).

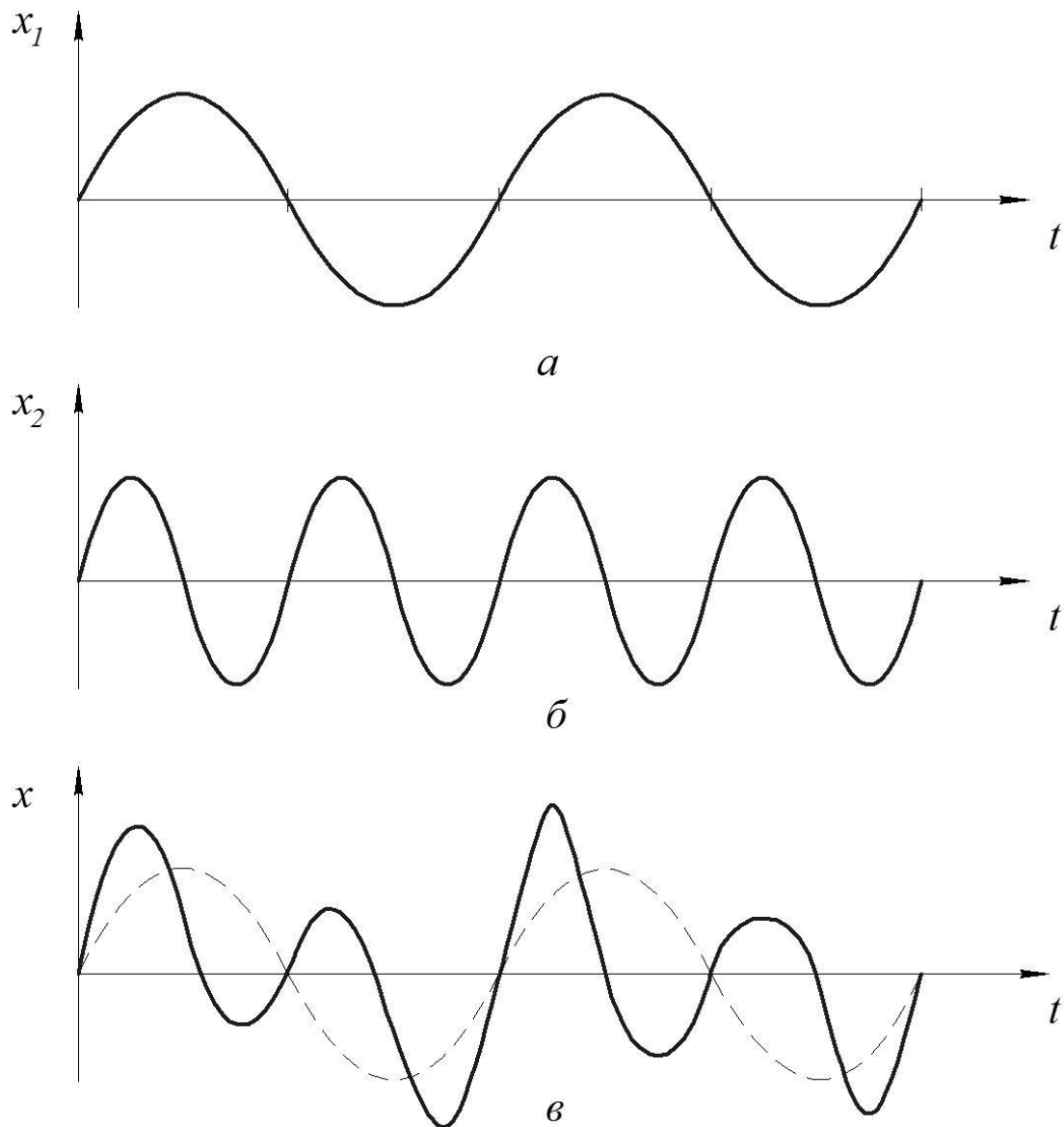


Рисунок 2.13

Потім для вибраних моментів часу  $t$  потрібно відкласти значення  $x_1 + x_2$ , де  $x_1$  і  $x_2$  значення, що відповідають вибраному моменту часу на графіках  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$ , а отримані точки з'єднати (рис. 2.13, в).

При складанні отримаємо періодичне коливання, що повторюється через період найбільш повільного коливання. Ще складніші криві виходять

при складанні 3-х і більше коливань.

Частота  $\omega$ , що визначає період результуючого коливання, називається основною частотою. Коливання, що відбуваються з основною частотою, називають 1-ою гармонікою, а коливання з частотами  $n\omega$  називаються гармоніками (2, 3 і т. д.) або обертонами.

Різні періодичні негармонічні рухи часто зустрічаються в природі. Якщо при складанні коливань виходить періодичне негармонічне коливання, то природно припустити, що періодичний негармонічний рух можна представити як суму гармонічних рухів, що відбуваються по одній прямій і мають кратні частоти.

### 2.3. Складання взаємно перпендикулярних коливань

#### Складання двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань, що мають однакові частоти

Така система має два ступені вільності, і для опису коливань цієї системи необхідно знати дві координати  $x(t)$  і  $y(t)$ .

Нехай, наприклад

$$x = A \sin \omega t, \quad (2.13)$$

$$y = B \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.14)$$

Знайдемо рівняння траєкторії тіла, що коливається. Для простоти міркувань початок відліку часу вибраний так, що початкова фаза коливань уздовж осі  $x$  дорівнює 0. Перепишемо рівняння (2.14) у вигляді

$$\frac{y}{B} = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi.$$

З рівняння (2.13) знайдемо  $\sin \omega t$  і  $\cos \omega t$

$$\sin \omega t = \frac{x}{A}; \quad \cos \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

і підставимо в (2.15)

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi. \quad (2.16)$$

Перетворимо отримане рівняння (2.16)

$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi$$

і піднесемо його до квадрату

$$\frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \varphi + \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{A^2} \sin^2 \varphi. \quad (2.17)$$

Після перетворень (2.17) отримаємо рівняння траєкторії в явному вигляді

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - 2 + \frac{xy}{AB} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (2.18)$$

Рівняння (2.18) є рівнянням еліпса. Тому при складанні двох гармонічних взаємно перпендикулярних коливань з однаковою частотою тіло буде рухатися по еліпсу (рис. 2.14).

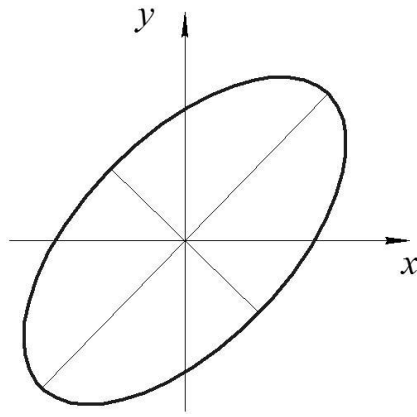


Рисунок 2.14

Розглянемо часткові випадки

а) нехай  $\varphi = 0$  або  $\pi$ . Тоді  $\cos\varphi = \pm 1$ ,  $\sin\varphi = 0$ , і рівняння (2.18) перепишемо у вигляді

$$\frac{y}{B} \pm \frac{x}{A} = 0.$$

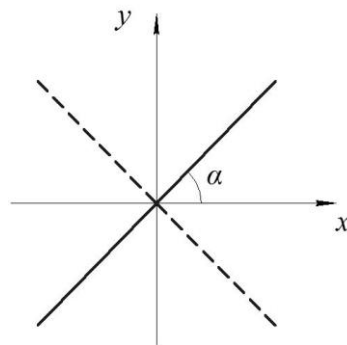


Рисунок 2.15

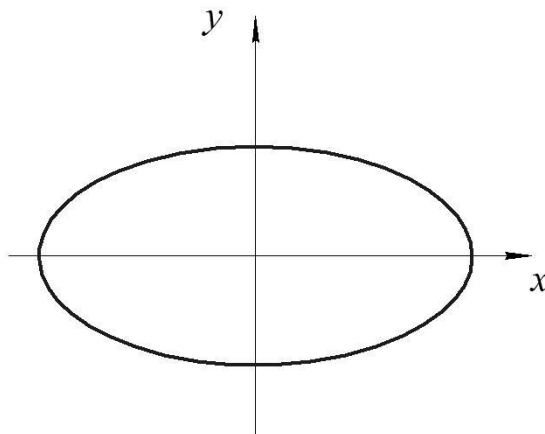


Рисунок 2.16

Це рівняння прямої, причому пряма проходить через початок координат і лежить або в 1-му і 3-му квадранті, або в 2-му і 4-му (рис. 2.15). Тангенс кута нахилу  $\alpha$

$$\operatorname{tga} = \pm \frac{B}{A};$$

б) якщо  $\varphi = \pm\pi/2$ , тоді рівняння (2.18) буде мати вигляд

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1.$$

Цей еліпс, головні осі якого направлені по осях координат (рис. 2.16). Подвійний знак у  $\varphi$  вказує, що точка може рухатися по еліпсу за годинниковою стрілкою і проти.

Якщо  $A = B$ , то

$$x^2 + y^2 = A^2$$

і отримуємо рівняння кола. Знайдемо швидкість точки при русі по колу.

$$x = A \sin \omega t, \quad y = \pm A \cos \omega t.$$

$$\mathcal{V}_x = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t, \quad \mathcal{V}_y = \frac{dy}{dt} = \mp A\omega \sin \omega t. \quad (2.19)$$

Піднесемо  $\mathcal{V}_x$  і  $\mathcal{V}_y$  до квадрату і додамо  $\mathcal{V}_x^2$  і  $\mathcal{V}_y^2$

$$\mathcal{V}^2 = \mathcal{V}_x^2 + \mathcal{V}_y^2 = A^2 \omega^2, \quad \mathcal{V} = \pm A\omega,$$

тобто швидкість при русі точки залишається постійною.

Знайдемо прискорення точки

$$a_x = \frac{d\mathcal{G}_x}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t, \quad a_y = \frac{d\mathcal{G}_y}{dt} = \mp A\omega^2 \cos \omega t. \quad (2.20)$$

Піднесемо (2.20) до квадрату і складемо  $a_x^2$  і  $a_y^2$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = A^2\omega^4, \quad a = \pm A\omega^2$$

або, враховуючи, що  $\mathcal{G} = A\omega$

$$a = \frac{\mathcal{G}^2}{A}.$$

Це нормальне прискорення.

Звідси можна зробити висновок, що рівномірний рух точки по колу можна розглядати як складання двох взаємно перпендикулярних коливань точки з рівними амплітудами і частотами.

**Складання двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань, що мають різні частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$**

В цьому випадку результуючий рух має вигляд складних кривих, званих фігурами Ліссажу.

Розглянемо спочатку випадок, коли частоти коливань по різних осях відносяться одна до одної як цілі числа

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{m}{n}. \quad (2.21)$$

де  $\omega_x$  – циклічна частота коливання уздовж осі  $x$ ,  $\omega_y$  – циклічна частота коливання уздовж осі  $y$ ,  $m$  і  $n$  – будь-які цілі числа.

Перейшовши до періодів  $T_x$  і  $T_y$ , співвідношення (2.21) можна записати

$$\frac{T_x}{T_y} = \frac{m}{n}, \text{ або } nT_x = mT_y. \quad (2.22)$$

Рівняння (2.22) показує, що за один і той же час осцилятор здійснить  $n$  коливань уздовж осі  $x$  і  $m$  коливань уздовж осі  $y$ .

Введемо позначення:  $A$  – амплітуда коливань уздовж осі  $x$ ,  $B$  – амплітуда коливань уздовж осі  $y$  і запишемо рівняння коливань уздовж осей  $x$  і  $y$

$$x = A \cos(\omega_x t + \varphi_1),$$

$$y = B \cos(\omega_y t + \varphi_2).$$

При кожному коливанні уздовж осі  $x$  осцилятор відхилятиметься від  $A$  до  $-A$ , а при кожному коливанні уздовж осі  $y$  осцилятор – від  $B$  до  $-B$ .

При кратних відношеннях частот траєкторія осцилятора буде вписуватися у прямокутник із сторонами, рівними подвоєним амплітудам коливань уздовж відповідних осей.

За час  $nT_x$  осцилятор  $n$  раз пройде через положення  $A$  і  $m$  раз через положення  $B$ . Крім того, вигляд траєкторії залежить від різниці фаз коливань  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Припустимо, що  $n = 1$ ,  $m = 2$ ,  $T_x/T_y = 2$  і  $\Delta\varphi = \pi/2$ . Тоді осцилятор за час  $t = T_x$  зробить одне повне коливання вздовж осі  $x$  (один раз пройде через  $A$ ) и два повних коливання вздовж осі  $y$  (два рази пройде через  $B$ ).

Траєкторія такого руху зображена на рис. 2.17, а.



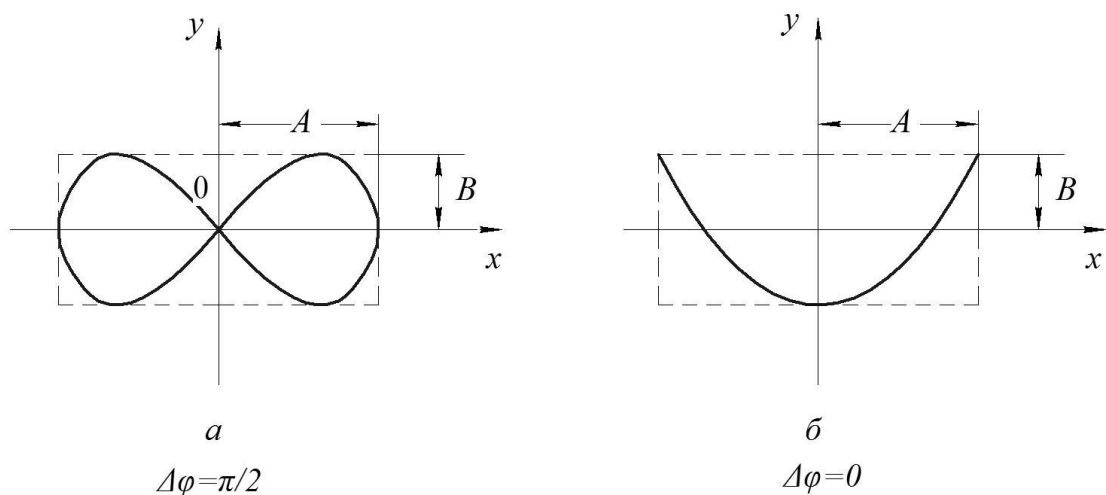


Рисунок 2.17

При відношенні частот  $1/2$  і різниці фаз  $\Delta\varphi = 0$  траєкторія вироджується в незамкнуту криву (рис. 2.17, б), по якій точка рухається туди і назад.

На рис. 2.18 приведені фігури Ліссажу для відношення частот  $1/2$  і різній різниці фаз: а)  $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ ; б)  $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ ; в)  $\varphi = \pi$ .

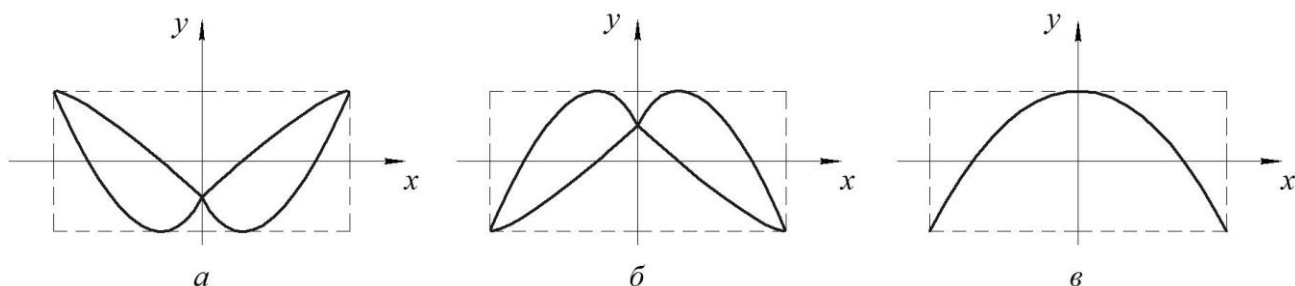


Рисунок 2.18

На рис. 2.19 відношення частот  $1/3$ , різниці фаз:

а)  $\varphi = 0$ ; б)  $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ ; в)  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ .

На рис. 2.20 відношення частот  $2/3$ , різниці фаз:

а)  $\varphi = 0$ ; б)  $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ .

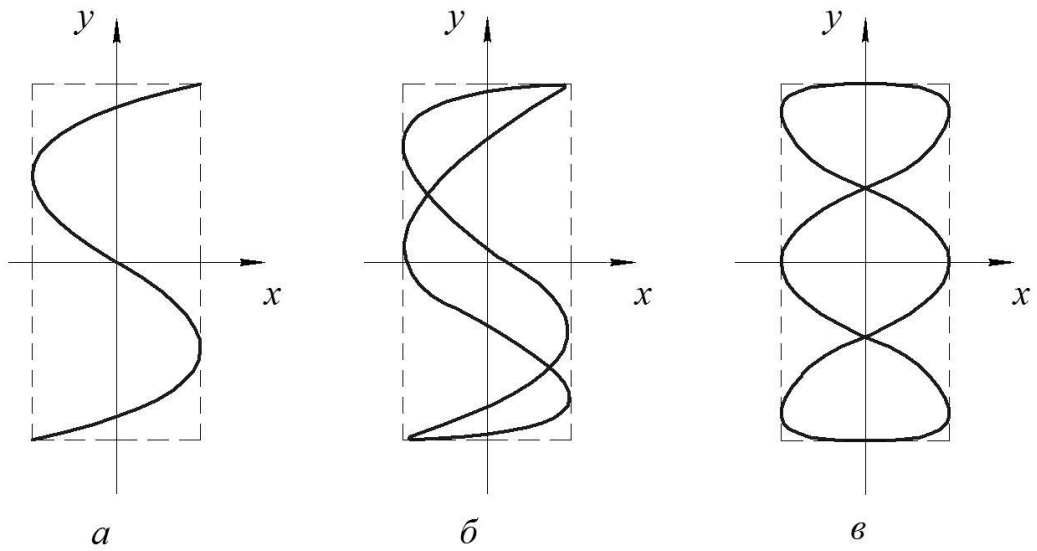


Рисунок 2.19

За числом торкань траєкторій сторін прямокутника відразу можна визначити відношення частот коливань. Це часто використовується на практиці. Наприклад, на рис. 2.19 відношення частот  $1/3$ , а на рис. 2.20 –  $2/3$ .

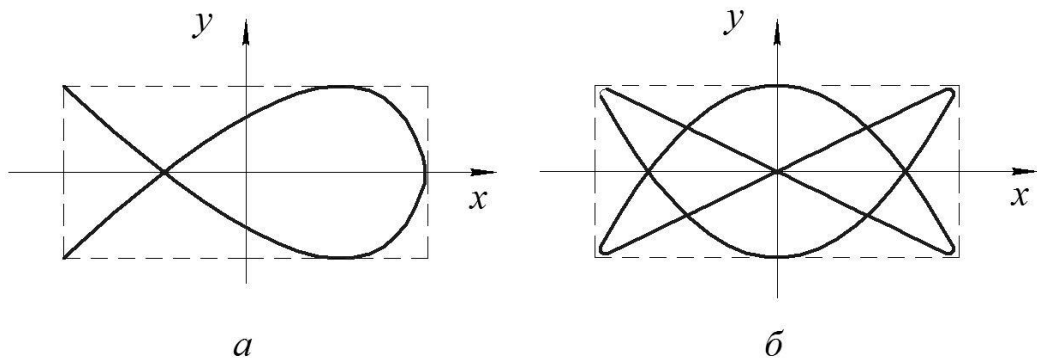


Рисунок 2.20

Якщо між частотами немає простого кратного відношення, то виходять області, суцільно заповнені траєкторією рухомої точки.

### Перелік контрольних питань:

1. В чому суть методу векторних діаграм при графічному представленні вільних коливань?
2. Які фази зсуву амплітуд між швидкістю, прискоренням і переміщенням?
3. Пояснити фази зсуву амплітуд кінематичних параметрів на діаграмі.
4. Пояснити суть побудови плоскої діаграми залежності координати  $x$  і швидкості  $\mathcal{V}$ , прискорення  $a$  від часу  $t$ .
5. Початкова фаза кінематичного параметру. Пояснити з допомогою графіка?
6. Записати рівняння для кінетичної енергії  $E_k$  і потенціальної енергії  $E_{II}$  як функцій часу?
7. Суть побудови фазових діаграм.
8. Складання двох коливань однакової частоти. Пояснити на прикладі методу побудови векторних діаграм.
9. Фізична суть коливань, які називають «биття»?
10. Складання коливань з кратними частотами. Пояснити на графіку.
11. Що таке основна частота коливань?
12. Гармоніки коливань? Дати поняття.
13. Як вирізняють 1-шу гармоніку?
14. Складання двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань, що мають однакові частоти. Пояснити.
15. Графічне зображення руху тіла при складанні двох гармонічних взаємно перпендикулярних коливань з однаковою частотою?
16. Складання двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань, що мають різні частоти. Приклад графічного зображення?

### ТЕМА 3. ГАРМОНІЧНИЙ (СПЕКТРАЛЬНИЙ) АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ

#### 3.1. Гармонічний аналіз періодичних негармонічних рухів

Нехай періодичні рухи описуються функцією  $\varphi(t)$ , значення яких повторюються через період  $T$ , тобто  $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ . У математиці доводять, що таку періодичну негармонічну функцію  $\varphi(t)$  можна представити як суму тригонометричних функцій

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (3.1)$$

Така сума називається рядом Фур'є. Помножимо і розділимо вираз, що стоїть під знаком суми у формулі (3.1) на  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , і введемо позначення

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos \varphi_n, \quad \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin \varphi_n.$$

В цьому випадку

$$\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega t - \varphi_n). \quad (3.2)$$

Позначимо  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n$ , тоді вираз (3.1) з врахуванням (3.2) переписеться у вигляді

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n), \quad (3.3)$$

$A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$  – це гармонічне коливання, тому, враховуючи, що функція  $f(t)$  описує негармонічні коливання, можна сказати, що періодичні негармонічні коливання можна представити як суму гармонічних коливань (гармонік або мод) з амплітудами  $A_1, A_2, \dots, A_n$  і частотами, кратним  $\omega$ :  $\omega, 2\omega, \dots, n\omega$ .

Процес знаходження амплітуд ( $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) або коефіцієнтів Фур'є  $b_0, a_n, b_n$  (для усіх  $n$ ) для заданої періодичної функції  $f(t)$  називається Фур'є-аналізом, або гармонічним аналізом.

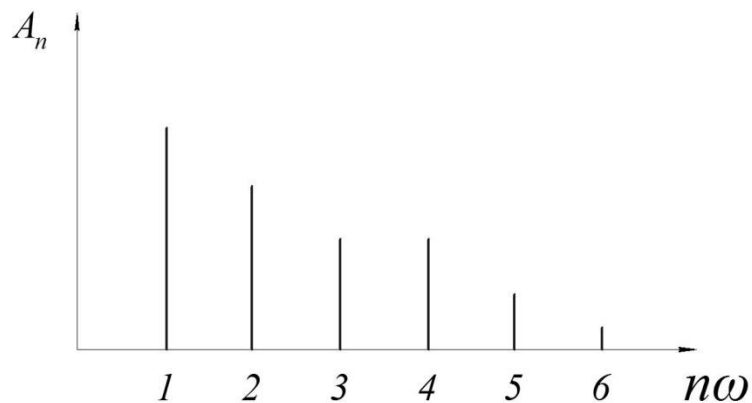


Рисунок 3.1

Гармонічний аналіз часто зображують з допомогою спектральних діаграм. По осі абсцис відкладають  $n\omega$ , по осі ординат що відповідають цим модам амплітуди (рис. 3.1).

### **Знаходження коефіцієнтів Фур'є**

Коефіцієнти знаходять за формулами:

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin n\omega t dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos n\omega t dt,$$

де  $t_1$  – будь-який момент часу.

Щоб знайти  $a_n$ , потрібно помножити вираження (3.3) на  $\cos k\omega t dt$ , де  $k$  набуває таких же значень, що і  $n$  – від 0 до  $\infty$ . Отримаємо

$$\varphi(t) \cos k\omega t dt = b_0 \cos k\omega t dt + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t \cos k\omega t dt + b_n \sin n\omega t \cos k\omega t dt).$$

Проінтегруємо отримане рівняння по періоду від  $t_1$  до  $t_1 + T$  або від 0 до  $T$ , що дасть той же результат.

$$\int_0^T \varphi(t) \cos k\omega t dt = \int_0^T b_0 \cos k\omega t dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_0^T \cos n\omega t \cos k\omega t dt + b_n \int_0^T \sin n\omega t \cos k\omega t dt \right).$$

Розглянемо послідовно усі інтеграли в правій частині отриманого виразу

$$b_0 \int_0^T \cos k\omega t dt = 0.$$

Для обчислення інших інтегралів скористаємося тригонометричними співвідношеннями при  $n \neq k$ :

$$\cos n\omega t \cos k\omega t = \frac{\cos(n+k)\omega t + \cos(n-k)\omega t}{2},$$

$$\sin n\omega t \cos k\omega t = \frac{\sin(n+k)\omega t + \sin(n-k)\omega t}{2},$$

$$\sin n\omega t \cos k\omega t = \frac{\cos(n-k)\omega t - \cos(n+k)\omega t}{2}.$$

При  $k = n$

$$\cos n\omega t \cos k\omega t = \frac{1 + \cos 2n\omega t}{2},$$

$$\sin n\omega t \sin k\omega t = \frac{1 - \cos 2n\omega t}{2}.$$

Розглянемо інтеграли:

При  $n \neq k$

$$a_n \int_0^T \cos n\omega t \cos k\omega t dt = \frac{a_n}{2} \left( \int_0^T \cos(n+k)\omega t dt + \int_0^T \cos(n-k)\omega t dt \right) = 0.$$

При  $n = k$

$$a_n \int_0^T \cos^2 n\omega t dt = \frac{a_n}{2} \int_0^T \cos(n+k)\omega t dt + \frac{a_n}{2} \int_0^T \cos 2n\omega t dt = \frac{a_n}{2} T.$$

При  $n \neq k$

$$b_n \int_0^T \sin n\omega t \cos k\omega t dt = \frac{b_n}{2} \left( \int_0^T \sin(n+k)\omega t dt + \int_0^T \sin(n-k)\omega t dt \right) = 0.$$

При  $n = k$

$$b_n \int_0^T \sin n\omega t \cos n\omega t dt = \frac{b_n}{2} \int_0^T \sin 2n\omega t dt = 0.$$

В результаті отримаємо

$$\int_0^T \varphi(t) \cos n\omega t dt = \frac{a_n}{2} T.$$

Звідси

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt.$$

Для знаходження  $b_n$  обидві частини рівняння (3.1) потрібно помножити на  $\sin k\omega t dt$ , скористатися наведеними вище тригонометричними співвідношеннями, а також проінтегрувати. В результаті отримаємо

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt.$$

Для визначення  $b_0$  потрібно проінтегрувати вираз (3.1) від 0 до  $T$ . Права частина після інтегрування буде рівна  $b_0 T$ . Отже,

$$\int_0^T f(t) dt = b_0 T.$$

Звідки

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

### **Приклад розкладання періодичного негармонічного коливального руху в ряд Фур'є**

Нехай осцилятор здійснює коливальний рух, графік якого  $x(t)$  представлений на рис. 3.2, а. Для зручності обчислень початок відліку часу перенесемо в точку  $O_1$  і інтегрувати будемо від  $-T/2$  до  $T/2$ . Це можливо, оскільки функція  $x(t)$  періодична і безперервна в часі. Розкладання в ряд Фур'є має наступний вигляд:



$$x(t) = 2d \left[ \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sin n\omega t + \dots \right],$$

де  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  – період функції  $x(t)$ .

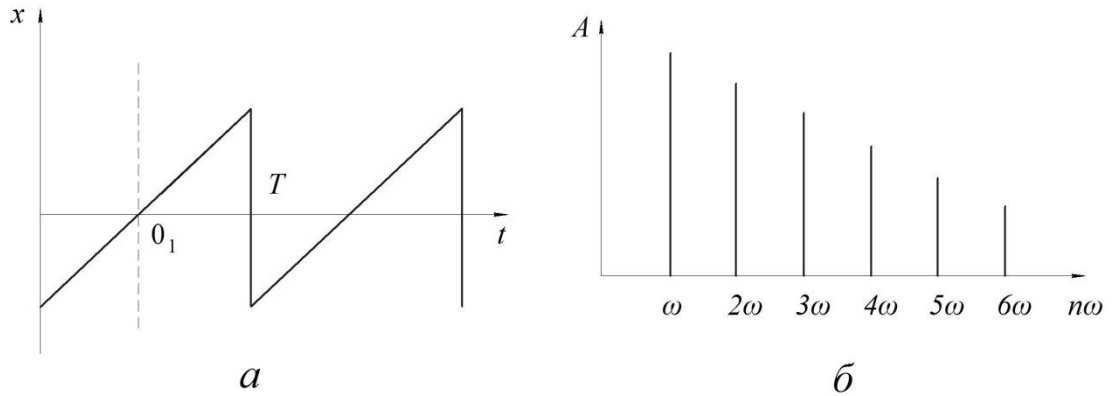


Рисунок 3.2

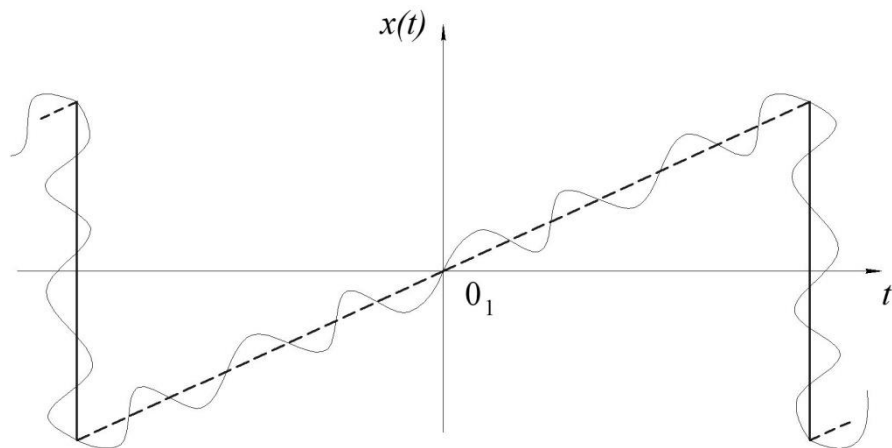


Рисунок 3.3

На рис. 3.3 представлена сума перших п'яти гармонік (суцільна лінія). Ця сума майже відповідає заданій функції (пунктирна лінія). Із збільшенням номера члена ряду відбувається практично накладання отриманої неперервної функції на графік функції, що розкладається.

На рис. 3.2, б представлена спектрограма розкладання розглядуваної функції в ряд Фур'є.

### 3.2. Гармонічний аналіз неперіодичних рухів

Неперіодичний рух, що описується функцією  $x = \varphi(t)$ , так само як і періодичний, можна представити як суму гармонічних коливань. При цьому число коливань, що входять в суму, нескінченно велике, їх частоти змінюються від 0 до  $\infty$ , а амплітуди безперервно розподілені за певним законом залежно від частоти. Тому неперіодичні рухи виражатимуться не сумою ряду, а інтегралом, який називається інтегралом Фур'є (чи інтегралом Коші-Фур'є).

До інтеграла Фур'є можна перейти від ряду Фур'є шляхом граничного переходу, спрямувавши період  $T$  до  $\infty$ . Функція  $x = \varphi(t)$  має бути неперервною та інтегрованою в інтервалі від  $-\infty$  до  $\infty$ .

Нехай  $\epsilon$  періодична функція  $x = \varphi(t)$  з періодом  $T$ , її можна представити рядом Фур'є

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \quad (3.4)$$

$$\text{де } b_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt.$$

Щоб перейти від суми до інтеграла у виразі (3.4), введемо нову змінну  $\omega$ , що безперервно міняється від 0 до  $\infty$ . Величину  $n\omega_0$  або  $2\pi n/T_0$  представимо як дискретні величини нової змінної  $\omega$ . Приріст  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi/T_0$ . При  $T \rightarrow \infty \Delta\omega \rightarrow 0$ .

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (3.5)$$

$$\text{де } a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \cos \omega u du, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \sin \omega u du.$$

У останніх виразах замість  $t$  ввели змінну  $u$ , в принципі рівну  $t$ , щоб при підстановці (3.5) не інтегрувати ці вирази по  $t$ .

Отриманий вираз (3.5) за певних умов можна перетворити до виду

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega.$$

(подібно до того як вираз (3.1) було перетворено до виразу (3.5) для рядів Фур'є). Функція  $S(\omega)$  характеризує розподіл амплітуд по спектру.

Тепер не можна говорити про певні частоти, що мають певні амплітуди, оскільки спектр є суцільним. Можна говорити тільки про середнє значення амплітуди в деякому вузькому інтервалі частот  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$ . Це значення дорівнює ординаті кривої розподілу в точці з абсцисою  $\omega$ , яка помножена на ширину частотного інтервалу  $\Delta\omega$ . Для інтервалу  $\Delta\omega = 0$  амплітуда рівна  $S(\omega)\Delta\omega = 0$ , отже, рівна нулю і енергія.

**Приклад.** Розглянемо імпульс, що є наростанням відхилення до деякої величини, постійне відхилення на короткий проміжок часу  $\tau$  і потім зниження до нуля (рис. 3.4, а).

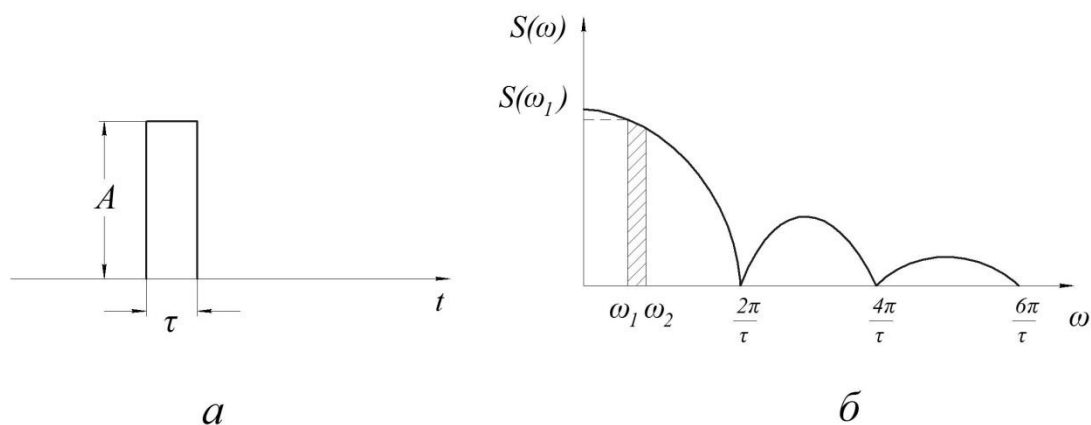


Рисунок 3.4

Його можна представити як суму нескінченного числа коливань (тобто через інтеграл Фур'є), частоти яких змінюються від 0 до  $\infty$ . Спектр такого руху буде неперервним.

Розподіл амплітуди в такому спектрі визначається виразом

$$S(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2}.$$

Середня амплітуда  $A_1$ , що відповідає інтервалу частот  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , дорівнює заштрихованій площі  $S(\omega_1)\Delta\omega$  (рис. 3.4, б).

При  $\omega = 2n\pi/\tau$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots$  амплітуда спектру дорівнює нулю. При частотах, коли  $\omega \ll 2\pi/\tau$ ,  $S(\omega) = A\tau$ , ( $\sin \omega\tau/2 \approx \omega\tau/2$ , оскільки кут  $\omega\tau/2$  досить малий), тобто не залежить від частоти.

Оскільки реальні коливання завжди обмежені в часі, то їх не можна вважати строго періодичними. Спектральні лінії, що іноді розглядаються як монохроматичні, насправді завжди охоплюють певний інтервал частот.

Чим ближче рух до гармонічного, тим вужча ширина спектру. Тому в певних випадках шириною смуги нехтують.

На рис. 3.5 зображені плоска діаграма, записана на екрані осцилографа (а), і відповідна їй спектрограма (б).

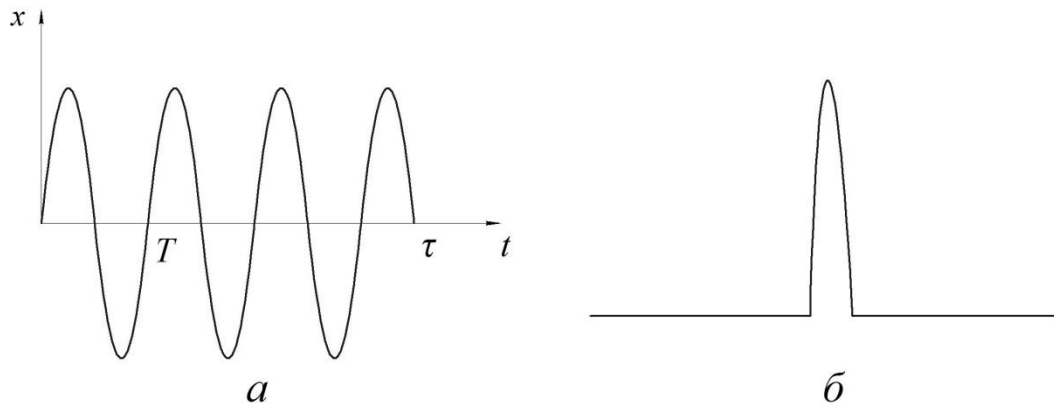


Рисунок 3.5

Зазвичай для оцінки монотонності вводять поняття про ширину спектральної лінії. За ширину спектральної лінії приймають інтервал частот  $2\Delta\omega$ , на якому функція розподілу амплітуд  $S(\omega)$  зменшується до 0,7 свого найбільшого значення. При цьому енергія (прямопропорційна квадрату

амплітуди) зменшується вдвічі.

Між шириною спектру  $\Delta\omega$  і тривалістю процесу  $\tau$  існує зв'язок

$$\Delta\omega\tau > 2\pi, \Delta\omega > \frac{2\pi}{\tau},$$

оскільки велика монотонність вимагає великої тривалості.

Практичний інтерес представляє відносна ширина спектральної лінії

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\omega},$$

де  $\omega$  – відповідає максимуму функції розподілу амплітуд. Чим менше  $\varepsilon$ , тим ближче коливання до гармонічних, тобто строго монотонним.

### **3.3. Приклади складання диференціальних рівнянь руху трьома способами**

Можна вказати на три способи складання диференціальних рівнянь руху: у формі рівнянь Лагранжа, прямим і зворотним способами.

Рівняння Лагранжа мають відому з основного курсу теоретичної механіки форму

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad (3.6)$$

де  $T$  і  $\Pi$  – кінетична і потенціальна енергії системи,  $t$  – час,  $x_i$  – узагальнена координата,  $\dot{x}_i$  – узагальнена швидкість,  $i=1,2..n$  – номер координати,  $n$  – число степеней вільності (число незалежних координат, що повністю

визначають положення всіх точок системи).

Застосування методу розглянемо на прикладі механічної системи з двома степенями вільності, модель якої показана на рис. 3.6. Тут  $k_1$  і  $k_2$  – коефіцієнти жорсткості пружин, а  $m_1$  і  $m_2$  – маси вантажів.

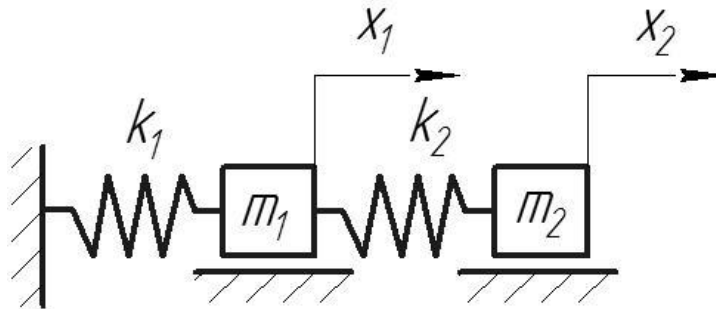


Рисунок 3.6

За узагальнені координати приймемо горизонтальні переміщення  $x_1$  і  $x_2$  вантажів, відраховуючи ці переміщення від стану рівноваги, в якій пружини не деформовані.

Перш за все, знаходимо кінетичну енергію вантажів

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}$$

і потенціальну енергію деформації пружин

$$\Pi = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2}.$$

Знаходимо похідні, необхідні для підстановки в рівняння Лагранжа (3.6):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = k_2 (x_2 - x_1).$$

Підставляючи отримані вирази в рівняння (3.6), отримаємо

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

**За прямим методом** з системи виділяються зосереджені маси, кожна з них розглядається як вільне тіло, що знаходиться під дією відновлюючих сил (в даному випадку сил пружності пружин, які виражаються через вибрані узагальнені координати). Розрахункова схема прямого методу показана на рис. 3.7.

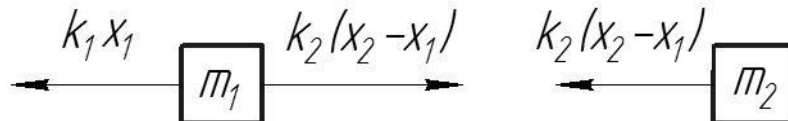


Рисунок 3.7

Диференціальні рівняння руху вантажів мають вигляд

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ці рівняння в точності співпадають з рівняннями (3.7).

**Обернений метод** протилежний прямому методу. Від механічної системи відділяються маси і замість них прикладаються сили інерції, які виражаються через узагальнені прискорення (рис. 3.8).

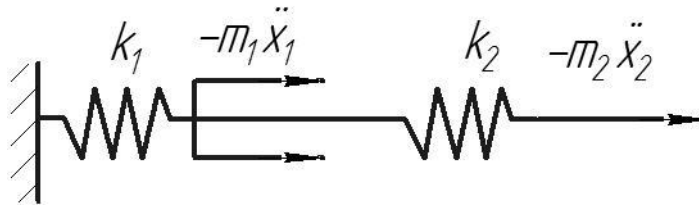


Рисунок 3.8

Переміщення  $x_1$  кінця першої пружини дорівнює її подовженню під дією сил інерції

$$x_1 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{k_1}.$$

Переміщення правого кінця другої пружини  $x_2$  дорівнює сумі подовження обох пружин

$$x_2 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{k_1} + \frac{-m_2 \ddot{x}_2}{k_2}.$$

З двох останніх співвідношень отримуємо

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + k_1 x_1 &= 0, \\ \frac{k_2}{k_1} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \ddot{x}_2 + k_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Хоча рівняння (3.7), (3.8) і (3.9) в принципі еквівалентні, проте об'єм операцій, пов'язаних з обчисленням коефіцієнтів, може бути різним.

Прямий метод зручний для дослідження систем ланцюгової структури, в яких пружні сили нескладно виражаються через переміщення двох сусідніх тіл.

Зворотний метод найбільш підходить для дослідження балочних систем із зосередженими масами.



### 3.4. Приклади розрахунків

**Приклад 1.** До циліндричної пружини підвішений вантаж масою  $m = 2$  кг. Вантаж може переміщатися тільки у вертикальному напрямі. Визначити частоту власних коливань вантажу без урахування і з урахуванням маси пружини. Середній діаметр пружини  $D = 6$  см; діаметр дроту пружини  $d = 0,6$  см; число витків  $n = 15$ ; щільність матеріалу  $\rho = 7,85$  т/м<sup>3</sup>; модуль зсуву  $G = 8 \cdot 10^7$  кПа

#### Рішення.

Жорсткість пружини визначатимемо за виразом, який можна отримати, розглядаючи в дисципліні опір матеріалів тему «Розрахунок гвинтових циліндричних пружин»:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \frac{8 \cdot 10^7 \cdot (0,6 \cdot 10^{-2})^4}{8 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 15} = 4 \text{ кН/м}.$$

Частота власних коливань без урахування маси пружини

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{2}} = 44,7 \text{ с}^{-1}.$$

Приведена маса пружини

$$\begin{aligned} m_{np} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \pi D n \rho = \frac{1}{3} \cdot \frac{3,14 \cdot (0,6 \cdot 10^{-2})^2}{4} \cdot 3,14 \cdot 0,6 \cdot 10^{-2} \cdot 15 \cdot 7,85 \cdot 10^3 = \\ &= 209 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 0,209 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}. \end{aligned}$$

Частота власних коливань з урахуванням маси пружини

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m + m_{np}}} = \sqrt{\frac{4000}{2 + 0,209}} = 42,6 \text{ c}^{-1}.$$

**Приклад 2.** Визначити кругову і технічну частоту, а також період власних коливань зосередженого вантажу  $P = 12 \text{ кН}$ , прикладеного на вільному кінці балки, жорстко закладеної іншим кінцем. Балка є двутавр № 20 ( $J_x = 1840 \text{ см}^4$ ) завдовжки  $l = 1 \text{ м}$ . Власною вагою балки знехтувати.

### Рішення.

Статичний прогин балки від ваги зосередженого вантажу

$$y_{cm} = \frac{P\ell^3}{3EJ_x} = \frac{12 \cdot \ell^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 1,087 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Частота власних коливань

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{y_{cm}}} = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,087 \cdot 10^{-3}}} = 95 \text{ c}^{-1}.$$

Період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{95} = 0,066 \text{ с}.$$

Технічна частота

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,066} = 909 \text{ хв}^{-1}.$$

**Приклад 3.** До сталевого стержня підвішений вантаж масою  $m = 50 \text{ кг}$ , що здійснює вертикальні поздовжні коливання. Довжина стержня  $l = 1 \text{ м}$ , діаметр  $d = 2 \text{ см}$ . Визначити частоту і період власних вертикальних коливань системи без урахування і з урахуванням маси стержня.

## Рішення.

Жорсткість стержня

$$k = \frac{EA}{\ell} = \frac{E\pi d^2}{4\ell} = \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 3,14 \cdot 0,02^2}{4 \cdot \ell} = 6,28 \cdot 10^4 \text{ кН/м} = 6,28 \cdot 10^7 \text{ Н/м},$$

де  $A = \frac{\pi d^2}{4}$  – площа поперечного перетину стержня.

Частота власних коливань без урахування маси стержня

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6,28 \cdot 10^7}{50}} = 1121 \text{ с}^{-1}.$$

Відповідний період коливань

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{6,28}{1121} = 0,0056 \text{ с}.$$

Приведена маса стержня

$$m_{np} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \ell \rho = \frac{1}{3} \cdot \frac{3,14 \cdot 0,02^2}{4} \cdot 1 \cdot 7,85 \cdot 10^3 = 0,822 \text{ кг} = 0,822 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}.$$

Власна частота коливань з урахуванням маси стержня

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m + m_{np}}} = \sqrt{\frac{6,28 \cdot 10^7}{50 + 0,822}} = 1112 \text{ с}^{-1}.$$

Відповідний період коливань

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{6,28}{1112} = 0,00565 \text{ с.}$$

#### Приклад 4.

Визначити власну частоту крутильних коливань двохмасової системи (рис. 3.9, а) при наступних даних: діаметри дисків  $d_1 = 0,30$  м;  $d_2 = 0,20$  м; товщина дисків  $b_1 = 0,02$  м;  $b_2 = 0,015$  м; діаметр валу  $d_0 = 0,01$  м; довжина валу  $l = 0,8$  м.

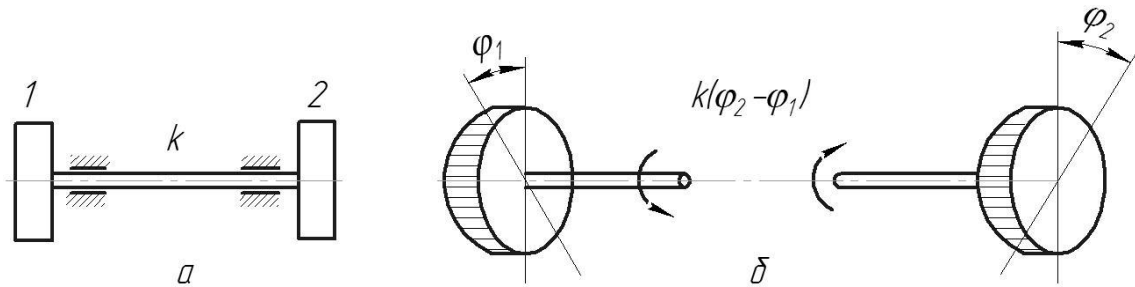


Рисунок 3.9

#### Рішення.

Диференціальне рівняння вільних коливань такої системи має вигляд

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

де  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  – взаємний кут повороту дисків,  $\omega = \sqrt{\frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}}$  – власна частота коливань.

Моменти інерції мас дисків:

$$J_1 = b_1 \frac{\pi d_1^4}{32} \cdot \frac{\rho}{g} = 0,02 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,3^4}{32} \cdot \frac{78,5}{9,8} = 1,264 \cdot 10^{-4} \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2;$$

$$J_2 = b_2 \frac{\pi d_2^4}{32} \cdot \frac{\rho}{g} = 0,015 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,2^4}{32} \cdot \frac{78,5}{9,8} = 0,187 \cdot 10^{-4} \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2.$$

Полярний момент інерції поперечного перерізу валу

$$J_p = \frac{\pi d_0^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,01^4}{32} = 9,81 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4.$$

Коефіцієнт жорсткості вала при крученні

$$k = \frac{GJ_p}{\ell} = \frac{8 \cdot 10^7 \cdot 9,81 \cdot 10^{-10}}{0,8} = 9,81 \cdot 10^{-2} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Власна частота крутильних коливань

$$\omega = \sqrt{\frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 10^{-2} (1,264 + 0,187) \cdot 10^{-4}}{1,264 \cdot 0,187 \cdot 10^{-8}}} = 77,6 \text{ с}^{-1}.$$

### Перелік контрольних питань:

1. З якою метою використовують в даному контексті розклад в ряд Фур'є?
2. Записати математичний вираз ряду Фур'є?
3. Знаходження коефіцієнтів Фур'є. Основні залежності.
4. Навести графічний приклад розкладу функції в ряд Фур'є.
5. Вплив кількості членів ряду Фур'є на точність розкладу функції в цей ряд. Показати на графічному прикладі.
6. Суть гармонічного аналізу неперіодичних рухів?
7. Складання диференціальних рівнянь руху у формі рівнянь Лагранжа.
8. Складання диференціальних рівнянь руху прямим способом.
9. Складання диференціальних рівнянь руху зворотним способом.
10. Практична доцільність використання способів складання диференціальних рівнянь руху у формі рівнянь Лагранжа, прямим і оберненим способами?

## ТЕМА 4. ВПЛИВ СИЛ ОПОРУ НА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

При описі власних коливань ми до цих пір нехтували силами опору. Але зазвичай силами опору нехтувати не можна, і коливання є затухаючими. При цьому спочатку надана осцилятору енергія зменшується, і відповідно до формул (1.49) і (1.50) амплітуда коливань повинна зменшуватися. Закон зменшення амплітуди коливань залежить від характеру сил тертя, що діють на осцилятор. Розглянемо різні випадки затухаючих коливань залежно від сил опору, що діють на тіло, що коливається.

### 4.1. Затухаючі коливання при дії сил опору

**Рівняння, що описують затухаючі коливання при дії сил опору, прямо пропорційних швидкості**

Найбільш простими для математичного опису і поширеними є коливання, при яких сила опору прямо пропорційна швидкості. Це справедливо при русі тіл у рідинах або газах з малими швидкостями

$$\vec{R} = \mu \vec{v}, \quad (4.1)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт опору. Для осцилятора з одним ступенем вільності (положення тіла визначається однією координатою), рис. 4.1, а.

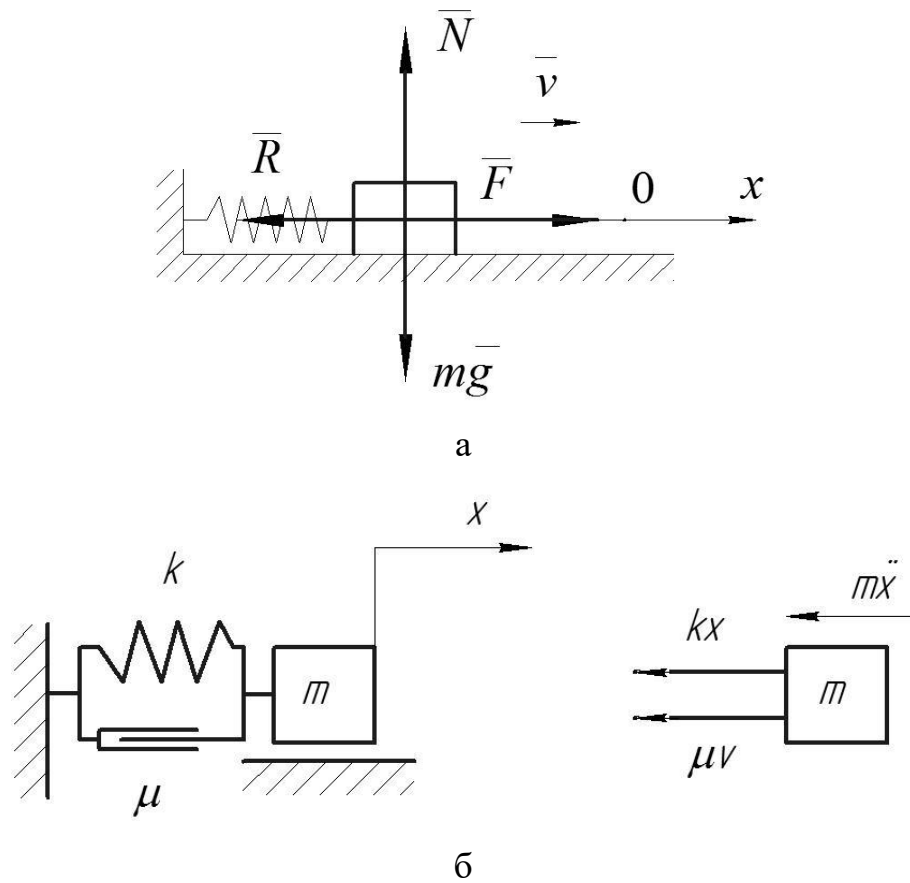


Рисунок 4.1

Другий закон Ньютона запишеться у формі

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} + \vec{N}. \quad (4.2)$$

Силою тертя об поверхню нехтуємо. використовуємо прямий методом складання диференціального рівняння руху, рис. 4.1, б .

У проекції на вісь  $x$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu g_x$$

або

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}g_x.$$

Врахуємо, що  $\mathcal{D}_x = \frac{dx}{dt}$  і, позначивши  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $\frac{\mu}{m} = 2\gamma$ , отримаємо рівність

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.3)$$

або

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.4)$$

Рівняння (4.4) – лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Рішення у вигляді

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (4.5)$$

не може бути рішенням рівняння (4.4), оскільки воно перетворюється на тотожність тільки за умови  $2\gamma = 0$ , тобто якщо відсутня сила опору. Практика показує, що за наявності сил опору амплітуда коливань з часом зменшується, і коливання зупиняться.

Отже, амплітуда  $A$  повинна залежати від часу, причому зменшуватися з часом. Графік затухаючих коливань представлено на рис. 4.2.

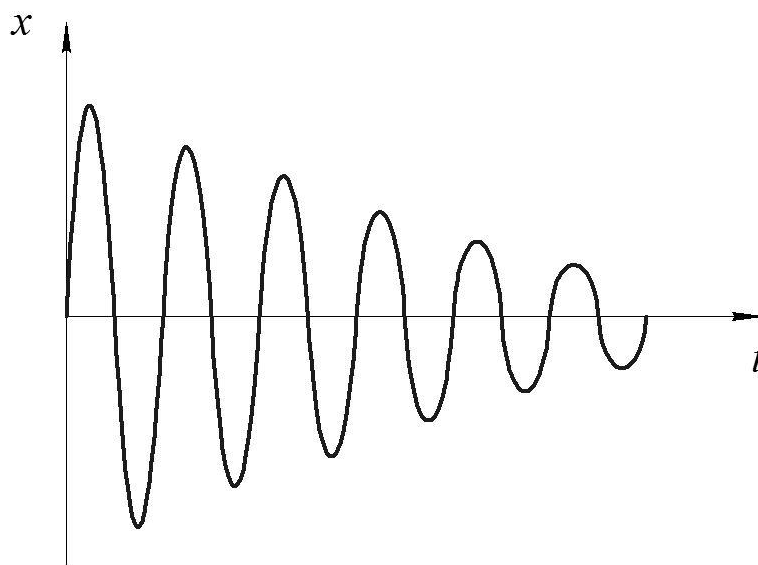


Рисунок 4.2



Прийmemo, що амплітуда мінється згідно із законом  $A = A_0 e^{-\alpha t}$ . Таку залежність амплітуди від часу можна отримати, припустивши, що її зменшення  $dA$  за час  $dt$  пропорційно цій зміні часу і миттєвому значенню амплітуди

$$-dA = \alpha A dt.$$

Проінтегруємо отриманий вираз за кінцевий проміжок часу  $t$

$$\int_{A_0}^{A_n} \frac{dA}{A} = -\int_0^t \alpha dt;$$

$$\ln \frac{A_n}{A_0} = -\alpha t; \quad A_n = A_0 e^{-\alpha t}.$$

Тоді рішення набуде вигляду

$$x = A_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.6)$$

Знайдемо  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ :

$$\dot{x} = A_0 (-\alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) + \omega e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)),$$

$$\ddot{x} = A_0 (\alpha^2 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) - \alpha \omega e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) - \alpha \omega e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega^2 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)),$$

і підставимо  $\dot{x}$  та  $\ddot{x}$  в рівняння (4.4)

$$A_0 e^{-\alpha t} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) - 2\alpha \omega \cos(\omega t + \varphi) - 2\gamma \alpha \sin(\omega t + \varphi) + 2\gamma \omega \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \sin(\omega t + \varphi)) = 0. \quad (4.6)$$

Вираз (4.7) повинен перетворюватися в нуль у будь який час. Але  $\sin(\omega t + \varphi)$  і  $\cos(\omega t + \varphi)$  не можуть одночасно перетворюватися в нуль, відповідно, вираз в дужках буде перетворюватися в нуль, якщо коефіцієнти при  $\sin(\omega t + \varphi)$  і  $\cos(\omega t + \varphi)$  будуть рівні нуль

$$\begin{cases} (\alpha^2 - \omega^2) - 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0, \\ -2\alpha\omega + 2\gamma\omega = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

З другого рівняння системи (4.8) виходить, що  $\alpha = \gamma$ ; із першого з врахуванням  $\alpha = \gamma$ , отримаємо

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (4.9)$$

Частота затухаючих коливань  $\omega$  менша, ніж незатухаючих, сили опору завжди направлені проти руху осцилятора (при русі осцилятора до положення рівноваги напрям сили пружності  $F$  і сили опору  $R$  протилежний. Тому осцилятор рухається більш повільно і набуває меншої швидкості в положенні рівноваги. При русі від положення рівноваги напрямки сили пружності і сили опору співпадають, рух сповільнюється швидше, і осцилятор зупиниться раніше).

Отже, рішенням рівняння (4.4) є

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.10)$$

Якщо  $\gamma^2 = \omega_0^2$  або  $\gamma^2 > \omega_0^2$ , то коливання виникати не будуть. Це впливає з аналізу виразу (4.9).

Рішення диференціального рівняння (4.4) можна отримати по-іншому. Представимо рішення у вигляді

$$x = Ce^{rt}. \quad (4.11)$$

Знайдемо  $\dot{x}$  та  $\ddot{x}$ :

$$\dot{x} = Cre^{rt}, \quad (4.12)$$

$$\ddot{x} = Cr^2e^{rt}. \quad (4.13)$$

Підставимо (4.11) – (4.13) в рівняння (4.4)

$$Ce^{rt}(r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2) = 0.$$

Щоб (4.11) було рішенням рівняння (4.4), вираз в дужках повинен дорівнювати нулю

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0. \quad (4.14)$$

Вирішуючи (4.14) відносно  $r$ , отримаємо

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

і, відповідно

$$x_1 = C_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \rightarrow x_1 = C_1 e^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t};$$

$$x_2 = C_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \rightarrow x_2 = C_2 e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t}.$$

Проаналізуємо отримане вирішення

а) якщо  $\gamma^2 < \omega_0^2$ , то корені будуть уявними і тоді  $e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t}$  і  $e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t}$  можна

представити через  $\sin$  і  $\cos$  з використанням рівності Ейлера ( $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ,  $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$ ).

Позначимо  $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega$ , тоді

$$x_1 = C_1 e^{-\gamma} e^{i\omega t},$$

$$x_2 = C_2 e^{-\gamma} e^{-i\omega t}.$$

Загальне вирішення

$$x = C_1 e^{-\gamma} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\gamma} e^{-i\omega t} = e^{-\gamma} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}). \quad (4.15)$$

Після перетворень (4.15) отримаємо

$$x = A_0 e^{-\gamma} \cos(\omega t + \varphi); \quad (4.16)$$

б) якщо  $\gamma^2 > \omega_0^2$ , або  $\gamma^2 = \omega_0^2$ , то корені дійсні і в цих випадках коливального руху не буде.

Тому при великому опорі середовища коливання не виникають – виведена з положення рівноваги система повертається в те ж положення асимптотично.

Спосіб, яким приходить система в положення рівноваги, залежить від початкових умов (від початкової швидкості і від початкового відхилення системи) і від коефіцієнта затухання.

Затухання може відбуватися за трьома варіантами залежно від початкових значень  $x_0$  і  $\dot{x}_0$ , рис. 4.3:

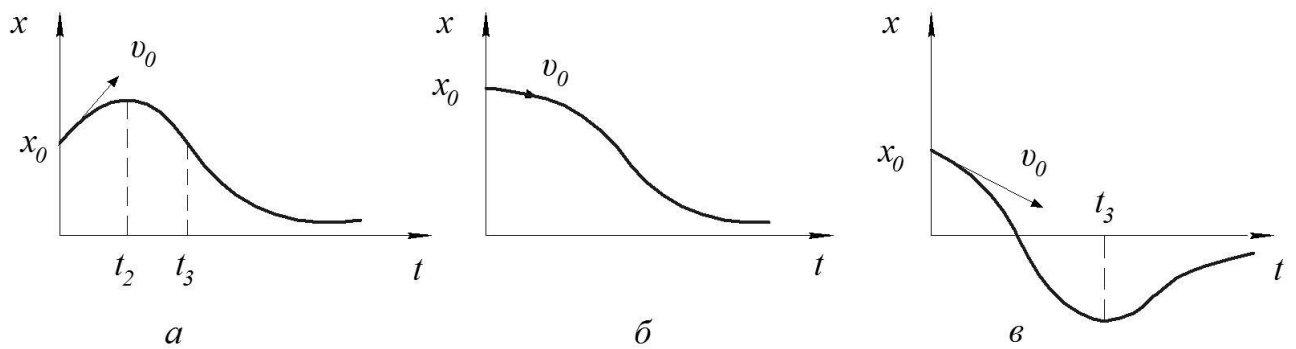


Рисунок 4.3

а) якщо початкова швидкість  $\vartheta_0$  і  $x_0$  одного знаку, тобто осцилятор відхилили від положення рівноваги і штовхнули від положення рівноваги (рис. 4.3, а), то він спочатку буде віддалятися від положення рівноваги з швидкістю, що зменшується. Коли його швидкість досягне нуля, осцилятор розпочне рух назад до положення рівноваги. При цьому його швидкість буде збільшуватися, так як спочатку відновлювальна сила буде більшою від сили опору. Сила опору залежить від швидкості і буде збільшуватися разом із збільшенням швидкості, а відновлювальна сила зменшуватися. Сила опору стане більшою відновлювальної сили, швидкість маятника буде зменшуватися, і система почне асимптотично наближатися до положення рівноваги;

б) маятник відхилили від положення рівноваги і штовхнули у протилежну сторону, при цьому швидкість йому надали таку невелику, що система внаслідок дії великої сили тертя не зможе пройти положення рівноваги і асимптотично наближатиметься до положення рівноваги. Знаки  $x_0$  і  $\vartheta_0$  протилежні (рис. 4.3, б);

в) коливальну систему відхилили від положення рівноваги і штовхнули в протилежну сторону з великою швидкістю. Знаки  $x_0$  і  $\vartheta_0$  різні (рис. 4.3, в). В цьому випадку система пройде через положення рівноваги і буде в цьому положенні володіти якоюсь ще швидкістю, яка направлена від положення рівноваги. Після проходження положення рівноваги система буде відхилятися в ту же сторону, куди направлена швидкість. Знаки  $x$  і  $\vartheta_0$  будуть співпадати. Подальший процес буде такий же, як процес "а". За порівнянням всіх трьох

графіків, можна сказати, що графік "в" тільки в першій частині відрізняється від графіка "а". Графік "а" після часу  $t_2$  аналогічний графіку "б" і, відповідно, графік "в" аналогічний графіку "б" з моменту  $t_3$ .

## 4.2. Основні характеристики затухаючих коливань

### Період і амплітуда

Затухаючі коливання не є періодичними і гармонічними оскільки коливання не повторюються в часі. Проте і в цьому випадку говорять про період, розуміючи, наприклад, під періодом проміжки часу, через які зміщення (переміщення) перетворюються в нуль при однаковому напрямі швидкості.

Термін "амплітуда", строго кажучи, застосовний тільки до гармонічних коливань. Проте його застосовують і до негармонічних коливань, розуміючи під амплітудою найбільші значення, які досягає відповідна величина при коливаннях осцилятора протягом одного періоду.

### Логарифмічний декремент затухання

Логарифмічним декрементом затухання  $\Theta$  називається логарифм відношення амплітуд через проміжок часу, рівний періоду  $T$ .

$$\Theta = \ln \frac{A_0 e^{-\gamma t}}{A_0 e^{-\gamma(t+T)}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \quad (4.17)$$

Логарифмічний декремент затухання  $\Theta$  характеризує зміну амплітуди затухаючих коливань за період  $T$ .

### Зменшення амплітуди в $e$ разів

$A = A_0 e^{-\gamma t}$  – амплітуда коливань в деякий момент часу  $t$ ,

$A_N = A_0 e^{-\gamma(t+NT)}$  – амплітуда коливань через  $N$  коливань і відповідно через час  $NT$ .

$$\frac{A_N}{A} = \frac{A_0 e^{-\gamma(t+NT)}}{A_0 e^{-\gamma t}} = e^{-\gamma TN} = e^{-\Theta N}. \quad (4.18)$$

При  $\Theta N = 1$  амплітуда зменшується в  $e$  разів.  $\Theta = 1/N$ . Звідси логарифмічний декремент обернений до числа періодів, за які амплітуда зменшується в  $e$  разів.

**Приклад 5.** Амплітуда власних коливань за період зменшилася вдвічі. Визначити логарифмічний декремент коливань та зміну власної частоти внаслідок затухання.

**Рішення.**

Логарифмічний декремент коливань

$$\Theta = \ln \frac{A_0 e^{-\gamma t}}{A_0 e^{-\gamma(t+T)}} = \ln \frac{1}{0,5} = \ln 2 = 0,693;$$

або

$$\Theta = \gamma T = 0,693.$$

Таким чином, логарифмічний декремент буде рівний  $\Theta = 0,693$ .

Пригадаємо, що

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}},$$

де  $\omega_1$  – змінена власна частота коливань внаслідок затухання.

Тоді логарифмічний декремент

$$\Theta = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}};$$

Нам потрібно встановити взаємозв'язок між  $\omega_1$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$ .

Підніmemo до квадрату обидві частини

$$\Theta^2 = \frac{4\pi^2\gamma^2}{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Зробимо наступні перетворення:

$$\Theta^2(\omega^2 - \gamma^2) = 4\pi^2\gamma^2 \rightarrow \gamma^2 = \frac{\Theta^2(\omega^2 - \gamma^2)}{4\pi^2} \quad | : \gamma^2 \times 4\pi^2 \rightarrow 4\pi^2 = \frac{\Theta^2\omega^2}{\gamma^2} - 1 \rightarrow$$

$$\gamma^2 = \frac{\Theta^2\omega^2}{4\pi^2 + 1}.$$

Отриманий вираз підставляємо у вираз для визначення  $\omega_1$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = \sqrt{\omega^2 - \frac{\Theta^2\omega^2}{4\pi^2 + 1}}.$$

Позбуваємося кореня, піднявши обидві частини до квадрату,

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \frac{\Theta^2}{4\pi^2 + 1}\omega^2.$$

Оскільки в нас розглядається конкретна задача, знайдемо числове значення коефіцієнта при  $\omega^2$



$$\omega_1^2 = \omega^2 - \frac{0,693^2}{4\pi^2 + 1} \omega^2 = \omega^2 - 0,011864 \omega^2 = 0,988136 \omega^2.$$

І в кінцевому результаті зміна власної частоти при затуханні коливань буде

$$\omega_1 = 0,99405 \omega,$$

Це зменшення становить 0,595 %. Звідси висновок, що власна частота за таких умов є практично незмінною.

### Час релаксації

Час  $\tau$ , за який амплітуда зменшується в  $e$  разів, називається часом релаксації.

Нехай  $A_1$  – амплітуда коливань у момент часу  $t_1$ ,  $A_2$  – у момент часу  $t_2$ , тоді

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\gamma t_1}}{A_0 e^{-\gamma t_2}} = e,$$

$$e^{\gamma(t_2 - t_1)} = e, \quad t_2 - t_1 = \tau, \quad \gamma\tau = 1,$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma}. \quad (4.19)$$

### Час затухання $\tilde{\tau}$

Амплітуда затухаючих коливань зменшується за показниковим законом  $A_n = A_0 e^{-\gamma t}$ , тому теоретично амплітуда коливань буде прямувати до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , але практично коливання затухають за конкретний проміжок часу. При визначенні часу затухання  $\tilde{\tau}$  прийнято вважати, що коливання припинилися, якщо їх амплітуда  $A_n$  зменшилася до величини, порівняної з

помилкою вимірювання. Зазвичай це амплітуда, рівна 0,01 долі початкової амплітуди

$$\frac{A_n}{A_0} = 0,01; \rightarrow e^{-\gamma \tilde{\tau}} = 0,01;$$

$$\tilde{\tau} \approx \frac{4,6}{\gamma}.$$

де  $\tilde{\tau}$  – час затухання. Якщо  $\gamma = 0,1$ , то можна вважати, що коливання припиняться через 40 – 50 коливань. Причина відхилень початкових процесів від теоретичних розрахунків полягає в залежності від коефіцієнтів тертя і коефіцієнтів опору від швидкості (рис. 4.4). При теоретичних розрахунках їх беруть постійними величинами.

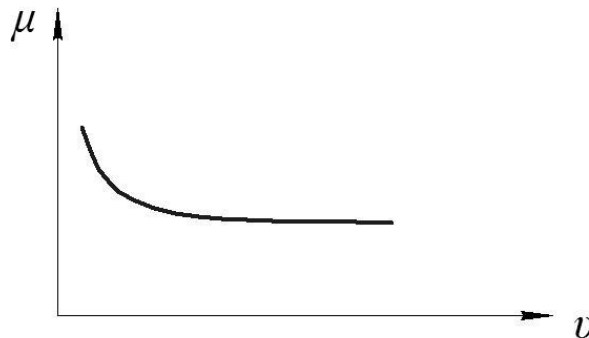


Рисунок 4.4

При малих швидкостях коефіцієнти збільшуються, прагнучи до визначеної межі. Якщо коливання продовжуються так довго, що швидкість робиться менше певної величини, то строго кажучи, вже не можна представити затухаючі коливання, рівнянням (4.3), так як  $\mu$  змінюється. Тому амплітуда буде зменшуватися швидше.

### Середнє значення енергії осцилятора за період

У будь-який момент часу повна енергія системи дорівнює

$$E = E_k + E_{II}.$$

Знайдемо середнє значення енергії  $\langle E \rangle$  осцилятора за період. Середня енергія за період дорівнює сумі середньої кінетичної енергії і середньої потенціальної енергії осцилятора

$$\langle E \rangle = \langle E_k \rangle + \langle E_{II} \rangle.$$

Середнє значення кінетичної енергії за період

$$\langle E_k \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right\rangle.$$

Знайдемо  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$  із рівняння для  $x$  (4.16)

$$\dot{x} = A_0 (-\gamma e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + \omega e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)),$$

$$(\dot{x})^2 = A_0^2 e^{-2\gamma t} [\gamma^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) - 2\gamma\omega \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)].$$

Середнє значення синуса і косинуса за період дорівнює нулю. Перетворимо третій доданок. Він дорівнює нулю

$$\langle 2 \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin 2(\omega t + \varphi) \rangle = 0.$$

Вище було показано, що за період

$$\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}, \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}.$$

Відповідно,

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = A_0^2 \frac{1}{2} e^{-2\gamma} (\gamma^2 + \omega^2). \quad (4.20)$$

Вважатимемо, що затухання за період мале, тобто  $\omega_0 \gg \gamma$ , тоді  $\omega \approx \omega_0$ . Враховуючи незначне затухання, можна припустити, що  $e^{-2\gamma}$  не змінюється за період, тоді

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} mA_0^2 \left( \frac{1}{2} e^{-2\gamma} (\gamma^2 + \omega_0^2) \right).$$

Враховуючи, що  $\omega_0 \gg \gamma$  середнє значення кінетичної енергії за період можна вважати рівним

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{4} mA_0^2 e^{-2\gamma} \omega_0^2.$$

Обчислимо середнє значення потенціальної енергії за період

$$\langle E_{II} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} kx^2 \right\rangle.$$

Підставимо вираз для  $x$  (4.16)

$$\langle E_{II} \rangle = \frac{1}{2} kA_0^2 e^{-2\gamma} \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle, \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2},$$

$$\langle E_{II} \rangle = \frac{1}{4} kA_0^2 e^{-2\gamma}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = m\omega_0^2,$$

$$\langle E_{II} \rangle = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma}.$$

Середнє значення енергії осцилятора за період

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t}. \quad (4.21)$$

### Втрати механічної енергії за період

Втрати механічної енергії за період можна знайти різними способами.

**Перший спосіб.** Обчислимо середню потужність сили опору за період  $\langle P \rangle$ .

$$\langle P \rangle = -\langle F_{on} \mathcal{G} \rangle, \quad \langle P \rangle = -\langle \mu \mathcal{G}^2 \rangle.$$

Враховуючи (4.20), запишемо середню потужність за період у вигляді

$$\langle P \rangle = -\mu A_0^2 \frac{1}{2} e^{-2\gamma t} (\gamma^2 + \omega^2),$$

оскільки  $\gamma^2 \ll \omega_0^2$ ,  $\omega \approx \omega_0$ , отримаємо

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{2} \mu A_0^2 \omega_0^2 e^{-2\gamma t},$$

$$2\gamma = \frac{\mu}{m} \rightarrow \mu = 2\gamma m,$$

$$\langle P \rangle = -\gamma m A_0^2 \omega_0^2 e^{-2\gamma t}.$$

Втрати енергії за період позначимо  $\Delta E$

$$\langle \Delta E \rangle = \langle P \rangle T$$

$$\langle \Delta E \rangle = -\gamma m A_0^2 \omega_0^2 e^{-2\gamma t} \cdot T,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ або, враховуючи, що } \gamma \ll \omega_0 \text{ (} \omega \approx \omega_0 \text{)} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

$$\langle \Delta E \rangle = -\gamma m A_0^2 \omega_0^2 \frac{2\pi}{\omega_0} e^{-2\gamma t} = -\gamma m A_0^2 \omega_0 2\pi e^{-2\gamma t}. \quad (4.22)$$

**Другий спосіб.** Знайдемо  $\frac{d \langle \Delta E \rangle}{dt}$ , де  $E$  – вираз (4.21)

$$\frac{d \langle \Delta E \rangle}{dt} = -\frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 2\gamma e^{-2\gamma t},$$

$$\frac{d \langle \Delta E \rangle}{dt} = -m \omega_0^2 A_0^2 \gamma e^{-2\gamma t},$$

$$\langle \Delta E_T \rangle = \frac{d \langle E \rangle}{dt} \cdot T,$$

де  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  або, враховуючи, що  $\omega \approx \omega_0$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ,

$$\langle \Delta E_T \rangle = -\gamma m \omega_0 A_0^2 2\pi e^{-2\gamma t}. \quad (4.23)$$

### Добротність осцилятора

Добротність  $Q$  – одна з найважливіших характеристик осцилятора. Добротністю осцилятора називають відношення запасеної енергії до середнього значення енергії, що втрачається за один період, помножене на  $2\pi$ . Добротність осцилятора  $Q$  – безрозмірна величина.

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}. \quad (4.24)$$

Підставивши в (4.24) вирази для  $\langle E \rangle$  (4.21) і  $\langle \Delta E \rangle$  (4.23), отримаємо

$$Q = \frac{2\pi(1/2)m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma}}{\gamma m A_0^2 \omega_0 2\pi e^{-2\gamma}} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\gamma}.$$

Враховуючи, що  $\gamma = 1/\tau$ , де  $\tau$  – час релаксації, можна записати

$$Q = \frac{1}{2} \omega_0 \tau, \quad (4.25)$$

звідси видно, що множення відношення енергій на  $2\pi$  у визначенні  $Q$  спрощує його вираз не міняючи сенсу. Чим більше  $Q$ , тим менше втрати енергії за період.

### 4.3. Графічне представлення затухаючих коливань

#### Плоскі діаграми

На рис. 4.5 зображені плоскі діаграми затухаючих коливань при різних значеннях добротності  $Q$  осциляторів. Чим менша добротність, тим швидше затухають коливання.

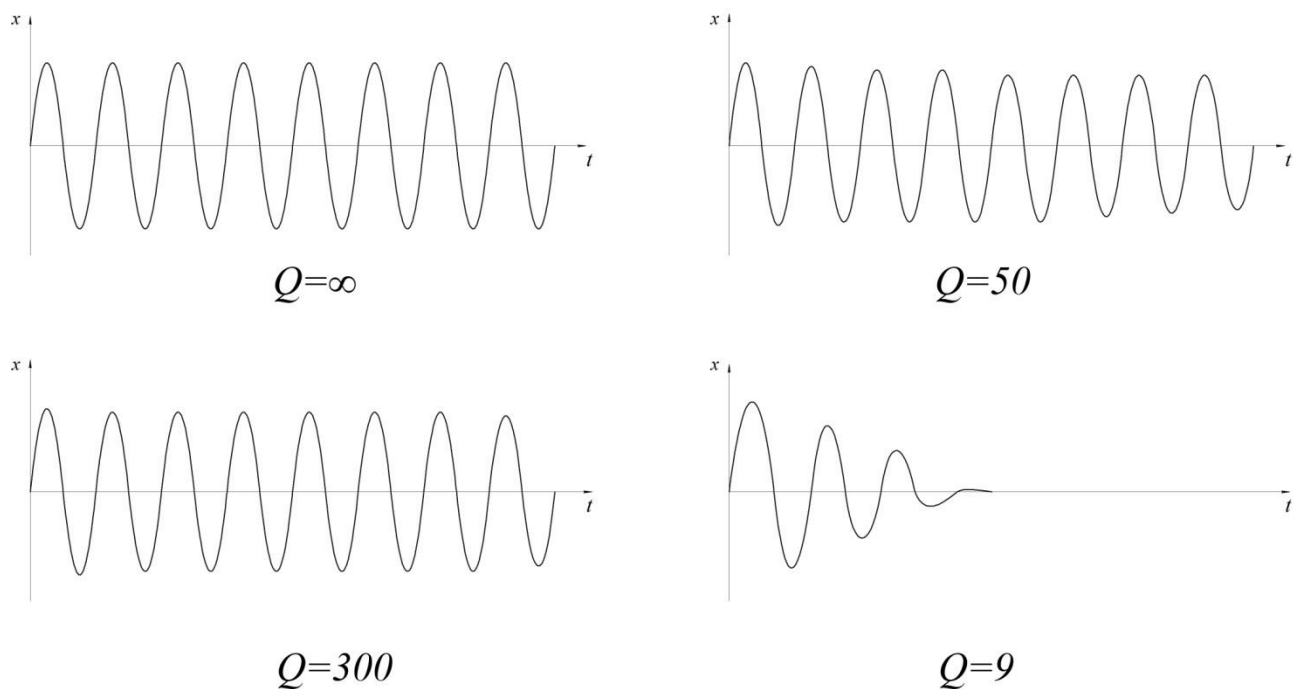


Рисунок 4.5

### Фазові діаграми

Для побудови фазової діаграми знайдемо її траєкторію при малому затуханні ( $\gamma \ll \omega_0$ ).

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t, \quad (4.26)$$

$$\dot{x} = -A_0 \omega_0 e^{-\gamma t} \sin \omega_0 t - A_0 \gamma e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t. \quad (4.27)$$

При малих значеннях коефіцієнта затухання  $\gamma$  можна знехтувати другим доданком у виразі (4.27). Тоді його перепишемо у вигляді

$$\dot{x} = -A_0 \omega_0 e^{-\gamma t} \sin \omega_0 t. \quad (4.28)$$

Для отримання траєкторії піднінемо рівняння (4.26) і (4.28) в квадрат та складемо



$$x^2 + \left( \frac{\dot{x}}{\omega_0} \right)^2 = A_0^2 e^{-2\gamma t}.$$

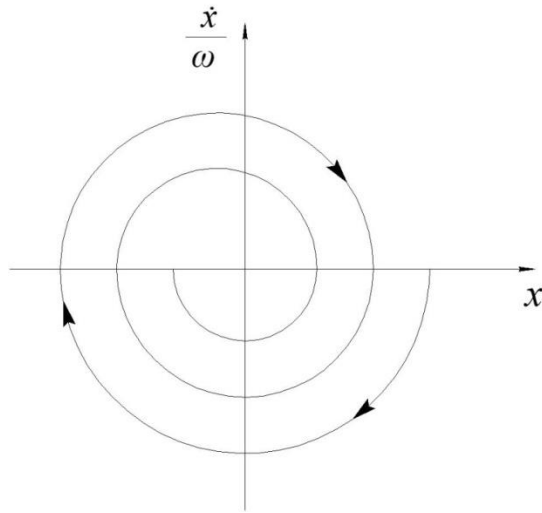


Рисунок 4.6

Це рівняння спіралі, що скручується до центру (рис. 4.6). При цьому відображена точка перетинає додатну піввісь абсцис через період  $T$ .

Фазові траєкторії при великих коефіцієнтах затухання показано на рис. 4.7.

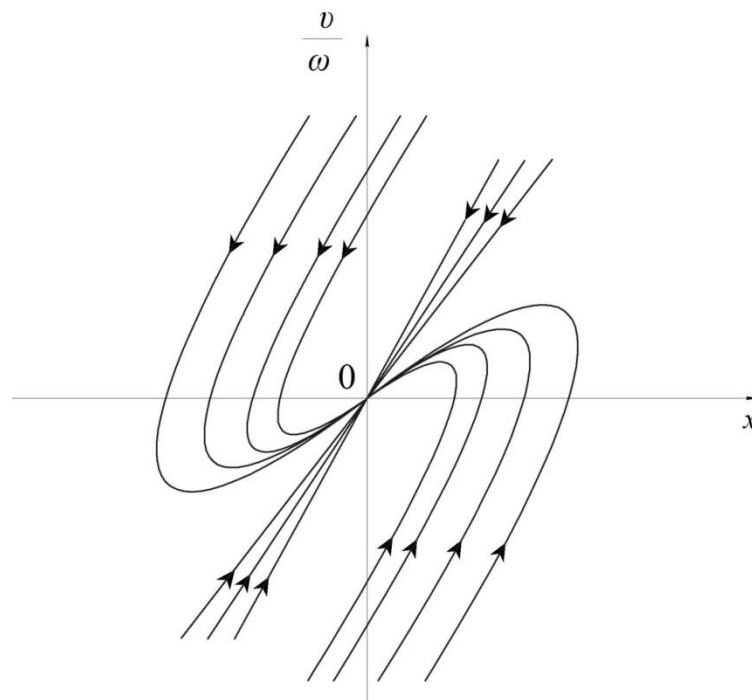


Рисунок 4.7

## Гармонічний аналіз затухаючих коливань

Затухаючі вільні коливання в цілому є неперіодичним процесом і тому їх можна представити як суму безкінечного ряду гармонічних коливальних рухів (інтеграл Фур'є). Спектр таких коливань буде безперервним. Функція  $S(\omega)$ , що визначає розподіл амплітуд, виражається кривою, зображеною на рис. 4.8, а.

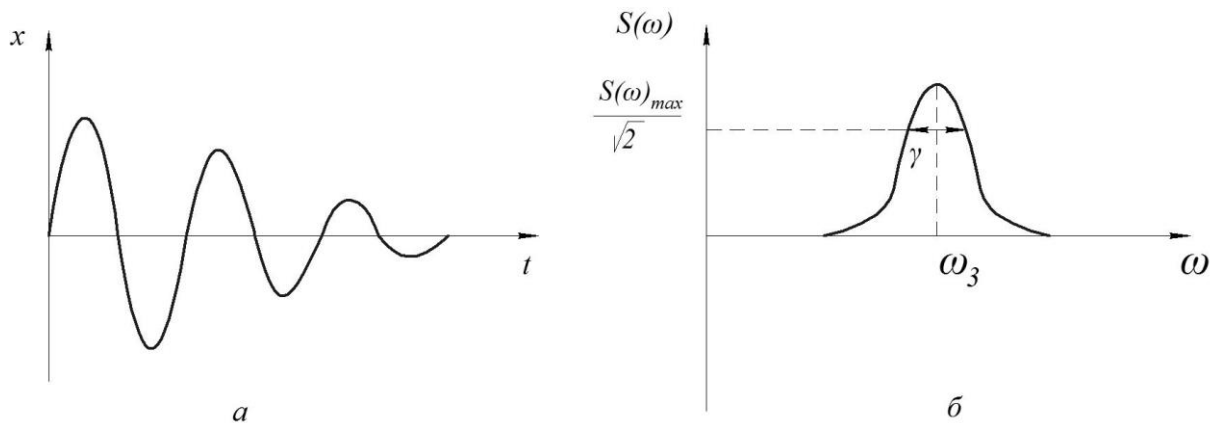


Рисунок 4.8

Максимальне значення кривої  $S(\omega)$  співпадає з частотою затухаючого коливання  $\omega_3$ , а в сторони від цієї частоти амплітуда спадає. Це спадання тим різкіше, чим менший коефіцієнт затухання. Ширина кривої спектру на висоті, рівною  $1/\sqrt{2}$  від максимального значення  $S(\omega)$ , має величину порядку коефіцієнта затухання (див. рис. 4.8, б).

### 4.4. Затухаючі коливання при дії на осцилятор постійної сили тертя

Хай на осцилятор, зображений на рис. 4.1, діють ті ж сили, але силою тертя  $\vec{F}_{TR}$  об поверхню знехтувати неможна, а силою опору середовища  $\vec{F}_c$  можна.

Запишемо другий закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{TP}.$$

Розглянемо випадок, коли  $F = k|x|$ . Початок координат осі  $x$  співпадає з положенням недеформованої пружини.

У проекції на вісь  $x$

$$m\ddot{x} = -kx \pm F_{TP}.$$

Знак перед силою  $F_{TP}$  протилежний знаку проекції швидкості  $\mathcal{G}_x$  на вісь  $x$ .

Перепишемо рівняння

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx \mp F_{TP} &= 0, \\ m\ddot{x} + k\left(x \mp \frac{F_{TP}}{k}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Позначимо  $x' = x \mp \frac{F_{TP}}{k}$ , причому  $\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ , так як  $\frac{F_{TP}}{k} = const$ .

Якщо початок координат перемістити в точки  $x = \pm F_{TP}/k$ , тоді рівняння (4.29) перетвориться до вигляду

$$\ddot{x}' + \omega^2 x' = 0.$$

Це рівняння співпадає з рівнянням для незатухаючих коливань, тому кожен рух між додатними і від'ємними максимальними значеннями відхилень має синусоїдальну форму і однакову частоту, проте центри таких рухів лежать в точках, що мають значення  $x' = 0$ .

Розглянемо докладніше рух осцилятора:

а) осцилятор рухається вправо до положення рівноваги (рис. 4.9).

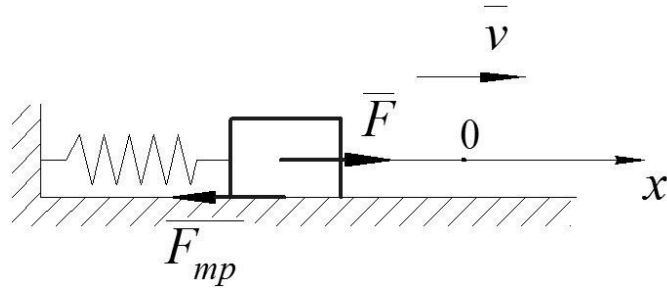


Рисунок 4.9

Швидкість направлена вправо, і вона буде мати такий напрям, поки осцилятор не досягне крайнього положення. Для такого руху рівняння (4.29) має вигляд

$$m\ddot{x} + k\left(x + \frac{F_{TP}}{k}\right) = 0.$$

У положенні рівноваги  $x' = 0$ , тобто

$$x + \frac{F_{TP}}{k} = 0; \quad x_{0_1} = -\frac{F_{TP}}{k}.$$

Тому коливання відбуватимуться біля точки  $0_1$  (рис. 4.10)

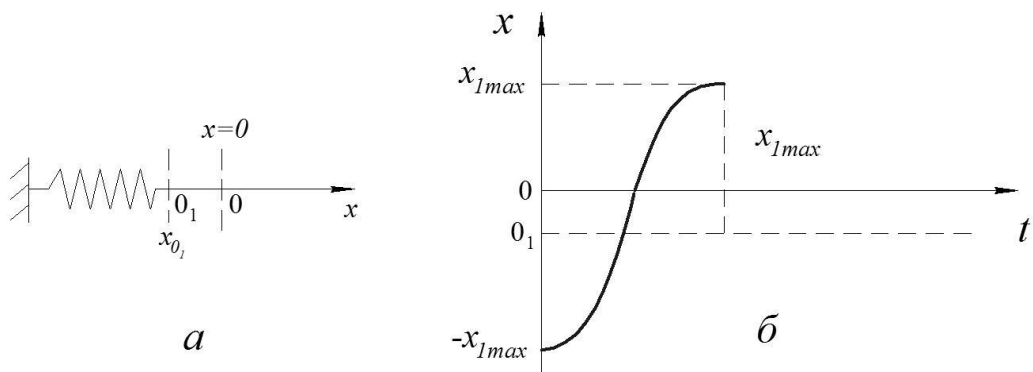


Рисунок 4.10

б) при русі маятника вліво напрям швидкості змінить свій знак на

протилежний, і змінять свій напрям сила тертя і сила пружності (рис. 4.11).

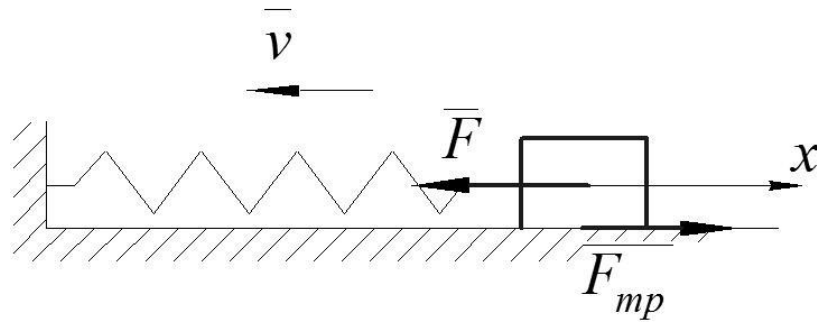


Рисунок 4.11

Рівняння руху осцилятора

$$m\ddot{x} + k\left(x - \frac{F_{TP}}{k}\right) = 0;$$

$$x' = 0; \quad x - \frac{F_{TP}}{k} = 0; \quad x_{0_2} = \frac{F_{TP}}{k}.$$

Коливання відбуватимуться біля точки  $0_2$  (рис. 4.12)

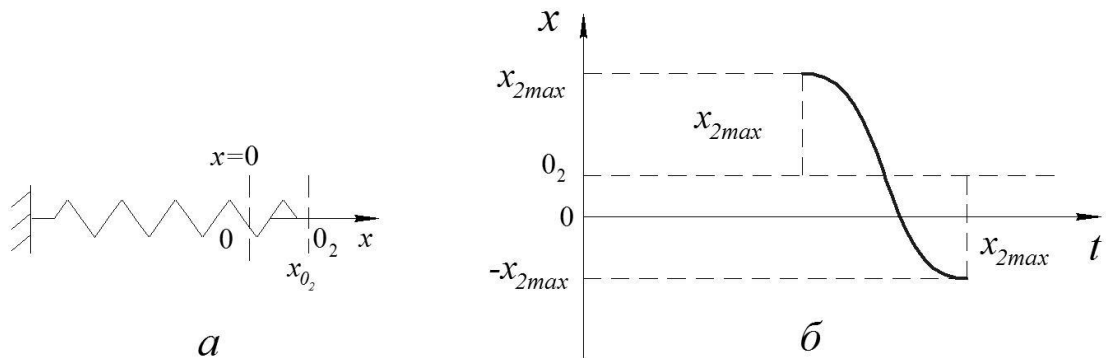


Рисунок 4.12

Об'єднуючи рух за період, отримаємо графік, показаний на рис. 4.13.

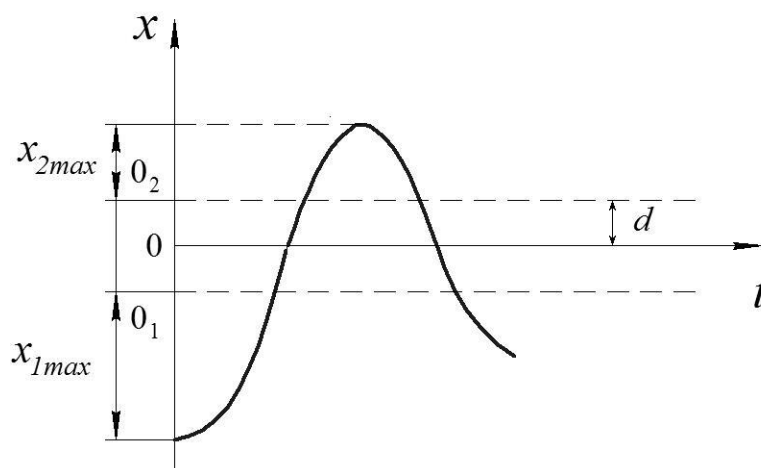


Рисунок 4.13

Як видно з графіка, за кожен період амплітуда зменшується на  $4d$ , де  $d = 0_1 0 = 0_2 0$ . Це можна показати і з енергетичних міркувань.

Позначимо максимальне відхилення маятника відносно осі  $x$  вліво  $x_{1\max}$ , а вправо  $x_{2\max}$ , тоді робота  $W$  сили тертя за половину періоду

$$W = (x_{1\max} + x_{2\max})F_{TP}.$$

Робота дорівнює зміні потенціальної енергії, узятій з протилежним знаком. У точках, де  $x = x_{1\max}$  і  $x = x_{2\max}$  (це точки повороту), швидкість дорівнює 0, і осцилятор володіє тільки потенціальною енергією. Отже,

$$(x_{1\max} + x_{2\max})F_{TP} = -\left(\frac{kx_{2\max}^2}{2} - \frac{kx_{1\max}^2}{2}\right). \quad (4.30)$$

Перетворюючи вираз (4.30), отримаємо зміну амплітуди  $\Delta A_1$  за півперіод

$$\Delta A_1 = x_{1\max} - x_{2\max} = 2 \frac{F_{TP}}{k}; \quad x_{1\max} - x_{2\max} = 2d.$$

При русі за наступних півперіоду  $T/2$  у зворотному напрямі отримаємо

той же результат

$$\Delta A_2 = x_{1\max} - x_{2\max} = 2 \frac{F_{TP}}{k} .$$

Отже, зміна амплітуди за період

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 = 4d .$$

З цих міркувань можна зробити висновок, що амплітуда при дії на тіло, що коливається, постійної сили тертя змінюється за лінійним законом (рис. 4.14, б).

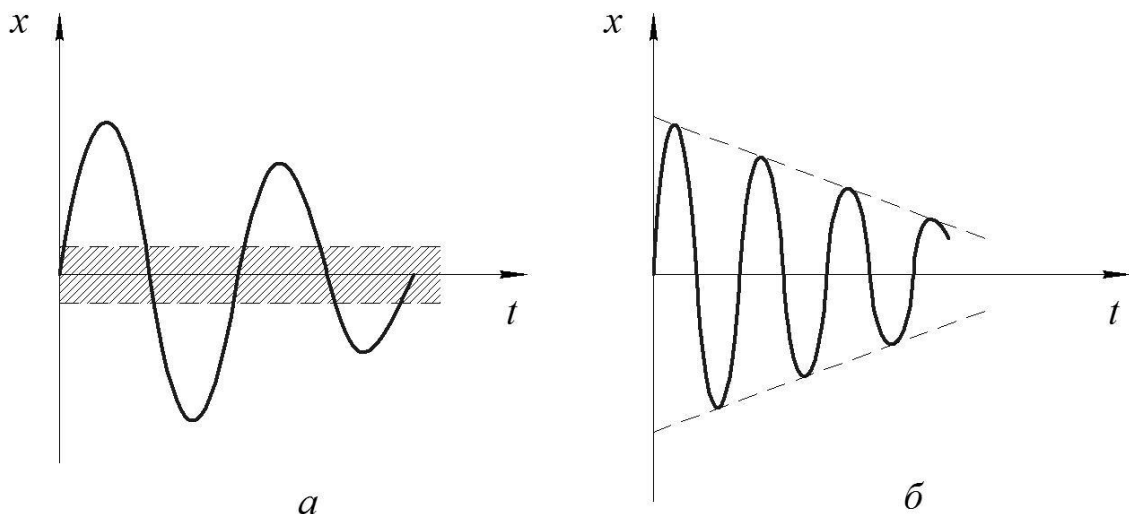


Рисунок 4.14

Із-за зменшення енергії амплітуда коливань осцилятора буде зменшуватися і наступить момент, коли  $A \leq d$ , тоді коливання припиняться і сила тертя ковзання перейде в силу тертя спокою. На рис. 4.14, а заштрихована область є смугою застою.

#### 4.5. Умовний критерій затухання коливань

Коливання, затухаючі за показниковим законом, теоретично припиняються при  $t = \infty$ . Практично прийнято вважати, що коливання затухають, якщо їх енергія зменшилася в 100 разів, тобто амплітуда в 10 разів. Запишемо відношення амплітуд

$$\frac{A_0 e^{-\gamma_0}}{A_0 e^{-\gamma_1}} = 10.$$

Визначимо число коливань  $n$ , після яких амплітуда зменшиться в 10 раз.

$$e^{\gamma(t_1 - t_0)} = 10; e^{mT} = 10; e^{m2\pi/\omega} = 10. \quad (4.31)$$

Знайдемо десятковий логарифм виразу (4.31)

$$\frac{\gamma 2\pi}{\omega} \lg e = 1.$$

Оскільки добротність осцилятора

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\gamma},$$

то, виразивши частоту  $\omega$  через добротність осцилятора, отримаємо

$$n = \frac{Q}{\pi \lg e} \approx 0,74Q. \quad (4.32)$$

Коливання можна вважати незатухаючими, поки амплітуда не впаде до 0,7 початкового значення. Знайдемо в цьому випадку число коливань  $n$ .



Відношення амплітуд ( $t_0 = 0$ )

$$e^{-\gamma t} = 0,7, \quad e^{-nTt} = 0,7.$$

Замінивши період  $T$  на частоту  $\omega$  і виразивши частоту через добротність, отримаємо

$$e^{n\pi/Q} = 0,7 \rightarrow n = 0,11Q. \quad (4.33)$$

Час існування в цьому випадку незатухаючих коливань

$$t = nT.$$

### **Перелік контрольних питань:**

1. Яким чином сили опору впливають на коливання, які виникли в механічній системі?
2. Записати та пояснити вираз сили опору, що прямо пропорційна швидкості.
3. Навести приклади систем, де діють сили опору, що прямо пропорційна швидкості.
4. Показати схематично осцилятор, де діють сили опору.
5. Записати загальний вираз діючих сил в коливальній системі, де діють сили опору.
6. Диференціальне рівняння руху маси осцилятора з врахуванням сили опору, що прямо пропорційна швидкості.
7. Пояснити суть графіка затухаючих коливань.
8. Закон зміни амплітуди затухаючих коливань.

9. Власна частота затухаючих коливань.
10. Загальний розв'язок диференціального рівняння затухаючих коливань: часткові випадки.
11. Логарифмічний декремент затухання коливань.
12. Як змінюється власна частота коливань при зменшенні амплітуди коливань? Приклад.
13. Що називають часом релаксації в розрізі дослідження затухаючих коливань?
14. Час затухання коливань.
15. Середнє значення енергії осцилятора за період.
16. Що таке добротність осцилятора?
17. Як співвідносяться добротність осцилятора і швидкість затухання коливань.
18. Плоскі діаграми затухаючих коливань.
19. Фазові діаграми затухаючих коливань.
20. Гармонічний аналіз затухаючих коливань.
21. Затухаючі коливання при дії на осцилятор постійної сили тертя.
22. Приклад механічної коливальної системи, де діє постійна сила тертя.
23. Умовний критерій затухання коливань.

## ТЕМА 5. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо динаміку машини або її агрегатів під дією вимушуючих сил, або кінематичних збурень. Такі механічні коливання будемо називати **вимушеними**.

### 5.1. Рівняння вимушених коливань

Незалежно від фізичної природи вважатимемо, що вимушуюча сила задана у вигляді деякої явної функції часу

$$F_i = F_i(t). \quad (5.1)$$

Розглянемо дію вимушуючої сили, що змінюється за **довільним законом**.

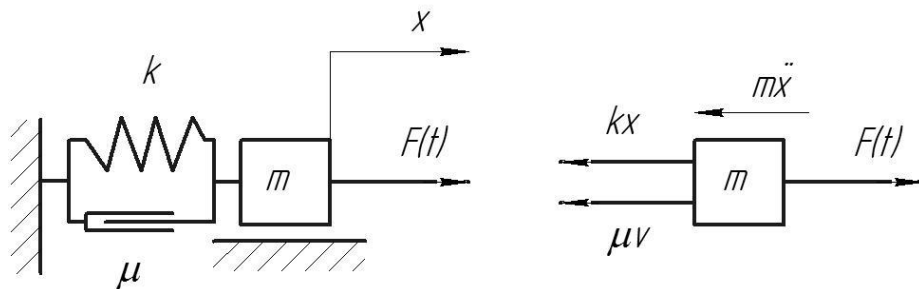


Рисунок 5.1

Рівняння руху для системи з одним ступенем вільності (рис. 5.1) має вигляд

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F(t), \quad (5.2)$$

яке записують в канонічній формі

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = Q(t). \quad (5.3)$$

Тут через  $\omega_0^2 = k/m$  як і раніше позначений квадрат власної частоти системи,  $Q(t) = F(t)/m$  – вимушуюча сила.

У разі кінематичного збурення (рис. 5.1), рівняння руху знову зводиться до стандартної форми, якщо прийняти за приведену силу вираз

$$Q(t) = k \cdot f(t) / m. \quad (5.4)$$

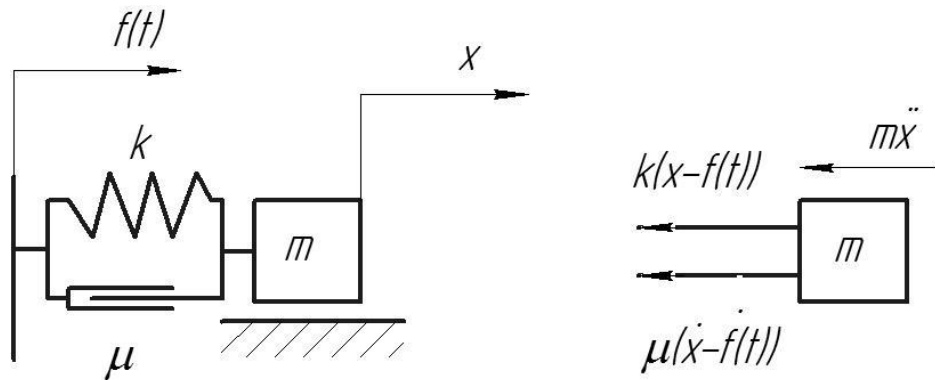


Рисунок 5.2

Загальне рішення рівняння (5.3) складається з рішення однорідного диференціального рівняння, що визначає власні коливання системи, і часткового рішення, що визначає вимушені коливання.

Якщо  $F(0) = 0$  і функція  $F(t)$  диференційовна, то рішення має вигляд

$$x = \frac{F(t)}{k} - \frac{1}{k} \int_0^t \dot{F}(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} \left[ \cos \omega_* (t-\tau) - \frac{\gamma}{\omega_*} \sin \omega_* (t-\tau) \right] d\tau. \quad (5.5)$$

Тут перший член описує результат статичної дії сили  $F(t)$ , а другий член – динамічну поправку.

## Гармонічна вимушуюча сила

Розглянемо вимушені коливання пружинного горизонтального маятника (рис. 5.1), на який діє внутрішня сила, яка змінюється згідно із законом  $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin \omega t$ .

Зовнішня сила направлена уздовж тієї ж прямої, по якій діє сила пружності (по осі  $x$ ).

Другий закон Ньютона для такого осцилятора

$$m \vec{a} = \vec{F}_{np} + \vec{R} + \vec{F} + m \vec{g} + \vec{N}. \quad (5.6)$$

Будемо розглядати випадок, коли сила опору – сила в'язкого тертя  $\vec{F}_c = -\mu \vec{v}$ , силою сухого тертя можна знехтувати, сила пружності  $\vec{F}_{np} = k\Delta\ell$ . За початок відліку осі  $x$  приймемо положення рівноваги.

В проекції на вісь  $x$  отримаємо

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_0 \sin \omega t. \quad (5.7)$$

Розділимо рівняння (5.7) на  $m$  і введемо позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2\gamma.$$

Отримаємо

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot{x} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (5.8)$$

Рівняння (5.8) буде справедливе і для інших осциляторів, тільки змінюватимуться значення фізичних величин, що входять в рівняння маятника. Наприклад, для крутих коливань замість змінної  $x$  потрібно брати кут

повороту  $\varphi$ , замість сили – момент сили, який змінюється за законом  $M = M_0 \cos \omega t$ , і замість маси – момент інерції  $J$ .

Коливання відбуваються під дією трьох сил: сили пружності, сили в'язкого тертя і зовнішньої (вимушуючої) сили. Кожна сила чинить певний вплив на процес коливання.

Ліва частина рівняння (5.8) – це ліва частина рівняння вільних затухаючих коливань. Тому коливання осцилятора в цьому випадку можна розглядати як суму двох коливань, що відбуваються по одній прямій, власних і вимушених. Але власні коливання з часом затухнуть, і залишаться коливання під дією тільки вимушуючої сили. Тому вирішення рівняння (5.8) складається з вирішення диференціального однорідного рівняння з постійними коефіцієнтами

$$x_1 = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

і часткового  $x_2$  рішення, що задовольняє неоднорідне рівняння (5.8)

$$x = x_1 + x_2.$$

Перший член  $x_1$  з часом зменшується, і ним можна буде знехтувати через час

$$\tau \rightarrow x = x_2.$$

### **Час релаксації, перехідні процеси**

Складний рух, що виникає спочатку, називають перехідним процесом, а час встановлення вимушених коливань називається часом релаксації  $\tau$ . Експериментальний графік встановлення вимушених коливань зображений на рис. 5.3 (1 – коливання вимушуючої сили, 2 – затухаючі коливання осцилятора, 3 – вимушені коливання).

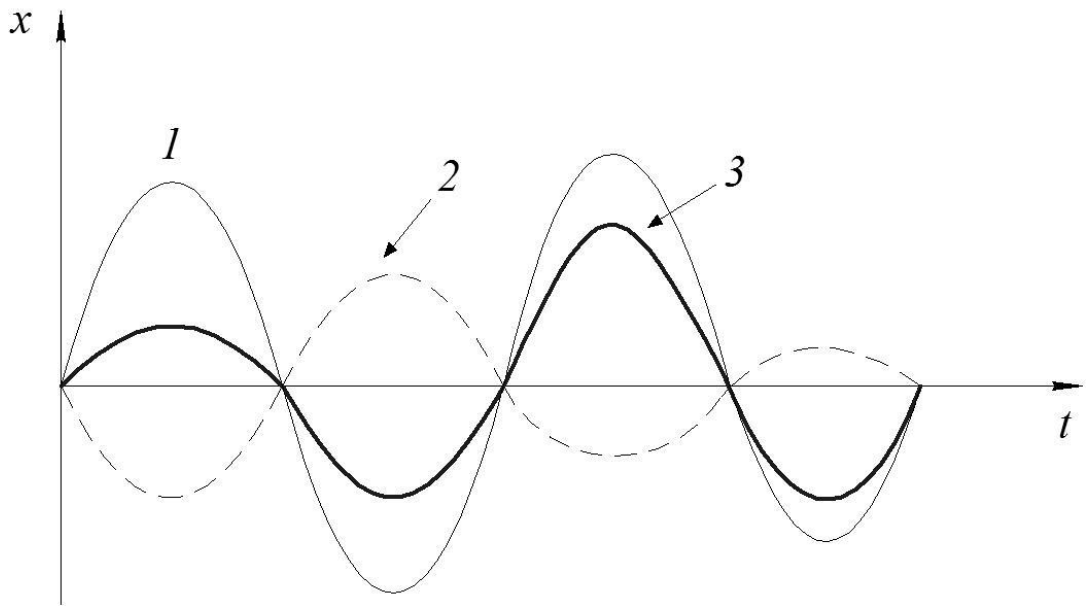


Рисунок 5.3

Вимушені коливання встановлюються у коливальній системі під дією вимушуючої сили не відразу і не відразу припиняються при припиненні зовнішньої дії.

При припиненні дії періодичної сили рух відбувається у формі вільних затухаючих коливань з частотою, характерною для осцилятора.

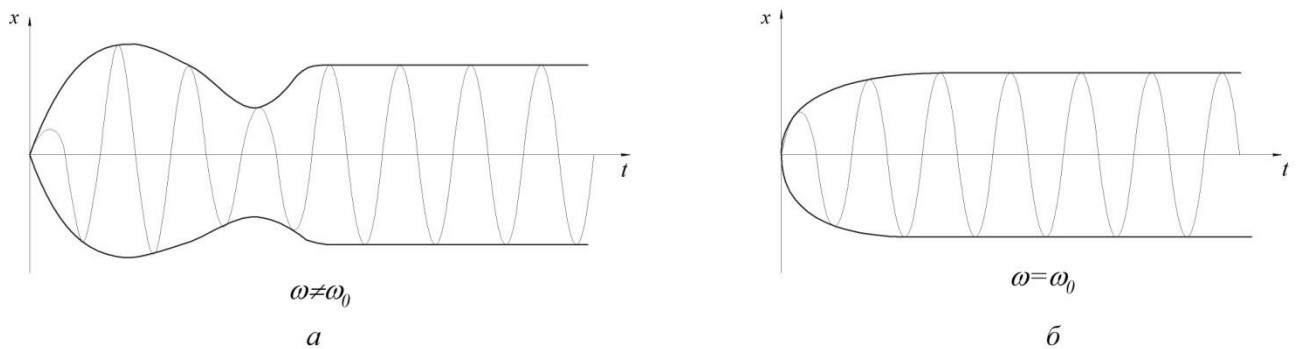


Рисунок 5.4

У разі співпадання частот вимушуючої сили і власних коливань перехідний процес можна представити як суму затухаючих коливань і вимушених коливань з однаковими періодами (рис. 5.4, б і рис. 5.3). Якщо частота вимушуючої сили не співпадає з власною частотою осцилятора, то перехідні коливання можуть набути складнішу форму залежно від різниці

$(\omega - \omega_0)$ . Може виникнути биття. При цьому амплітуда перехідного періоду може бути навіть більшою від амплітуди сталого руху, якщо затухання мале (рис. 5.4, а). Це доводиться враховувати в практичній діяльності.

### Рішення рівняння вимушених коливань

Вирішення рівняння (5.8) можна знаходити по різному. Приведемо два способи рішення, що дають однаковий результат, але в 2-му використовуються уявні величини, а в 1-му ні.

Шукатимемо рішення у вигляді

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.9)$$

де  $A$  – амплітуда коливань,  $\omega$  – частота вимушуючої (зовнішньої) сили,  $\varphi$  – зсув фаз між переміщенням  $x$  і силою. Зсув фаз  $\varphi$  враховує, що зовнішня сила і зсуви можуть досягати максимального значення не одночасно.

Підставимо рішення в рівняння вимушених коливань (5.8). Для цього знайдемо  $\dot{x}$  і  $\ddot{x}$ :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + 2\gamma A\omega \cos(\omega t + \varphi) + A\omega_0^2 \sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (5.10)$$

Щоб вираз (5.9) був рішенням рівняння (5.8), отримане рівняння (5.10) повинно бути тотожністю для будь-якого моменту часу. Це може виконуватися тільки при певних умовах. Знайдемо їх. Розкладемо  $\cos(\omega t + \varphi)$  і  $\sin(\omega t + \varphi)$



$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi,$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi.$$

Підставимо в тотожність

$$\begin{aligned} & A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t \cos \varphi + A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t \sin \varphi + 2\gamma\omega A \cos \omega t \cos \varphi - \\ & - 2\gamma\omega A \sin \omega t \sin \varphi - \frac{F_0}{m} \sin \omega t = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Вираз (5.11) виконуватиметься у будь-який момент часу, якщо коефіцієнти при  $\cos \omega t$  і  $\sin \omega t$  дорівнюватимуть нулю, оскільки  $\sin \omega t$  і  $\cos \omega t$  не можуть одночасно перетворюватися в нуль. Маємо

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\gamma\omega A \sin \varphi - F_0 / m = 0, \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\gamma\omega A \cos \varphi = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

З отриманих виразів визначимо амплітуду  $A$  і фазу  $\varphi$ . Для цього друге рівняння системи (5.12) перепишемо у вигляді

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.13)$$

Скористаємося співвідношенням  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ . Піднесемо отримане рівняння (5.13) до квадрату і врахуємо, що  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ .

$$\frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{4\gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (5.14)$$

Перетворимо вираз (5.14)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \cos^2 \varphi = 4\gamma^2 \omega^2 \cos^2 \varphi$$

і отримаємо

$$\cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Знайдемо  $\sin \varphi$

$$\sin \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \varphi,$$

$$\sin \varphi = -\frac{(2\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}},$$

$$\sin \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Знайдемо амплітуду  $A$  і фазу коливань  $\varphi$  з першого рівняння системи (5.12), підставивши в нього  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ . В результаті отримаємо

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad (5.15)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left( -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (5.16)$$

Як видно,  $A$  і  $\varphi$  залежать від  $\omega$ ,  $\omega_0$  і  $\gamma$ .

**Рішення рівняння вимушених коливань з використанням комплексних виразів**

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (5.17)$$

Замінімо член, що характеризує силу, виразом  $y = \alpha_0 e^{i\omega t}$ , де  $\alpha_0 = F_0 / m$ .

Використовуючи рівність Ейлера,  $y$  можна представити у вигляді

$$\alpha_0 e^{i\omega t} = \alpha_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Звідси видно, що з виразом зовнішньої сили співпадає дійсна частина  $y$ .

Після заміни отримаємо рівняння

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha_0 e^{i\omega t}.$$

Вирішення рівняння шукатимемо у вигляді

$$x = x_0 e^{i\omega t}.$$

де  $x_0$  може бути комплексним числом.

Підставимо рішення в рівняння (5.17), заздалегідь отримавши  $\dot{x}$  і  $\ddot{x}$ :

$$\dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t},$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t},$$

$$(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2)x_0 e^{i\omega t} = \alpha_0 e^{i\omega t}.$$

Звідси

$$x_0 = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega}.$$

Виділимо окремо у виразі для  $x_0$  дійсну і уявну частину. Для цього помножимо чисельник і знаменник на спряжений до знаменника вираз (Пригадаємо, що спряженим виразом комплексного числа  $(a + bi)$  називається комплексне число  $(a - bi)$ .  $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$ ).

$$x_0 = \alpha_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\gamma i \omega}{((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma i \omega)((\omega_0^2 - \omega^2) - 2\gamma i \omega)},$$

$$x_0 = \alpha_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} - i \frac{2\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}. \quad (5.18)$$

Дійсна частина

$$Re(x_0) = \alpha_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}.$$

Помножимо  $x_0$  на спряжений йому вираз  $x_0^+$

$$x_0 x_0^+ = \alpha_0^2 \left( \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} - i \frac{2\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right) \times$$

$$\times \left( \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} + i \frac{2\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right),$$

$$x_0 x_0^+ = \alpha_0^2 \left( \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2)^2} \right),$$

$$x_0 = \sqrt{x_0 x_0^+} \rightarrow x_0 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}.$$

Знайдемо  $tg \varphi$

$$x_0 = \alpha_0 (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

На основі вище викладеного, отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad \sin\varphi = -\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

Звідси

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

## 5.2. Аналіз амплітуд і фаз вимушених коливань

**Амплітудні значення зсуву, швидкості і прискорення**

Значення амплітуди переміщення

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \quad (5.19)$$

Значення амплітуди швидкості

$$\mathcal{G}_0 = A\omega,$$

$$\mathcal{G}_0 = \frac{F_0\omega}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 / \omega^2 + 4\gamma^2}}. \quad (5.20)$$

Значення амплітуди прискорення

$$a_0 = A\omega^2$$

$$a_0 = \frac{F_0 \omega^2}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 / \omega^4 + 4\gamma^2 / \omega^2}}. \quad (5.21)$$

Амплітуди переміщення, швидкості і прискорення по-різному залежать від частоти вимушуючої сили.

### **Максимальні значення амплітуд переміщення, швидкості і прискорення (резонанс)**

Знайдемо, при якій частоті зовнішньої вимушуючої сили  $\omega$  амплітуда переміщення даного осцилятора буде максимальною. Для цього знайдемо мінімальне значення підкореневого виразу для  $A$  (5.19)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2] &= 0, \\ -2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega + 8\gamma^2 \omega &= 0, \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \end{aligned}$$

При мінімальному значенні підкореневого виразу (знаменника) амплітуда буде максимальною. Частота, при якій амплітуда переміщення досягає максимального значення, називається резонансною. Якщо затухання мале,  $\omega \gg \gamma$ , то у разі резонансу  $\omega \approx \omega_0$ . Відповідно, при малому затуханні амплітуда вимушених коливань максимальна, якщо частота вимушуючої сили, дорівнює частоті власних коливань. Саме явище зростання амплітуди при частоті вимушуючої сили рівній власній частоті коливань системи, називається явищем резонансу.

Явище резонансу можна спостерігати на простому прикладі. На нитці, що закріплена горизонтально між двома штативами, підвішені 4 математичних маятника (рис. 5.5).

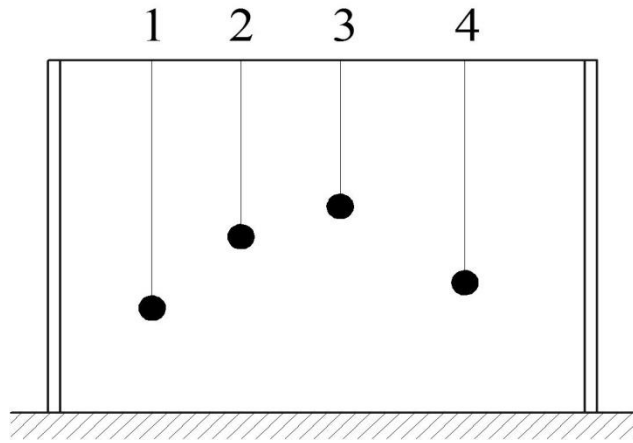


Рисунок 5.5

Довжини всіх маятників різні. Довжину 4-го маятника можна змінювати, послідовно роблячи рівною довжинам 1, 2, 3 маятників. Якщо 4-й маятник привести в коливальний рух, то і нитка прийде в коливальний рух з тією ж частотою і на маятники 1, 2 і 3 буде діяти періодична вимушуюча сила. При цьому вони коливатимуться з різними амплітудами. З максимальною амплітудою коливатиметься маятник, довжина якого дорівнюватиме довжині 4-го маятника. При цьому всі маятники будуть коливатися з частотою 4-го маятника.

При малому затуханні і при резонансі

$$A = \frac{F_0}{2m\gamma\omega}, \quad 2\gamma = \frac{\mu}{m}, \quad A = \frac{F_0}{\mu\omega},$$

$$\cos\varphi \rightarrow 0, \quad \sin\varphi \rightarrow -1, \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

Отже, зміщення при резонансі відстає по фазі від сили.

Обчислимо максимальне значення амплітуди швидкості. Для цього знайдемо при якій частоті  $\omega$  підкореневий вираз рівняння (5.20) досягає мінімального значення

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\gamma^2 \right) = 0,$$

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega_0^4}{\omega^2} + \frac{\omega_0^4}{\omega^2} - \frac{2\omega_0^2\omega^2}{\omega^2} + 4\gamma^2 \right) = 0,$$

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega_0^4}{\omega^2} + \omega^2 \right) = 0,$$

$$-\frac{2\omega_0^4}{\omega^3} + 2\omega = 0 \rightarrow \omega = \omega_0.$$

Отже, максимальна амплітуда швидкості буде при  $\omega = \omega_0$ , і вона не залежить від  $\gamma$ .

Зсув фаз при коливаннях між зміщенням і швидкістю рівний  $-\pi/2$ . При резонансі зсув фаз між вимушуючою силою і переміщенням рівний  $\pi/2$ . Отже, зсув фаз між вимушуючою силою і швидкістю при резонансі

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Це означає, що напрями вимушуючої сили, і швидкості при резонансі співпадають.

Максимальне значення амплітуди швидкості отримаємо, замінивши  $\omega$  на  $\omega_0$  у виразі (5.20) для амплітуди швидкості

$$\mathcal{G}_{0\max} = \frac{F_0\omega}{2\gamma\omega t} = \frac{F_0}{2\gamma t}; \quad 2\gamma = \frac{\mu}{t}; \quad \mathcal{G}_{0\max} = \frac{F_0}{\mu}.$$

Максимальне значення амплітуди  $\mathcal{G}_{0\max}$  визначається амплітудою вимушуючої сили і коефіцієнтом опору середовища.

Знайдемо максимальне значення амплітуди прискорення. Для цього знайдемо при якій частоті підкореневий вираз рівняння (5.21) досягає мінімального значення



$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^4} + \frac{4\gamma^2}{\omega^2} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega_0^4}{\omega^4} - 2 \frac{\omega_0^2 \omega^2}{\omega^4} + \frac{\omega^4}{\omega^4} + \frac{4\gamma^2}{\omega^2} \right) = 0,$$

$$-\frac{4\omega_0^4}{\omega^5} + \frac{4\omega_0^2}{\omega^3} - \frac{8\gamma^2}{\omega^3} = 0,$$

$$-\omega_0^4 + \omega_0^2 \omega^2 - 2\gamma^2 \omega^2 = 0,$$

$$\omega = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}},$$

оскільки  $\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0$ , то  $\omega > \omega_0$ . Максимальне значення амплітуди прискорення настає при частоті трохи більшій, ніж власна частота  $\omega_0$ . При малому згасанні частота вимушених коливань співпадає з власною частотою осцилятора  $\omega \approx \omega_0$ .

Максимальне значення амплітуди прискорення при резонансі отримаємо, замінивши  $\omega$  на  $\omega_0$  у виразі для амплітуди прискорення (5.21).

$$a_{0\max} = \frac{F_0 \omega_0}{2\gamma m}, \quad 2\gamma = \frac{\mu}{m}; \quad a_{0\max} = \frac{F_0 \omega_0}{\mu}.$$

Зсув фаз між переміщенням і прискоренням завжди рівний  $\pi$ . Тому зсув фаз між вимушуючою силою і прискоренням  $\psi = \varphi + \pi$ . При резонансі  $\psi = -\pi/2 + \pi = \pi/2$ , прискорення випереджає вимушуючу силу на  $\pi/2$ .

**Значення амплітуд переміщення, швидкості і прискорення при  $\omega \ll \omega_0$**

У отриманих формулах для амплітуд переміщення, швидкості і прискорення (5.19) – (5.21) можна нехтувати величиною  $\omega^2$  у виразі  $(\omega_0^2 - \omega^2)$ , оскільки  $\omega \ll \omega_0$ . При цьому вважатимемо, що затухання мале, тобто  $\gamma \ll \omega_0$ .

1. В цьому випадку для амплітуди переміщення отримаємо

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \text{ або } A = \frac{F_0}{k}, \text{ оскільки } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Амплітуда переміщення виявляється дорівнює величині статичного переміщення, яке б викликало тільки сила  $F_0$ .

Для визначення зсуву фаз між вимушуючою силою, і переміщенням скористаємося формулою для  $\text{tg } \varphi$  (5.15)

$$\text{tg } \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2}, \text{ але оскільки } \gamma \ll \omega_0, \text{ то } \text{tg } \varphi \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 0.$$

Фаза зсуву вимушених коливань приблизно співпадає з фазою вимушуючої сили.

2. Розглянемо амплітуду швидкості

$$\mathcal{G}_0 \approx \frac{F_0\omega}{m\omega_0^2}, \text{ оскільки } \omega \ll \omega_0, \text{ то при } \omega \rightarrow 0, \mathcal{G}_0 \rightarrow 0.$$

Зсув фаз між вимушуючою силою і швидкістю

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}, \psi \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ при } \omega \rightarrow 0.$$

3. Амплітуда прискорення при  $\omega \ll \omega_0$  або  $\omega \rightarrow 0$

$$a_0 = \frac{F_0\omega^2}{m\omega_0^2}, \text{ при } \omega \rightarrow 0, a_0 = 0.$$

Зсув фаз між вимушуючою силою і прискоренням  $\psi = \varphi + \pi$ , при  $\omega \rightarrow 0$   $\varphi = 0$  відповідно  $\psi = \pi$ , прискорення випереджає вимушуючу силу на  $\pi$ .

**Значення амплітуд переміщення, швидкості і прискорення при  $\omega \gg \omega_0$  або  $\omega \rightarrow \infty$**

У виразах для амплітуд зсуву, швидкості і прискорення (5.19) – (5.21) можна нехтувати величиною  $\omega_0$  у виразі  $(\omega_0^2 - \omega^2)$ , і будемо вважати, що  $\gamma \ll \omega_0$ .

1. Тоді амплітуда переміщення

$$A = \frac{F_0}{m\omega^2} \text{ при } \omega \rightarrow \infty \quad A \rightarrow 0.$$

Зсув фаз між вимушуючою силою і переміщенням з формули для  $\text{tg } \varphi$  (5.15) при  $\omega \rightarrow \infty$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{2\gamma}{\omega_0^2 / \omega - \omega}; \quad \varphi \rightarrow 0.$$

2. Для амплітуди швидкості

$$g_0 \approx \frac{F_0 \omega}{m\omega^2} \approx \frac{F_0}{m\omega}, \text{ відповідно, при } \omega \rightarrow \infty \quad g_0 \rightarrow 0.$$

Зсув фаз між вимушуючою силою і швидкістю

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ то } \psi = \pi.$$

За фазою швидкість протилежна вимушуючій силі.

3. Для амплітуди прискорення

$$a_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^4} - \frac{2\omega_0^2 \omega^2}{\omega^4} + \frac{\omega^4}{\omega^4} + \frac{4\gamma^2}{\omega^2}}} = \frac{F_0}{m},$$

амплітуда прискорення прагнуче до постійної величини.

Зсув фаз між вимушуючою силою і прискоренням  $\psi = \varphi + \pi$ ,  $\varphi = -\pi$ , відповідно  $\psi = 0$ , --прискорення співпадає по фазі з вимушуючою силою.

### 5.3. Побудова та аналіз графіків амплітуд та зсувів фаз від частоти

Якщо  $\omega = 0$ , амплітуда найменша. Із збільшенням  $\omega$  зменшується  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  і амплітуда збільшується, досягаючи максимального значення при  $\omega = \omega_0$ . При  $\omega > \omega_0$  починає збільшуватися  $(\omega^2 - \omega_0^2)$  і амплітуда зменшується, прямуючи до нуля (рис. 5.6).

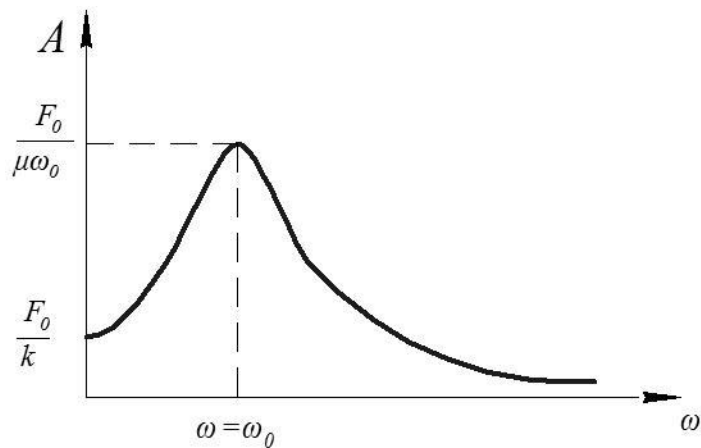


Рисунок 5.6

Графік показує залежність амплітуди від частоти при відповідному значенні  $\gamma$ . Розглянемо, як залежить амплітуда зсуву від коефіцієнта затухання  $\gamma$ .

$$\frac{A_{\max}}{A} = \frac{F_0}{\mu\omega_0} \cdot \frac{k}{F_0} = \frac{\omega_0^2 m}{2\gamma m \omega_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Чим менше  $\gamma$ , тим більша амплітуда при резонансі в порівнянні із статичним відхиленням. Тому резонансна крива сильно залежить від  $\gamma$  (рис. 5.7).

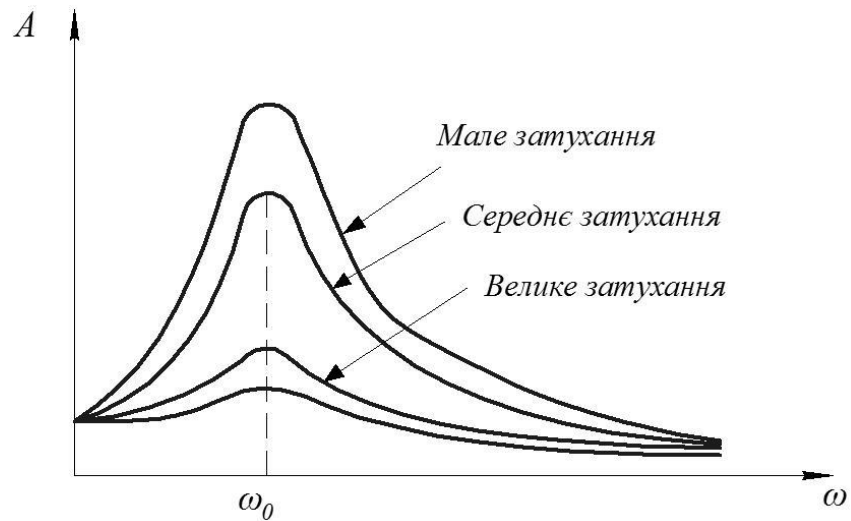


Рисунок 5.7

При великому затуханні крива резонансу сильно притуплюється, явище резонансу стає все менш помітним. Тому резонансними властивостями володіють осцилятори тільки з малим затуханням. Це використовується при шкідливій дії резонансу. Відзначимо також, що при резонансі амплітуда обернено пропорційна  $\mu$ .

Чим більше  $\mu$ , тим менша амплітуда.

### Графік залежності амплітуди швидкості від $\omega$

При  $\omega=0$ ,  $\mathcal{V}_0=0$  із збільшенням  $\omega$ , тобто при  $\omega \rightarrow \omega_0$ , амплітуда швидкості буде збільшуватися, оскільки підкореневий вираз у формулі (5.20) для амплітуди швидкості буде зменшуватися. Коли  $\omega = \omega_0$ , амплітуда швидкості досягає максимуму, і при подальшому збільшенні  $\omega$  головну роль в підкореному виразі гратиме другий доданок, оскільки із збільшенням  $\omega(\omega \rightarrow \infty)$   $\mathcal{V}_0 \rightarrow 0$  (рис. 5.8).

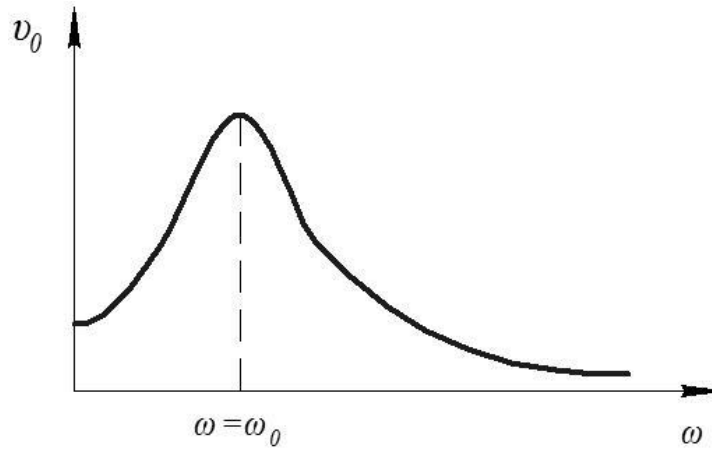


Рисунок 5.8

### Графік залежності прискорення від $\omega$

При  $\omega = 0 \rightarrow a_0 = 0$ , при  $\omega \rightarrow \omega_0$  в знаменнику виразу для амплітуди прискорення (5.15) 1-й доданок зменшується, і амплітуда збільшується, і при  $\omega \approx \omega_0$  досягає максимуму, при  $\omega > \omega_0$  амплітуда прискорення зменшується (рис. 5.9)

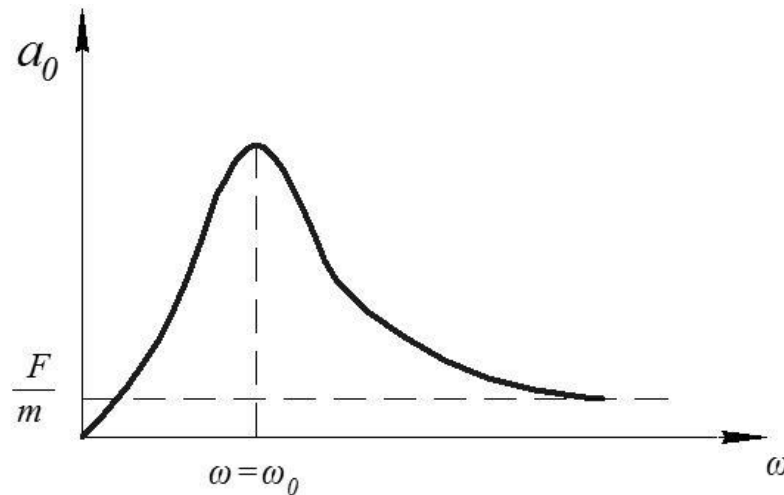


Рисунок 5.9

### Графіки залежності переміщення фаз від $\omega$

На рис. 5.10 представлений графік залежності зсуву фаз між вимушуючою силою  $F$ , і переміщенням  $x$  залежно від частоти вимушених коливань  $\omega$ . На рис. 5.11 – такий же графік для швидкості, на рис. 5.12 – для прискорення.

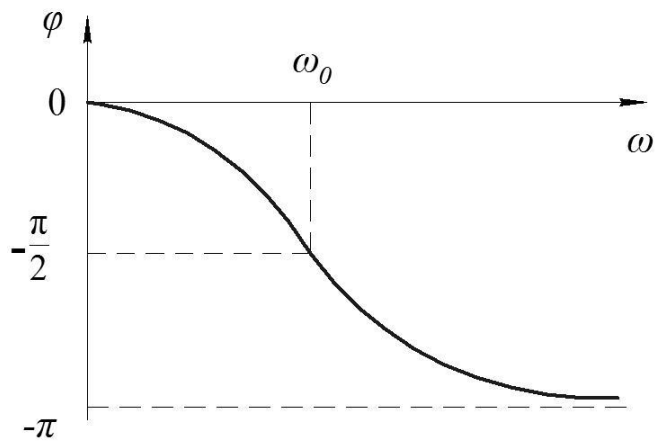


Рисунок 5.10

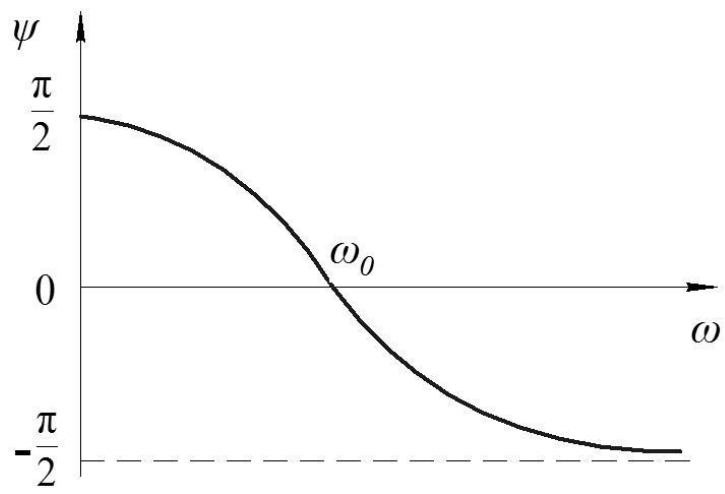


Рисунок 5.11

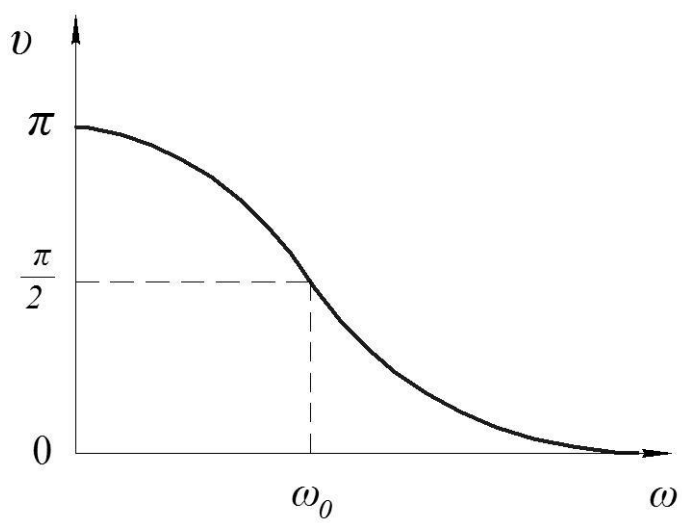


Рисунок 5.12

## 5.4. Поглинання потужності

Знайдемо середнє за період значення потужності вимушуючої сили, яка діє на осцилятор

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \langle F\dot{x} \rangle, \\ \langle P \rangle &= - \langle F_0 \sin \omega t \cdot A\omega(\cos \omega t + \varphi) \rangle.\end{aligned}$$

Підставимо значення амплітуди вимушених коливань

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \left\langle \frac{F_0 \omega \cdot F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cdot \sin \omega t \cos(\omega t + \varphi) \right\rangle, \\ \langle P \rangle &= \frac{F_0^2 \omega}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cdot \langle \sin \omega t \cos(\omega t + \varphi) \rangle.\end{aligned}$$

Знайдемо середнє значення виразу, для цього перетворимо добуток  $\sin \omega t \cos(\omega t + \varphi)$  –

$$\begin{aligned}\langle \sin \omega t \cos(\omega t + \varphi) \rangle &= \langle \sin \omega t (\cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi) \rangle = \\ &= \langle \sin \omega t \cos \omega t \cos \varphi - \sin^2 \omega t \sin \varphi \rangle = \\ &= \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle \cos \varphi - \langle \sin^2 \omega t \rangle \sin \varphi = \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right\rangle \cos \varphi - \left\langle \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right\rangle \sin \varphi = -\frac{1}{2} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Тоді

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{2} \frac{F_0^2 \omega \sin \varphi}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}. \quad (5.22)$$

З виразу (5.22) видно, що фаза  $\varphi$  грає важливу роль. Підставимо  $\sin \varphi$



$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 \omega \cdot 2\gamma \omega}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}},$$

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2 \omega^2 \gamma}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2)},$$

$$\langle P \rangle \sim A^2.$$

Середнє значення потужності при резонансі, коли затухання мале  $\gamma \ll \omega_0$  і  $\omega = \omega_0$ , буде рівне

$$\langle P_p \rangle = \frac{1}{4} \frac{F_0^2}{m\gamma}.$$

## 5.5. Аналіз відмінності вимушених коливань в залежності від частот

**Частота вимушуючої сили набагато менша власної частоти,  $\omega \ll \omega_0$**

Враховуючи значення різниці фаз між переміщенням і вимушуючою силою, рішення вимушених коливань представимо у вигляді

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin \omega t.$$

Знайдемо похідні  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  і підставимо рішення в рівняння вимушених коливань (5.8)

$$\dot{x} = \frac{F_0 \omega}{m\omega_0^2} \cos \omega t,$$

$$\ddot{x} = -\frac{F_0 \omega^2}{m\omega_0^2} \sin \omega t,$$

$$-\frac{F_0 \omega^2}{m\omega_0^2} \sin \omega t + \frac{k}{m} \cdot \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin \omega t + 2\gamma \frac{F_0 \omega}{m\omega_0^2} \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

Отримаємо, враховуючи зв'язок між частотами, що 1-й і 3-й доданок в лівій частині близькі до нуля, тому

$$k \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin \omega t = F_0 \sin \omega t .$$

Рівняння для сталих вимушених коливань має вигляд

$$kx = F_0 \sin \omega t .$$

Зовнішня сила знаходиться у фазі з переміщенням і система коливається так, якби в ній виникала повертаюча сила, що немає маси, то сила тертя була відсутня. Графік залежності  $F_3$  і  $\mathcal{A}$  від часу показано на (рис. 5.13).

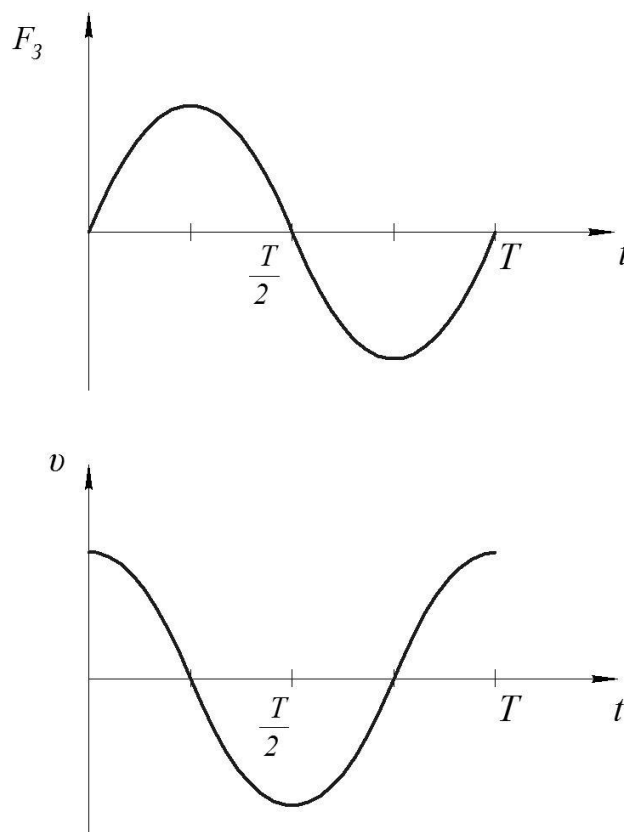


Рисунок 5.13

Робота зовнішньої сили за період дорівнює нулю.

### Частота вимушуючої сили, рівна власній частоті, $\omega = \omega_0$ (резонанс)

Вирішення з урахуванням зсуву фаз запишеться

$$x = \frac{F_0}{\mu\omega_0^2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

Підставимо рішення в рівняння вимушених коливань (5.7)

$$\dot{x} = \frac{F_0}{\mu} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}),$$

$$\ddot{x} = -\frac{F_0\omega_0}{\mu} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}),$$

$$-\frac{F_0\omega}{\mu} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 \frac{F_0}{\mu\omega_0} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + \frac{\mu}{m} \cdot \frac{F_0}{\mu} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

Очевидно, що перші два доданки в отриманому виразі знищують один одного ( $\omega = \omega_0$ ).

Перепишемо силу пружності  $F_{\text{пр}} = kx$ , враховуючи, що  $k = m\omega_0^2$

$$F_{\text{пр}} = \frac{mF_0\omega_0^2}{\mu\omega_0} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{mF_0\omega_0}{\mu} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

При резонансі вимушуюча сила зрівноважує силу опору, і коливання відбуваються тільки за рахунок внутрішніх сил, прямо пропорційних переміщенню. Тому при резонансі частота коливань дорівнює власній частоті. Графік залежності  $F_3$  і  $\mathcal{G}$  від часу показано на рис. 5.14.

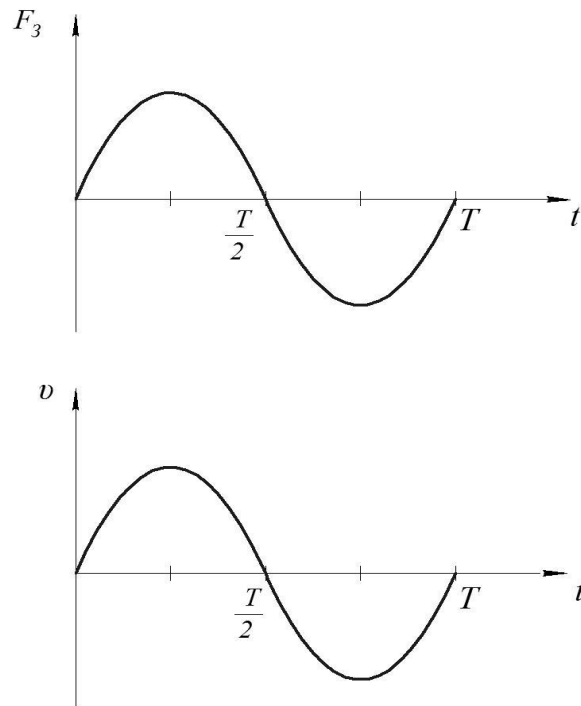


Рисунок 5.14

Напрямок сили  $F_3$  і швидкості  $\mathcal{V}$  завжди співпадають. Тому робота за будь-який відрізок часу от 0 до  $T$  буде додатна, так як система споживає енергію, і амплітуда збільшується.

**Частота вимушуючої сили набагато більша від власної частоти,**  
 $\omega \gg \omega_0$

Рішення з урахуванням зсуву фаз запишеться

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} \sin(\omega t - \pi),$$

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega} \cos(\omega t - \pi),$$

$$\ddot{x} = -\frac{F_0}{m} \sin(\omega t - \pi).$$

Підставимо в рівняння вимушених коливань (5.7)

$$-\frac{F_0}{m} \sin(\omega t - \pi) + \frac{F_0 \omega_0^2}{m \omega^2} \sin(\omega t - \pi) + \frac{\mu}{m} \cdot \frac{F_0}{m \omega} \cos(\omega t - \pi) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t .$$

Другий і третій доданки в отриманому виразі прямують до нуля.

$$-\frac{F_0}{m} \sin(\omega t - \pi) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t ,$$

$$m\ddot{x} = F_0 \sin \omega t ,$$

сталі коливання відбуваються так, як якби діяла одна зовнішня сила. Графіки залежності сили  $F_3$  і швидкості  $\mathcal{V}$  від часу  $t$  показані на рис. 5.15.

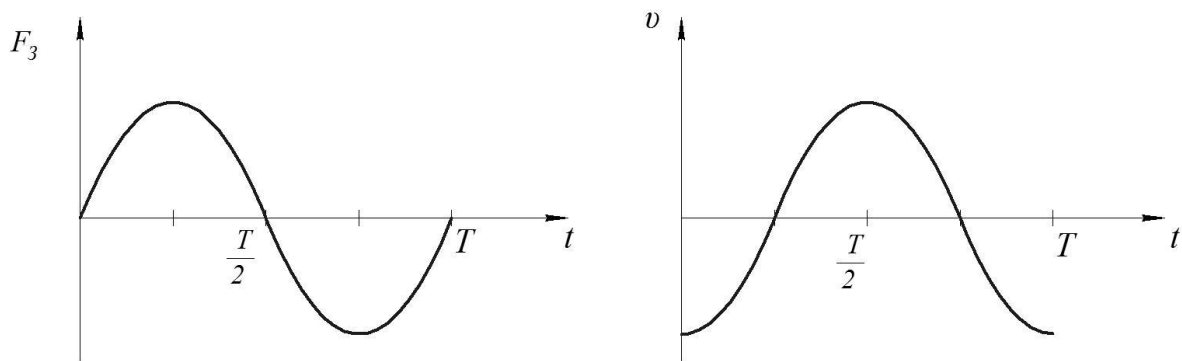


Рисунок 5.15

Виходячи з цього, робота за період зовнішніх сил дорівнює нулю, тобто при коливаннях, що встановилися, енергія не споживається.

## 5.6. Добротність осцилятора і ширина резонансної кривої

### Добротність осцилятора

При розгляді затухаючих коливань було отримано вираз

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\gamma}.$$

Покажемо, що добротність можна представити як відношення амплітуди при резонансі до амплітуди при  $\omega = 0$  (тобто до статичного її значення при  $\omega = 0$ ).

$$Q = \frac{A_{рез}}{A_{стат}}.$$

$$Q = \frac{F_0}{\mu \omega_0} \frac{m \omega_0^2}{F_0} = \frac{m \omega_0}{\mu}; \quad \frac{\mu}{m} = 2\gamma \rightarrow Q = \frac{m}{2\gamma}.$$

Отже, добротність характеризує резонансні властивості системи. Чим більше  $Q$ , тим менше  $\gamma$  і тим більше  $A_{рез}$ , тим більш енергійно осцилятор розгойдується.

### Ширина резонансної кривої

Визначимо, наскільки швидко зменшується амплітуда від резонансної при зміні частоти  $\omega$ . Ця властивість характеризується поняттям ширини резонансної кривої. Проте, ця величина визначається не щодо амплітуди коливань, а щодо її квадрата. Це походить від того, що енергія визначається через квадрат амплітуди переміщення, а при резонансі поняття потенціальної енергії дуже важливе.

При визначенні ширини резонансної кривої вибирається  $\Delta\omega$  таким, при якому енергія зменшується в 2 рази, а амплітуда  $1/\sqrt{2} \approx 0,7$ .

Знайдемо, при якому значенні  $\omega$  середня потужність, що поглинається осцилятором зменшується на  $1/2$  потужності, що поглинається при резонансі

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \langle P_p \rangle.$$

$$\frac{F_0^2 \omega^2 \gamma}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2)} = \frac{1}{8} \frac{F_0^2}{m\gamma},$$

$$8\omega^2 \gamma^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 4\omega^2 \gamma^2,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 + \omega)^2 (\omega_0 - \omega)^2,$$

$$(\omega_0 - \omega_1) = \frac{\Delta\omega}{2} \rightarrow \omega_1 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2},$$

$$(\omega_0 + \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2})^2 \frac{\Delta\omega^2}{4} = 4\omega^2 \gamma^2,$$

де  $\frac{\Delta\omega^2}{2} \ll \omega_0$ , тому ним можна знехтувати і  $\omega_1 \approx \omega_0$ .

$$4\omega_0^2 \frac{\Delta\omega^2}{4} = 4\omega_0^2 \gamma^2,$$

$$\Delta\omega = 4\gamma.$$

Виразимо  $\Delta\omega$  через добротність осцилятора  $Q = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\gamma}$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{4\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{Q},$$

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q},$$

або повна ширина резонансної кривої

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q}.$$

При збільшенні добротності осцилятора  $Q$  ширина резонансної кривої зменшується, але із збільшенням  $Q$  збільшується час встановлення вимушених

коливань  $Q = \frac{1}{2} \omega_0 \tau$ .

### **5.7. Спектральний аналіз вимушених коливань**

При розгляді вимушених коливань зовнішня сила, яка діє на осцилятор, змінювалася за гармонічним законом. Проте на практиці найчастіше зовнішня сила змінюється не за гармонічним законом.

#### **Негармонічна періодична зовнішня сила**

Допустимо, що на осцилятор діє періодична сила, яка змінюється не за гармонічним законом –  $F(t)$ . Вище ми розглядали, що функцію  $F(t)$  в цьому випадку можна розкласти в ряд Фур'є



$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

або після перетворень

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{0n} \sin(n\omega t + \varphi). \quad (5.23)$$

Оскільки амплітуди зменшуються по мірі збільшення  $n$ , то зазвичай в сумі виразу (5.23) беруть обмежене число доданків. Кожна з гармонічних складових викликати таку дію на осцилятор, нібито інші складові були відсутні, оскільки осцилятор, на який діє зовнішня сила, узятий лінійний, і виконується принцип суперпозиції.

Осцилятор особливо сильно відгукується на таку гармонічну дію, при якій частота зовнішньої вимушуючої сили близька до його власної частоти ( $\omega = \omega_0$ ).

Зі всіх гармонічних складових зовнішньої дії тільки ця складова викличе сильні коливання осцилятора. Всі решту гармонічні складові практично не зроблять вплив на осцилятор. Осцилятор здійснюватиме вимушені коливання неначебто на нього діяла тільки та гармонічна складова, частота якої близька до його власної частоти. Ці вимушені коливання будуть майже гармонічними, хоча сама зовнішня дія за формою істотно відрізняється від гармонічної.

Наприклад, якщо звичайний маятник підштовхувати малими поштовхами, направленими в один бік один раз за період його коливань, то він розгойдається і здійснюватиме вимушені майже гармонічні коливання, хоча зовнішня сила (поштовх) негармонічна. Але зовнішня сила періодична, і її період співпадає з власним періодом маятника.

Якщо ми маятнику надаватимемо такі поштовхи один раз за два періоди, то він також здійснюватиме майже гармонічні коливання з власною частотою. В цьому випадку частота зовнішньої дії в два рази менше частоти маятника, і з частотою маятника співпадає частота другої гармоніки зовнішньої дії.

Таким чином, в обох випадках частота і форма вимушених коливань маятника будуть однакові, амплітуди ж різні, і вони залежатимуть від відношення амплітуд першої і другої гармонік в спектрах поштовхів, що діють на маятник.

При дуже малому затуханні маятника можна підтримувати майже гармонічні вимушені коливання, діючи на нього слабкими поштовхами один раз за п'ять або навіть за десять періодів. В цьому випадку маятник виділятиме із зовнішньої дії п'яту або десяту гармоніку.

Якщо в зовнішній дії не містяться гармоніки, частота яких близька до власної частоти резонатора, то резонатор взагалі не відгукується на зовнішню дію. Таким чином, для резонансу недостатньо співпадання частот зовнішньої сили і власних коливань, а необхідно, щоб спектр зовнішньої дії містив гармонічну складову з частотою, що рівна частоті гармонічного резонатора.

Можна підібрати таку систему осциляторів (резонаторів), власні частоти яких кратні основній частоті  $\omega$ , тобто  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ... і впливати на них періодичною силою  $F(t)$  з основною частотою  $\omega$ , і тоді кожен резонатор реагуватиме лише на певну гармонічну складову періодичної сили. Отже, хоч на лінійний осцилятор діє негармонічна періодична сила, коливання будуть гармонічними. Саме ця "стійкість форми" гармонічних коливань разом із принципом суперпозиції надає виняткового фізичного інтересу математичному прийому розкладання періодичної функції у спектр.

## **5.7. Системи з багатьма ступенями вільності**

У багатьох випадках представлення машини у вигляді системи з одним ступенем вільності не дозволяє врахувати всі динамічні ефекти, і тоді необхідно враховувати більше ступенів вільності.

Рівняння руху механічної системи з двома ступенями вільності (рис. 5.16) відрізнятимуться від рівнянь вільних коливань (з двома ступенями вільності), наявністю в правій частині вимушуючих сил.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= F_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= F_2(t). \end{aligned} \quad (5.24)$$

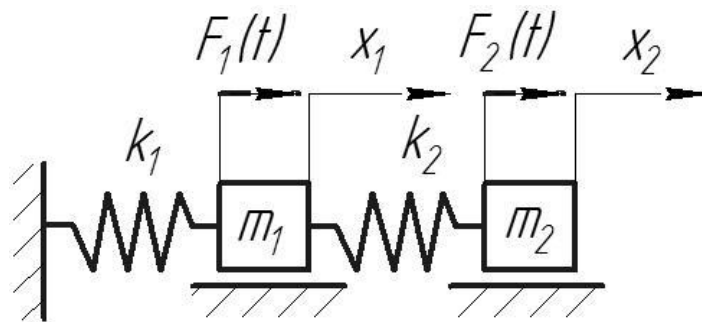


Рисунок 5.16

Залежно від характеру зміни від часу вимушуючих сил, використовують той або інший метод рішення рівнянь (5.24).

Якщо зовнішні сили змінюються за гармонічним законом, тобто мають однакову частоту і фазу (синфазні сили), то простіше всього скористатися безпосереднім способом рішення, визначаючи сталий рух у формі  $x_i = A_i \sin \omega t$ . Підставляючи ці рішення в рівняння (5.24), одержимо систему неоднорідних лінійних рівнянь відносно  $A_i$ .

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \omega_0^2) A_1 - k_2 A_2 &= F_1, \\ -k_2 A_1 + (k_2 - m_2 \omega_0^2) A_2 &= F_2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Рішення цієї системи має вигляд

$$A_i = \Delta_i(\omega_0) / \Delta(\omega_0). \quad (5.26)$$

У знаменнику формули (5.26) стоїть визначник системи рівнянь, в чисельнику – визначник системи,  $i$ -й стовпець якого замінений стовпцем вільних членів.

*Пригадаємо, що відповідно до рис. 3.7 записані рівняння (3.7) – отримані на основі рівняння Лагранжа 2-го роду; рівняння (3.8) – прямим методом; (3.9) – оберненим. Їх розв'язком є*

$$x_i = A_i \sin(\omega t + \alpha) \quad (i=1,2) \quad (5.27)$$

де  $A_i$  – амплітуда коливань  $i$ -ої координати,  $\omega$  – кутова частота коливань,  $\alpha$  – початкова фаза.

Підставивши рішення (5.27) в рівняння (3.7) або (3.8), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \omega_0^2) A_1 - k_2 A_2 &= 0, \\ -k_2 A_1 + (k_2 - m_2 \omega_0^2) A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

однорідних щодо невідомих амплітуд  $A_1$  і  $A_2$ . При коливаннях всі вони не можуть дорівнювати нулю, отже, повинен дорівнювати нулю визначник, складений з коефіцієнтів цієї системи

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \omega_0^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2 \omega_0^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.29)$$

Розвернувши визначник, отримаємо частотне рівняння

$$\omega_0^4 - \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \omega_0^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0.$$

Для квадрата частоти отримуємо два речових і позитивних рішення

$$\omega_{01,02}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}. \quad (5.30)$$

Як видно з виразу (5.30) частоти не залежать від початкових умов і визначаються властивостями самої системи, тому їх називають **власними частотами механічної системи**.

Оскільки знаменник формули (5.26) співпадає з лівою частиною частотного рівняння (5.29), якщо замінити в ньому букву  $\omega_0$  на букву  $\omega$ , то при збігу частоти вимушуючих сил з однією з власних частот системи, знаменники формули (5.26) перетворюються в нуль, а амплітуди  $A_i$  стають нескінченно великими (резонанс).

При  $\omega = 0$  формули (5.26) визначають статичні відхилення обох мас, викликані силами  $F_1$  і  $F_2$

$$A_1 = \frac{F_1 + F_2}{k_1}, \quad A_2 = \frac{F_1 + F_2}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}.$$

Якщо  $\omega = \infty$  рішення (5.26) прагнуть до нуля.

За допомогою виразів (5.26) можна знайти форму вимушених коливань, що визначається відношенням  $A_2/A_1$ . У загальному випадку ця форма не співпадає ні з однією з власних форм. Тільки при резонансах можна спостерігати збіг форм вимушених і вільних коливань.

Розглянемо рішення (5.26) у разі, коли вимушуюча сила діє тільки на першу масу, тобто  $F_2 = 0$ ;

$$A_1 = \frac{F_1(k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2};$$

$$A_2 = \frac{F_1 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}.$$

З цих формул видно, що у разі, коли

$$k_2 - m_2 \omega^2 = 0, \quad (5.31)$$

амплітуди  $A_1$  і  $A_2$  набувають наступні значення

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -F_1 / k_2, \quad (5.32)$$

тобто перша маса залишається нерухомою, хоча саме до неї прикладена вимушуюча сила. Це явище називається *антирезонансом*, а частоти, на яких відбувається «гасіння коливань» – *антирезонансними*. Для системи з  $n$  ступенями вільності число антирезонансних частот рівне  $n - 1$ .

Оскільки при антирезонансі точка прикладання сили нерухома, її можна закріпити, і тоді антирезонансні частоти можна визначити як частоти власних коливань системи з додатковим зв'язком.

Для системи показаної на рис. 5.16 антирезонансна частота рівна

$$\omega_a = \sqrt{k_2 / m_2}, \quad (5.33)$$

як і виходить з умови (5.31).

Явище антирезонансу лежить в основі пристрою динамічного гасника коливань. Щоб погасити коливання механічної системи, достатньо приєднати до неї додаткову систему, підпорядкувавши параметри приєднуваної системи, наприклад, умові (5.31). Тоді коливання основної маси зникнуть, а амплітуди коливань додаткової маси визначаються другою з формул (5.32). Природно, приєднуючи додаткову систему, одержимо систему з великим числом ступенів вільності, відповідно більше стане резонансних частот. Тому застосування

динамічного гасника доцільне, якщо частоти збудження стабільні. Відомі конструкції гасників із слідкуючим налаштуванням частоти (наприклад, маятникові гасники коливань колінчастих валів двигунів внутрішнього згорання).

### Приклади

**Приклад 1.** Ротор електродвигуна, встановленого на консолі (рис. 5.17), має частоту обертання  $n = 900$  об/хв. Внаслідок незрівноваженості ротора виникає вертикальна змінна сила  $F(t) = F_1 \sin(\omega t)$ .

Визначити:

- 1) при якому значенні  $l$  настає резонанс;
- 2) на якій відстані  $l_1$  потрібно встановити двигун, щоб частота власних коливань балки була на 30% більша за частоту вимушуючої сили.

Для цього випадку обчислити амплітуду вимушених коливань та максимальне нормальне напруження. Масою балки знехтувати. Маса двигуна  $m = 100$  кг; амплітуда вимушуючої сили  $F_1 = 0,2$  кН;  $E = 2 \cdot 10^8$  кПа.

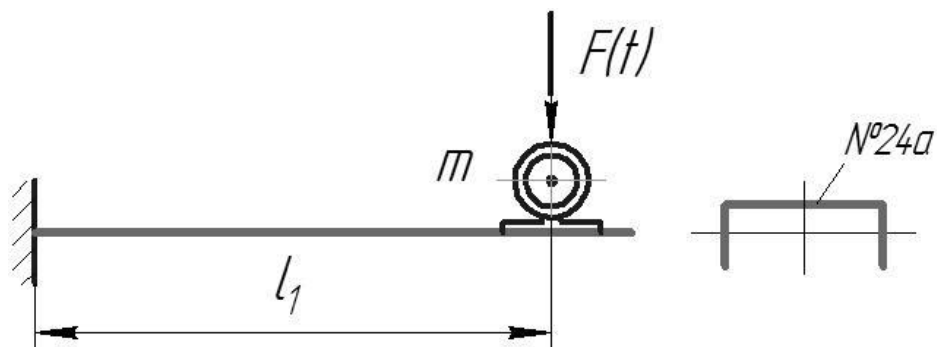


Рисунок 5.17

Рішення.

Частота вимушуючої сили

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 900}{30} = 94,25 \text{ c}^{-1}.$$

При настанні резонансу  $\omega_0 = \omega$ , тобто

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}} = \omega,$$

Звідки знаходимо довжину балки при резонансі

$$\ell = \sqrt[3]{\frac{3EI}{(m\omega)^2}} = 1,2 \text{ м.}$$

Для виконання умови  $\omega_0 = 1,3\omega$ , то двигун потрібно розмістити на відстані

$$\ell_1 = \frac{\ell}{\sqrt[3]{(\omega_0/\omega)^2}} = 1 \text{ м.}$$

Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{\Delta_{стат}}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \frac{F_1 \ell_1}{3EI [1 - (\omega/\omega_0)^2]} = 0,32 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

де  $\Delta_{стат} = \frac{F_1 \ell_1^3}{3EI}$  – прогин від статичної дії сили  $F_1 = 0,2 \text{ кН}$ .

Статичний прогин від власної ваги двигуна

$$\Delta_{стат}^{\partial g} = \frac{mg \ell_1^3}{3EI} = 0,644 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$



## Статичне напруження

$$\sigma_{\text{стат}} = \frac{mg\ell_1}{W_x} = 26,37 \text{ МПа.}$$

## Динамічний коефіцієнт

$$k_{\text{дин}} = 1 + \frac{A}{\Delta_{\text{стат}}^{\text{дв}}} = 1,5.$$

Напруження, що виникає внаслідок дії динамічної сили

$$\sigma_{\text{дин}} = k_{\text{дин}} \sigma_{\text{стат}} = 1,5 \cdot 26,37 = 39,6 \text{ МПа.}$$

**Приклад 2.** До вала змінного перерізу з жорстко зацемленими кінцями прикріплено маховик, на який діє змінний момент  $M(t) = M_1 \sin \omega t$  (рис. 5.18). Визначити максимальне дотичне напруження в лівій та правій частинах валу, якщо  $M_1 = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$ ;  $I_m = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $d_1 = 1,19 \text{ см}$ ;  $d_2 = 1 \text{ см}$ ; коефіцієнт опору  $\alpha = 6 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  $G = 8 \cdot 10^7 \text{ кПа}$ . Масою валу знехтувати.

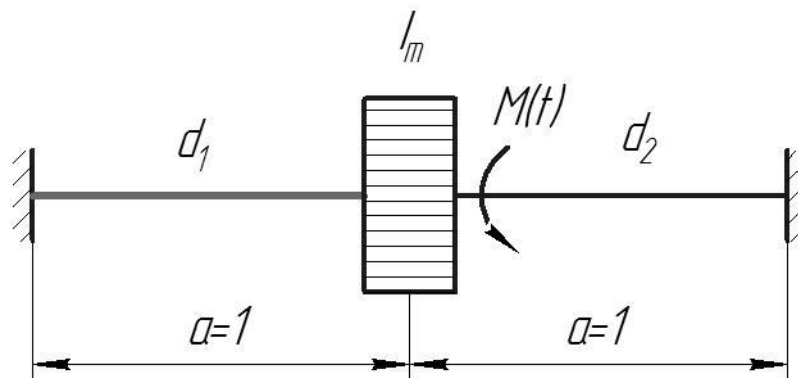


Рисунок 5.18

Рішення.

Жорсткість вала

$$k = \frac{GI_{d_1}}{a} + \frac{GI_{d_2}}{a} = \frac{G\pi}{32a}(d_1^4 + d_2^4) = 236 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Власна частота коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_m}} = \sqrt{\frac{236}{4}} = 7,68 \text{ с}^{-1}.$$

Кут повороту маховика від дії моменту, що рівний амплітуді збурюючого моменту

$$\varphi_0 = \frac{M_1}{k} = \frac{200}{236} = 0,847 \text{ рад}; \quad 2\gamma = \frac{\alpha}{I_m} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ с}^{-1}.$$

Амплітуда коливань

$$A = \frac{\varphi_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\gamma^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1,5}{\sqrt{\left(1 - \frac{7,68^2}{20^2}\right)^2 + \frac{1,5^2}{20^2} \cdot \frac{7,68^2}{20^2}}} = 0,146 \text{ рад}.$$

Відповідний динамічний момент

$$M_{\text{дин}} = k \cdot A = 236 \cdot 0,146 = 34,46 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Максимальні дотичні напруження в лівій та правій частинах вала

$$\tau_1 = \frac{16M_{\text{дин}}}{\pi d_1^3 \left(1 + d_2^4/d_1^4\right)} = \frac{16 \cdot 34,46}{\pi \cdot 1,19^3 \left(1 + 1^4/1,19^4\right)} = 69,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{16M_{\text{дин}} (d_2^4/d_1^4)}{\pi d_2^3 \left(1 + d_2^4/d_1^4\right)} = \frac{16 \cdot 34,46 (1^4/1,19^4)}{\pi \cdot 1^3 \left(1 + 1^4/1,19^4\right)} = 58,4 \text{ МПа}.$$

**Приклад 3.** Вздовж шляху синусоїдального профілю  $y_0 = A_0 \sin \frac{\pi x}{l}$  (рис. 5.19) з постійною горизонтальною швидкістю  $\mathcal{V}$  рухається колесо, на якому пружно підвішено вантаж масою  $m$ . Визначити найбільше допустиме значення коефіцієнта жорсткості підвіски  $k$ , якщо потрібно, щоб амплітуда абсолютних коливань вантажу не перевищувала  $0,05A_0$ .

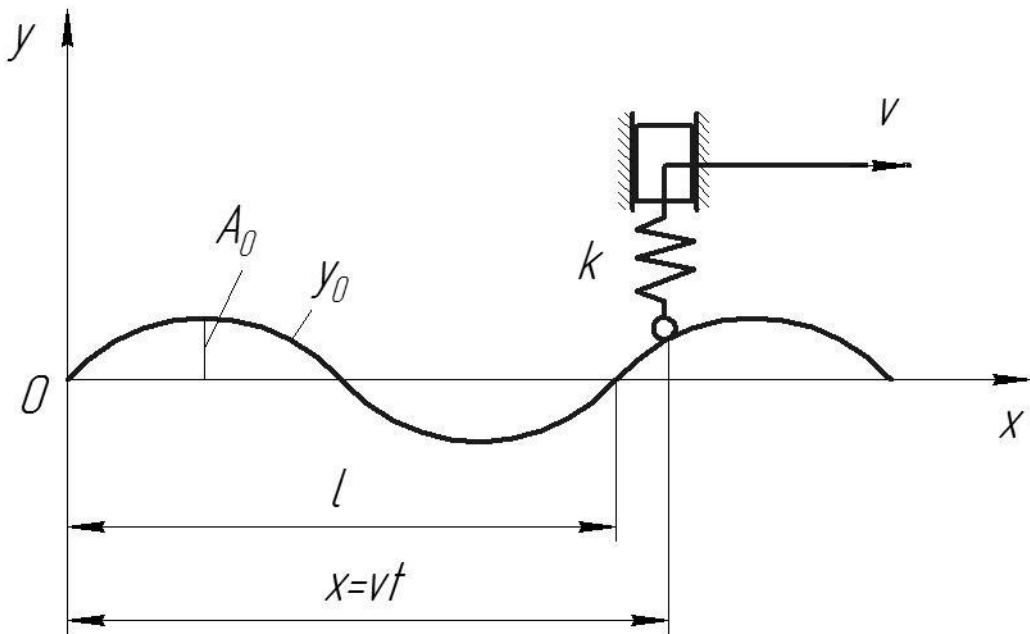


Рисунок 5.19

Рішення.

Підставляючи в рівняння профілю шляху  $x = \mathcal{V}t$ , знайдемо ординати нижнього кінця пружини у функції часу

$$y_0 = A_0 \sin \frac{\pi \mathcal{G} t}{\ell}.$$

Позначаючи через  $y$  абсолютне вертикальне переміщення вантажу, що відраховується від рівноважного рівня, диференціальне рівняння руху запишемо у вигляді

$$-k(y - y_0) = m\ddot{y}$$

або

$$m\ddot{y} + ky = ky_0.$$

Звідси випливає, що еквівалентна вимушуюча сила

$$F_{\text{екв.}} = -A_0 \sin \frac{\pi \mathcal{G} t}{\ell},$$

тобто її амплітуда рівна  $kA_0$

Амплітуда абсолютних коливань вантажу

$$A = \frac{A_0}{\left| 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right|} = \frac{A_0}{\left| 1 - \frac{\pi^2 \mathcal{G}^2 m}{k\ell^2} \right|}.$$

За умовами задачі  $A < 0,05 A_0$ , відповідно

$$\frac{1}{\frac{m\pi^2 \mathcal{G}^2}{k\ell^2} - 1} < 0,5,$$

тоді

$$k < \frac{0,47m\mathcal{G}^2}{\ell}.$$

**Приклад 4.** Двигун масою 2,4 т встановлений на десяти однакових пружинах діаметром  $D=12$  см. Діаметр перерізу витка пружини  $d=3$  см; модуль зсуву матеріалу пружини  $G=8 \cdot 10^7$  кПа; частота обертання двигуна  $n=800$  об/хв. Визначити число витків пружини, необхідне для того, щоб динамічний коефіцієнт установки дорівнював 0,2.

Рішення.

Відношення  $\omega/\omega_0$  визначимо, використовуючи поставлене в умовах завдання обмеження

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right| = 0,2 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 2,45.$$

Частота вимушуючої сили

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 800}{30} = 83,7 \text{ c}^{-1}.$$

Необхідне значення власної частоти

$$\omega_0 = \frac{\omega}{2,45} = \frac{83,7}{2,45} = 34,2 \text{ c}^{-1}.$$

Необхідна жорсткість всіх пружин

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = 34,2 \Rightarrow k = 34,2^2 \cdot m = 2850 \text{ кг/см}.$$

Число витків

$$n_g = 16,5.$$

Слід прийняти принаймні 17 витків, оскільки збільшення числа витків знижує жорсткість системи та зменшує динамічний коефіцієнт. Якщо прийняти  $n_g = 16,5$ , то динамічний коефіцієнт виявиться більшим, ніж задано в умовах задачі.

**Приклад 5.** На двох балках у середині прольоту встановлено двигун масою  $m = 500$  кг. Балки (двотавр №20) мають шарнірне обпирання на кінцях. Ротор двигуна масою  $m_1 = 200$  кг має ексцентриситет  $e = 2$  мм. Визначити, за якої частоти обертання настає резонанс і чому дорівнює при цьому нормальне максимальне напруження. Коефіцієнт опору  $\alpha = 2500$  Н·с·м<sup>-1</sup>; довжина прольоту  $\ell = 6$  м;  $E = 2 \cdot 10^8$  кПа. Врахувати масу балок.

Рішення.

Наведена маса системи

$$m_{np} = m + 2 \cdot \frac{17}{35} m_0 \ell = 500 + 2 \cdot \frac{17}{35} \cdot 21 \cdot 6 = 622,4 \text{ кг},$$

де  $m_0$  – погона маса балки,  $m_0 = 21$  кг.

Власна частота коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{48E2I_x}{m_{np}\ell^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}}{622,4 \cdot 6^3}} = 51,26 \text{ с}^{-1}.$$

Приймаючи  $\omega = \omega_0$ , знаходимо частоту обертання двигуна при резонансі

$$n_o = \frac{30\omega_0}{\pi} = \frac{30 \cdot 51,26}{\pi} = 489,8 \text{ об/хв.}$$

Статичний прогин від амплітудного значення збурюючого навантаження

$$\Delta_{стат} = \frac{m_1 \omega_0^2 e \ell^3}{48EI_x} = \frac{200 \cdot 51,26^2 \cdot 0,002 \cdot 6^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,643 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$2\gamma = \frac{\alpha}{m} = \frac{2500}{500} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Амплітуда коливань

$$A = \frac{\Delta_{стат} \omega_0}{2\gamma} = \frac{0,643 \cdot 10^{-3} \cdot 51,26}{5} = 6,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Статичний прогин

$$\Delta = \frac{mg\ell^3}{48EI_x} = \frac{500 \cdot 9,81 \cdot 6^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Статичне напруження

$$\sigma_{стат} = \frac{mg\ell}{4 \cdot 2W_x} = \frac{500 \cdot 9,81 \cdot 6}{4 \cdot 2 \cdot 184 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ МПа}.$$

Динамічне напруження

$$\sigma_{дин} = \sigma_{стат} \left( 1 + \frac{A}{\Delta} \right) = 20 \left( 1 + \frac{6,59 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} \right) = 63,93 \text{ МПа}.$$

**Приклад 6.** Розглянемо вимушені крутильні коливання приводу (рис. 5.20), що складається з двох валів, сполучених зубчатою передачею. До першого диска прикладений крутний момент  $M = M_0 \sin \omega t$ . Необхідно визначити амплітуди коливань дисків на заданій частоті  $\omega$ .

За узагальнені координати приймаємо кути повороту дисків  $\varphi_1, \varphi_4$  і зубчатих коліс  $\varphi_2, \varphi_3 = i\varphi_2$ , де  $i = -\frac{z_2}{z_3}$  – передавальне число.

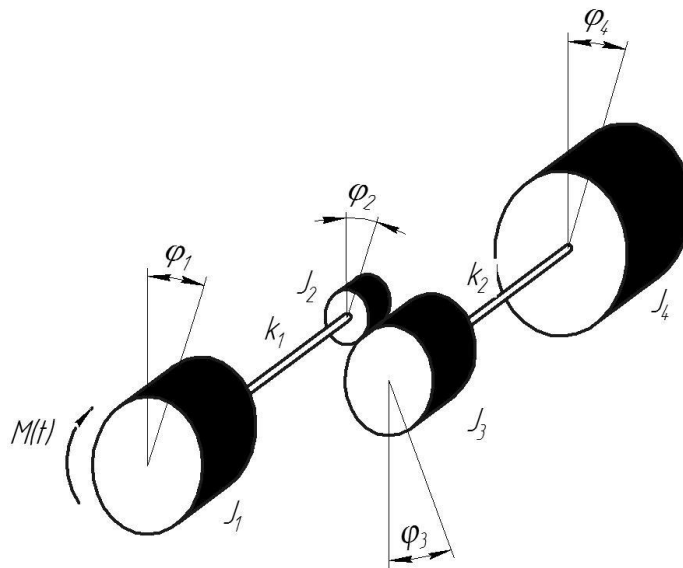


Рисунок 5.20

Вирази для кінетичної і потенціальної енергій даної системи мають вигляд

$$T = \frac{1}{2}(J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + J_3i\dot{\varphi}_2^2 + J_4\dot{\varphi}_4^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(i\varphi_2 - \varphi_4)^2.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i},$$

одержуємо



$$\begin{aligned}
J_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_0 \sin \omega t, \\
(J_2 + i^2 J_3) \ddot{\varphi}_2 + k_1(\varphi_2 - \varphi_1) + ik_2(i\varphi_2 - \varphi_4) &= 0, \\
J_4 \ddot{\varphi}_4 + k_2(\varphi_4 - i\varphi_2) &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.34}$$

Складаємо часткове рішення у вигляді

$$\varphi_1 = A_1 \sin \omega t, \quad \varphi_2 = A_2 \sin \omega t, \quad \varphi_4 = A_4 \sin \omega t.$$

Підставивши ці рішення в рівняння (5.34), одержимо систему рівнянь щодо амплітуд коливань

$$\begin{aligned}
(k_1 - J_1 \omega^2) A_1 - k_1 A_2 &= M_0, \\
-k_1 A_1 + [(k_1 + i^2 k_2) - (J_2 + i^2 J_3) \omega^2] A_2 - ik_2 A_4 &= 0, \\
-ik_2 A_2 + (k_2 - J_4 \omega^2) A_4 &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.35}$$

Рішення рівнянь (5.35) виконаємо чисельно при наступних значеннях вхідних величин

$$\begin{aligned}
k_1 = k, \quad k_2 = 2k, \quad J_1 = 4J, \quad J_2 = 4J, \quad J_3 = 2J, \quad J_4 = 2J, \quad k = 3 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}, \\
J = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad M_0 = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad \omega = 19 \text{ с}^{-1}.
\end{aligned}$$

Результати обчислення амплітуд коливань (кути повороту дисків в радіанах) мають вигляд

$$A_1 = 0,121, \quad A_2 = -5,497 \cdot 10^{-3}, \quad A_3 = 0,011, \quad A_4 = 0,04.$$

Аналогічний результат можна одержати, скориставшись методом розкладання рішення по власних формах коливань. У даній задачі цей метод не дає яких-небудь переваг і розглянутий в чисто пізнавальних цілях. Проте якби крутний момент був не гармонічним, наприклад, у вигляді імпульсу, то цей метод рішення був би виправданий.

Визначимо власні частоти системи. Для цього необхідно скласти визначник з коефіцієнтів при амплітудах в рівняннях (5.35) і прирівняти його до нуля

$$\begin{pmatrix} k_1 - J_1 \omega_0^2 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & -(J_2 + i^2 J_3) \omega_0^2 & -ik_2 \\ 0 & -ik_2 & k_2 - J_4 \omega_0^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.35)$$

Вирішивши це частотне рівняння, одержимо наступні (у порядку зростання) власні частоти

$$\omega_{01} = 0, \quad \omega_{02} = 19,7 c^{-1}, \quad \omega_{03} = 44,6 c^{-1}.$$

Нульовій частоті відповідає обертання жорстких валів.

Коефіцієнти форм коливань обчислюються таким чином

$$\chi_{ik} = \frac{\Delta_{i1}(\omega_{0k})}{\Delta_{11}(\omega_{0k})},$$

де  $i$  – номер координати,  $k$  – номер частоти,  $\Delta_{11}(\omega_{0k})$  – визначник, одержуваний з основного визначника (5.36) викреслюванням першого рядка і першого стовпця,  $\Delta_{i1}(\omega_{0k})$  – мінор елемента першого рядка і  $i$  – го стовпця основного визначника, узятого із знаком  $(-1)^{i+1}$ .

Обчислені коефіцієнти форм коливань приведені в таблиці.

$\omega_{01} = 0$	1	1	-2	-2
$\omega_{02} = 19,7$	1	-0,034	0,069	0,307
$\omega_{03} = 44,6$	1	-4,399	8,598	-2,891

Неважко переконатися в ортогональності власних форм, наприклад, першої і другої

$$J_1 \cdot 1 \cdot 1 + J_2 \cdot 1 \cdot (-0,034) + J_3 \cdot (-2) \cdot 0,069 + J_4 \cdot (-2) \cdot 0,307 = 0.$$

Амплітуди коливань головних координат обчислюються за формулою

$$a_i = \frac{M\omega_{0k}}{J\omega_{0k}(\omega_{0k}^2 - \omega^2)},$$

де  $M_{\omega_{0k}} = \sum_{i=1}^4 M_i \chi_{ik}$  – узагальнений момент,  $J_{\omega_{0k}} = \sum_{i=1}^4 J_i \chi_{ik}^2$  – узагальнений момент інерції системи.

Результати обчислень дають наступні величини амплітуд

$$a_1 = -1,123 \cdot 10^{-3}, \quad a_2 = 0,122, \quad a_3 = -0,244, \quad a_4 = 4,184 \cdot 10^{-5}.$$

Виконаємо перехід до початкових узагальнених координат

$$A_1 = \sum_{k=1}^3 a_k \chi_{1k} = 0,121, \quad A_2 = \sum_{k=1}^3 a_k \chi_{2k} = -5,497 \cdot 10^{-3},$$

$$A_3 = -2A_2 = 0,011, \quad A_4 = \sum_{k=1}^3 a_k \chi_{4k} = 0,04.$$

Природно ці результати співпадають з раніше одержаними результатами рішення рівнянь руху системи. Неважко помітити, що форма вимушених коливань близька до другої власної форми, оскільки частота вимушуючого моменту, мало відрізняється від другої власної частоти системи.

### **Перелік контрольних питань:**

1. Які механічні коливання будемо називати вимушеними?
2. Записати рівняння руху для системи з одним ступенем вільності при дії вимушуючої сили.

3. Записати рівняння руху для системи з одним ступенем вільності при дії вимушуючої сили в канонічній формі.
4. Записати вираз власної частоти коливань механічної системи.
5. Що таке кінематичне збурення системи? Навести приклад схематично.
6. Що входить в загальне рішення рівняння вимушених коливань.
7. Показати на графічному зображенні приклад гармонічної вимушуючої сили.
8. Навести найпростішу схему осцилятора при дії на його вимушуючої сили.
9. Другий закон Ньютона для опису осцилятора при дії на його вимушуючої сили.
10. Час релаксації системи.
11. Перехідні процеси.
12. Рішення рівняння вимушених коливань з використанням комплексних виразів.
13. Аналіз графіків амплітуд та зсувів фаз від частоти.
14. Графік залежності амплітуди швидкості від  $\omega$ .
15. Графік залежності прискорення від  $\omega$ .
16. Аналіз відмінності вимушених коливань в залежності від частот.
17. Частота вимушуючої сили набагато менша власної частоти,  $\omega \ll \omega_0$ .
18. Частота вимушуючої сили набагато більша від власної частоти,  $\omega \gg \omega_0$ .
19. Частота вимушуючої сили, рівна власній частоті,  $\omega = \omega_0$  (резонанс).
20. Добротність осцилятора.
21. Ширина резонансної кривої.
22. Спектральний аналіз вимушених коливань.
23. Системи з багатьма ступенями вільності. Приклади.
24. Пояснити явище антирезонансу.
25. Навести приклад вимушених крутильних коливань приводу.

## ТЕМА 6. НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

### 6.1. Вільні нелінійні коливання

#### Рівняння нелінійних коливальних рухів

При обговоренні коливань розглядалися сили або моменти сил, які повертали осцилятор в положення рівноваги, і вони були прямо пропорційні або зміщенню коливаючого тіла від положення рівноваги, або кута відхилення від положення рівноваги, тобто, узагальненій координаті. При цьому динамічні рівняння руху, які описують коливання, були лінійними. Ці рівняння в першому наближенні досить добре описують дійсні коливальні рухи, особливо при малих амплітудах коливань. При великих амплітудах відхилення сила пружності вже може залежати не тільки від видовження  $x$  пружини в першій степені, але і від більш високих степеней  $x$ .

$$F_x = -kx + bx^2 - cx^3 + \dots$$

Аналогічно для коливань математичного маятника з великими амплітудами при розкладанні  $\sin \alpha$  в ряд не можна знехтувати членами вищого порядку

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots$$

Для вантажу, що коливається на пружині (рис. 1.3), в проекції на вісь  $x$  рівняння матиме вигляд

$$m\ddot{x} = -kx + bx^2 - cx^3 + \dots \quad (6.1)$$

Для математичного маятника в проекції на вісь  $z$  (рис. 1.5)

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \dots \right). \quad (6.2)$$

Динамічні рівняння коливального руху (6.1) і (6.2) вже не будуть лінійними, тому в цьому випадку і коливання називаються нелінійними.

В математиці не існує загального методу рішення нелінійних рівнянь на відміну від лінійних. Для рішення нелінійних рівнянь, які не мають точного рішення, використовується метод збурень або чисельні методи.

### **Нелінійні незатухаючі коливання математичного маятника**

При вивченні лінійних коливань математичного маятника створюються умови, при яких можна обмежитися використанням тільки першого доданку при розкладанні в ряд  $\sin \alpha$ , і тоді рівняння коливання буде лінійним. Якщо обмежимося при розкладанні сил в ряд першими двома доданками, то отримаємо рівняння коливань для математичного маятника.

$$J \ddot{\alpha} + mgl \alpha = mgl \frac{\alpha^3}{6}.$$

Поділимо це рівняння на  $J = ml^2$  (момент інерції математичного маятника)

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{ml^2} \alpha = \frac{mgl}{ml^2} \frac{\alpha^3}{6},$$

звідси

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = \frac{g}{l} \frac{\alpha^3}{6}.$$

Позначимо  $g/\ell = \omega_0^2$ ,  $\delta = 1/6$ . В результаті отримаємо диференціальне рівняння коливального руху маятника

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = \delta \omega_0^2 \alpha^3. \quad (6.3)$$

Так як рівняння (6.3) нелінійне, то воно має кілька рішень, але на відміну від лінійних рівнянь сума рішень вже не буде рішенням рівняння, так як для нелінійних рівнянь не виконується принцип суперпозиції.

Покажемо це. Нехай  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – різні розв'язки рівняння (6.3). Підставимо ці розв'язки в рівняння

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + \omega_0^2 \alpha_1 &= \delta \omega_0^2 \alpha_1^3, \\ \ddot{\alpha}_2 + \omega_0^2 \alpha_2 &= \delta \omega_0^2 \alpha_2^3. \end{aligned}$$

Складемо рівняння

$$\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 + \omega_0^2 (\alpha_1 + \alpha_2) = \delta \omega_0^2 (\alpha_1^3 + \alpha_2^3). \quad (6.4)$$

Підставимо розв'язок  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  в рівняння (6.3)

$$\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 + \omega_0^2 (\alpha_1 + \alpha_2) = \delta \omega_0^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^3. \quad (6.5)$$

Рівняння (6.5) не дорівнює рівнянню (6.4), так як

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 \neq (\alpha_1 + \alpha_2)^3.$$

Вид рівнянь для нелінійних коливань залежить від виду розкладання сили в ряд. Тому рівняння будуть різними залежно від вибору виду осцилятора. Для

розв'язку таких рівнянь використовується метод збурень. Розглянемо послідовність розв'язків рівняння (6.3) методом збурень.

### **Розв'язок рівняння нелінійного коливального руху математичного маятника методом збурень**

Рівняння коливань має вигляд

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = \delta\omega_0^2\alpha^3. \quad (6.6)$$

Якщо  $\delta = 0$ , то отримаємо рівняння

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0.$$

Це рівняння лінійне, його розв'язок

$$\alpha(t) = A_0 \sin \omega_0 t.$$

Такі коливання називають незбуреним рухом.

Уявимо розв'язок при наявності збурення у вигляді

$$\alpha(t) = A_0 \sin \omega_0 t + \alpha_1(t). \quad (6.7)$$

де  $\alpha_1(t)$  – поправка до збуреного руху.

Знайдемо  $\alpha_1(t)$ . Підставимо розв'язок (6.7) в рівняння (6.6), попередньо одержавши першу і другу похідні



$$\dot{\alpha} = A_0 \omega_0 \cos \omega_0 t + \dot{\alpha}_1,$$

$$\ddot{\alpha} = -A_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t + \ddot{\alpha}_1.$$

$$\begin{aligned} & -A_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t + \ddot{\alpha}_1 + A_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t + \omega_0^2 \alpha_1 = \\ & = \delta \omega_0^2 (A_0^3 \sin^3 \omega_0 t + \underline{3A_0^2 \alpha_1 \sin^2 \omega_0 t + 3A_0 \alpha_1^2 \sin \omega_0 t + \alpha_1^3}). \end{aligned}$$

Припустимо, що  $|\alpha_1| \ll A_0$ , тоді, нехтуючи підкресленими доданками, отримаємо рівняння

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega_0^2 \alpha_1 = \delta \omega_0^2 A_0^3 \sin^3 \omega_0 t.$$

Скористаємося рівністю

$$\sin^3 \omega_0 t = \frac{3 \sin \omega_0 t - \sin 3\omega_0 t}{4}.$$

Тоді рівняння матиме вигляд

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega_0^2 \alpha_1 = \delta \omega_0^2 A_0^3 \frac{3 \sin \omega_0 t - \sin 3\omega_0 t}{4}. \quad (6.8)$$

Розв'язок рівняння (6.8) будемо шукати у вигляді

$$\alpha_1 = a_1 \sin \omega_0 t + b_1 \sin 3\omega_0 t,$$

де  $a_1$  і  $b_1$  – постійні величини. Знайдемо першу і другу похідні і підставимо розв'язок в рівняння (6.8)

$$\dot{\alpha}_1 = a_1 \omega_0 \cos \omega_0 t + 3b_1 \omega_0 \cos 3\omega_0 t,$$

$$\ddot{\alpha}_1 = -a_1 \omega_0^2 \sin \omega_0 t - 9b_1 \omega_0^2 \sin 3\omega_0 t,$$

$$\begin{aligned}
& -a_1\omega_0^2 \sin \omega_0 t - 9b_1\omega_0^2 \sin 3\omega_0 t + a_1\omega_0^2 \sin \omega_0 t + b_1\omega_0^2 \sin 3\omega_0 t = \\
& = \frac{3\delta\omega_0^2 A_0^3}{4} \sin \omega_0 t - \frac{\delta\omega_0^2 A_0^3}{4} \sin 3\omega_0 t.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Так як рівняння (6.9) повинно виконуватися для будь-яких моментів часу, то коефіцієнти при  $\sin 3\omega_0 t$  в лівій і правій частині рівняння мають бути рівні.

Отримуємо рівняння

$$-8b_1\omega_0^2 = -\frac{\delta\omega_0^2 A_0^3}{4}.$$

Звідки

$$b_1 = \frac{\delta A_0^3}{32}.$$

Тоді

$$\alpha_1 = a_1 \sin \omega_0 t + \frac{\delta A_0^3}{32} \sin 3\omega_0 t,$$

і розв'язок рівняння (6.6) набуде вигляду

$$\alpha = A_0 \sin \omega_0 t + a_1 \sin \omega_0 t + \frac{\delta A_0^3}{32} \sin 3\omega_0 t$$

або

$$\alpha = B_0 \sin \omega_0 t + \frac{\delta A_0^3}{32} \sin 3\omega_0 t,$$

де  $B_0 = A_0 + a_1$ .

Присутність в розв'язку члена з  $\sin 3\omega_0 t$  показує, що через присутність в силі нелінійного члена, пропорційного  $\alpha^3$ , в коливаннях з'явився член з потроєною частотою  $3\omega_0$ , тобто з третьою гармонікою. Якщо знаходити

наступні, більш малі поправки, то вони будуть містити більш високі частоти  $n\omega_0$ , кратні основній, тобто, будуть містити вищі гармоніки.

Таким чином, наявність нелінійності в силі призводить до виникнення вищих гармонік у коливаннях.

Ці коливання відбуваються близько точки  $\alpha = 0$ .

### Розрахунок періоду нелінійних коливань математичного маятника

Знайдемо період нелінійних коливань математичного маятника, рис. 6.1.

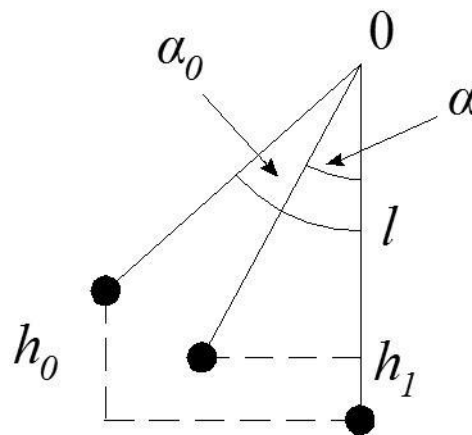


Рисунок 6.1

Для цього скористаємося законом збереження енергії.

Відхилимо маятник від положення рівноваги на кут  $\alpha_0 \leq \pi$ , відпустимо без поштовху.

Отримаємо за законом збереження енергії

$$\frac{J\Theta^2}{2} + mgh_1 = mgh_0,$$

$$\frac{J\Theta^2}{2} + mgl(1 - \cos\alpha) = mgl(1 - \cos\alpha_0), \quad (6.10)$$

де  $\Theta$  – кутова швидкість,  $J = m\ell^2$  момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через точку  $O$  перпендикулярно рисунку,  $h_0 = \ell(1 - \cos \alpha_0)$ ,  $h_1 = \ell(1 - \cos \alpha)$ .

$$\Theta^2 + \frac{2g}{\ell}(1 - \cos \alpha) = \frac{2g}{\ell}(1 - \cos \alpha_0),$$

$$\Theta = \sqrt{\frac{2g}{\ell}[(1 - \cos \alpha_0) - (1 - \cos \alpha)]}. \quad (6.11)$$

Так як  $\Theta = \frac{d\alpha}{dt}$ , то вираз (6.11) дозволяє визначити період коливань

$$dt = \frac{d\alpha}{\Theta} = \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}}.$$

Виберемо межі інтегрування від  $-\alpha_0$  до  $\alpha_0$ . На цей кут маятник відхиляється за половину періоду  $t = T/2$ , тому період буде рівний подвоєному значенню цього часу

$$T = 2 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}} = \frac{2}{\sqrt{2}\omega_0} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}}. \quad (6.12)$$

Із отриманого виразу (6.12) видно, що період нелінійних коливань не дорівнює періоду лінійних коливань математичного маятника.

В математиці немає точного методу обчислення отриманого інтеграла, скористаємося наближеним обчисленням.

Перетворимо вираз (6.12):

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \quad \cos\alpha_0 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha_0}{2}; \\ \cos\alpha - \cos\alpha_0 &= 2(\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}).\end{aligned}\tag{6.13}$$

Тоді рівняння (6.12) з урахуванням (6.13) набуде вигляду

$$T = \frac{4}{\omega_0\sqrt{2}} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2(\alpha_0/2) - \sin^2(\alpha/2)}}.$$

Введемо нову змінну  $\beta$  і врахуємо, що

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha_0}{2} \sin\beta.\tag{6.14}$$

Знайдемо диференціал від цього виразу

$$\cos\frac{\alpha}{2} \frac{d\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha_0}{2} \cos\beta \cdot d\beta.$$

Звідси

$$d\alpha = \frac{2\sin(\alpha_0/2)\cos\beta d\beta}{\cos(\alpha/2)} = \frac{2\sin(\alpha_0/2)\cos\beta d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha/2)}} = \frac{2\sin(\alpha_0/2)\cos\beta d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_0/2)\sin^2\beta}}.$$

Врахуємо, що  $(\sin^2(\alpha_0/2) - \sin^2(\alpha/2))$  з урахуванням нової змінної (6.14)

$$\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\alpha_0}{2} \sin^2\beta = \sin^2\frac{\alpha_0}{2} (1 - \sin^2\beta) = \sin^2\frac{\alpha_0}{2} \cos^2\beta.$$

Змінимо межі інтегрування. Це можливо, тому що відповідно до (6.14)

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha_0}{2} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 0 \rightarrow \beta = 0.$$

Тоді отримуємо для періоду

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{\omega_0 \sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin(\alpha_0/2) \cos \beta d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_0/2) \sin^2 \beta} \sin(\alpha_0/2) \cos \beta} = \\ &= \frac{8}{\omega_0 \sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_0/2) \sin^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Інтеграл у виразі (6.15) являє собою еліптичний інтеграл 1-го роду (табличний).

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд ( $x = \sin^2(\alpha_0/2) \sin^2 \beta$ ).

$$\frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_0/2) \sin^2 \beta}} = \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \sin^2 \beta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} \sin^4 \beta + \dots \right) d\beta.$$

Скористаємося формулою з довідника ( $m = 2n$ )

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}.$$

Тепер матимемо

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_0/2) \sin^2 \beta}} = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \right].$$

Тоді для періоду нелінійних коливань математичного маятника отримаємо

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \right]. \quad (6.16)$$

Отже, чим більше  $\alpha_0$  (максимальне відхилення математичного маятника від положення рівноваги), тим більше період коливань маятника.

Якщо у виразі для періоду (6.16) обмежитися першими двома членами і припустимо  $\sin \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0}{2}$ , то отримаємо приблизний вираз для періоду нелінійних коливань математичного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left( 1 + \frac{\alpha_0^2}{16} \right). \quad (6.17)$$

### **Фазовий портрет нелінійних коливань математичного маятника**

Рівняння, що описує коливання математичного маятника без затухання  $\gamma = 0$

$$J\ddot{\alpha} = -mg\ell \sin \alpha, \text{ де } J = m\ell^2. \quad (6.18)$$

Спростимо рівняння, щоб його було простіше досліджувати з точки зору математики. У рівнянні

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{\ell} \sin \alpha,$$

отриманому з рівняння (6.18) змінимо масштаб часу. Збільшимо час в  $\omega = \sqrt{g/\ell}$  раз,  $t_n = \omega t$ .

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega d\alpha}{\omega dt} = \frac{\omega d\alpha}{dt_n};$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt_n} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega d\alpha}{dt_n} \right) = \frac{\omega d}{\omega dt} \left( \frac{\omega d\alpha}{\omega dt_n} \right) = \frac{\omega^2 d^2\alpha}{dt_n^2};$$

$\frac{g}{\ell} = \omega^2$ , відповідно  $\ddot{\alpha} = -\sin \alpha$ .

Змінну  $\alpha$  позначимо через  $x$ .

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

В фазових змінних  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ . Його розв'язок  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -\sin x_1$ . Фазовий портрет систем зображений на рис. 6.2.

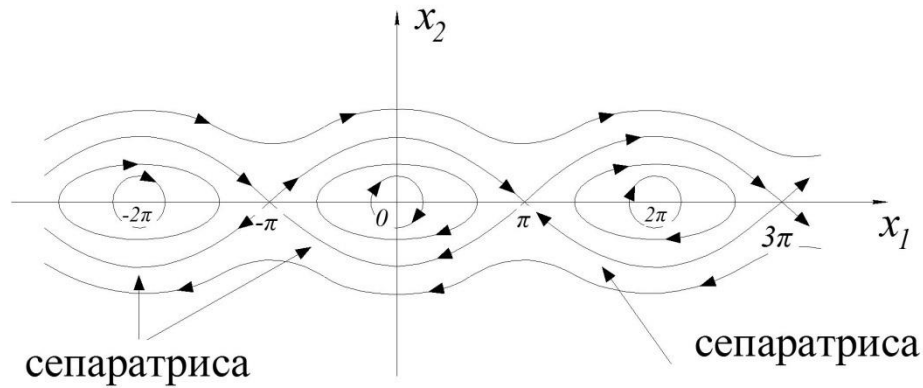


Рисунок 6.2

Стан рівноваги нелінійного маятника на фазовій площині розташовані вздовж осі  $x_1 (x_2 = 0)$ . Особливі точки  $x_1 = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , які відповідають положенню стійкої рівноваги, називаються центрами, і  $x_1 = 0, \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$  – нестійкі точки рівноваги, називаються сідлами.

Поблизу центрів фазовий портрет відповідає лінійному осцилятору: траєкторії являють собою замкнуті криві, близькі до кіл, що відповідають за



амплітудою коливань, близько до гармонічних. Через нестійкі точки проходять особливі інтегральні криві – сепаратрис. Вони розділяють фазовий простір на області з різною поведінкою. Зі збільшенням енергії маятника його коливання від квазігармонічних поблизу точок типу «центр» еволюціонують до нелінійних гармонічних коливань поблизу сепаратрис.

Подальше збільшення енергії приведе до обертового руху (рух поза сепаратрисами). Найменше відхилення енергії в ту чи іншу сторону приводять до різних типів руху – коливального чи обертового.

### **Розв'язок рівнянь нелінійного коливального руху пружного маятника**

Розглянемо вільні коливання пружинного маятника без затухання. У виразі для сили пружності обмежимося першими двома членами. Отримаємо рівняння  $F_x = -kx + bx^2$ . Можна записати

$$m\ddot{x} + kx = bx^2. \quad (6.19)$$

Поділимо на  $m$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{b}{m}x^2.$$

Введемо позначення  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ . Відношення  $b/m$  можна представити у вигляді

$$\frac{b}{m} = \frac{b\omega_0^2}{m\omega_0^2} = \frac{b}{m} \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{m}{k} = \frac{b}{k}\omega_0^2, \quad k \gg b.$$

Позначимо  $\frac{b}{k} = \delta$ ,  $\delta$  – параметр, що характеризує малість 2-го доданку при розкладанні сили пружності в ряд в порівнянні з 1-м членом.

Диференціальне рівняння коливального руху пружного маятника матиме вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \delta \omega_0^2 x^2 = 0. \quad (6.20)$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t),$$

при  $\delta = 0$  рівняння (6.20) буде диференціальним рівнянням вільного гармонічного осцилятора і його розв'язок

$$x = A \cos \omega_0 t. \quad (6.21)$$

Покажемо, що цей розв'язок не може бути рішенням нелінійного рівняння. Для цього підставимо розв'язок лінійного рівняння (6.21) в нелінійне (6.20), попередньо отримавши другу похідну

$$-A\omega_0^2 \cos \omega_0 t + A\omega_0^2 \cos \omega_0 t - \delta A^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t \neq 0.$$

Це рівняння не перетворюється в нуль через появу виразу

$$\delta A^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} \delta A^2 \omega_0^2 (1 + \cos 2\omega_0 t).$$

Розв'язок нелінійного рівняння (6.20) має перетворити його в тотожність. Тому будемо шукати його у вигляді

$$x = A \cos \omega t + \varepsilon A (\alpha + \cos 2\omega t),$$

де  $\alpha = const$  і  $\omega \neq \omega_0$ .

Підставимо розв'язок в рівняння (6.20), попередньо отримавши  $\dot{x}$  та  $\ddot{x}$

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t - \varepsilon A 2\omega \sin 2\omega t,$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t - \varepsilon A 4\omega^2 \cos 2\omega t,$$

$$\begin{aligned} & -A\omega^2 \cos \omega t - 4A\omega^2 \varepsilon \cos 2\omega t + A\omega^2 \cos \omega t + \varepsilon A \omega^2 \alpha + \varepsilon A \omega^2 \cos 2\omega t - \\ & - \omega^2 \left( \delta A^2 \cos^2 \omega t + \delta \varepsilon^2 A^2 (\alpha + \cos 2\omega t)^2 + \delta 2\varepsilon A^2 \cos \omega t (\alpha + \cos 2\omega t) \right). \end{aligned}$$

Врахуємо, що  $\delta_\varepsilon \ll A^2$  дуже мале, тому нехтуємо членами, в які входять ці множники. Отримаємо вираз (з використанням рівності  $\cos^2 \omega t = (1 + \cos 2\omega t)/2$ )

$$-4\varepsilon A \omega^2 \cos 2\omega t + \varepsilon A \omega^2 \alpha + \varepsilon A \omega^2 \cos 2\omega t - \frac{1}{2} \delta A^2 \omega^2 (1 + \cos 2\omega t) = 0.$$

Це рівність має виконуватися при будь-якому  $\omega t$ . Отже, дорівнює нулю сума коефіцієнтів при  $\cos 2\omega t$

$$-3\varepsilon A \omega^2 - \frac{1}{2} \delta A^2 \omega^2 = 0.$$

Система рівнянь

$$\begin{cases} -3\varepsilon A \omega^2 - \frac{1}{2} \delta A^2 \omega^2 = 0; \\ \varepsilon A \omega^2 \alpha - \frac{1}{2} \delta A^2 \omega^2 = 0, \end{cases}$$

дозволяє знайти  $\varepsilon$  та  $\alpha$

$$\varepsilon = -\frac{1}{6} \delta A; \quad \alpha = -3.$$

Отримуємо розв'язок

$$x(t) = A \cos \omega_0 t - \frac{\delta}{6} A^2 \cos 2\omega_0 t + \frac{\delta}{2} A^2.$$

У цьому наближенні частота  $\omega$  збігається з частотою  $\omega_0$ . Але поряд з частотою  $\omega_0$  з'являються коливання з частотою  $2\omega_0$  і постійний зсув  $\delta A^2 / 2$  від положення з координатою  $x = 0$ .

Обчислимо потенціальну енергію при таких коливаннях як функцію від  $x$

$$E_n = -\int_0^x F_x dx = \int_0^x (-kx + \delta kx^2) dx = \frac{kx}{2} - \delta k \frac{x^3}{3}.$$

Отже, потенціальна енергія не симетрична відносно точки  $x = 0$ . Ця властивість потенціальної енергії в деяких випадках дозволяє передбачити характер коливального руху, наприклад, характер коливальних рухів молекул в твердих тілах.

Тіла при нагріванні розширюються. Якби коливання молекул були б лише гармонічними, то цього б явища не спостерігалось. Розширення тіл при нагріванні вказує на зсув при коливаннях молекул середньої точки коливального руху в залежності від амплітуди коливання, і, отже, коливання молекул нелінійні, і потенціальна енергія взаємодії молекул не симетрична відносно  $x = 0$  (точки, де сила дорівнює 0, тобто стану рівноваги).

## 6.2. Вимушені нелінійні коливання

Для лінійних осциляторів їх відгук на вплив гармонічної сили є гармонічним коливальним рухом. Якщо зовнішня сила змінюється за законом синуса або косинуса, то і коливання будуть здійснюватися за законом синуса або косинуса. Відгук лінійної системи на вплив змінних будь-яких у часі сил

може бути виражений через відгуки на кожен окрему Фур'є-компоненту сили, тобто коливання, що викликаються кожною силою, що входить в ряд Фур'є, будуть складатися лінійно, причому кожне коливання буде відбуватися так, як іншого не було (принцип суперпозиції). В результаті вийде просте складання коливань. Для нелінійних осциляторів така залежність виконуватися не буде. Кожна ангармонічна система по різному реагує на дію однієї і тієї ж зовнішньої сили. Більше того, одна і та ж система може по різному реагувати на дію однієї і тієї ж сили, якщо умови коливань будуть змінюватися. Наприклад, при збільшенні амплітуди коливань математичного маятника буде збільшуватися його ангармонічність (*Ангармонічні коливання – періодичні коливання, в яких коливальна величина змінюється за несинусоїдальним законом (на відміну від гармонічних коливань). Ангармонічні коливання можна уявити як накладання великого числа коливань, частоти яких кратні найменшій частоті. Остання називається основною, а всі вищі за неї – гармоніками).*

На відміну від гармонічних коливань, частота ангармонічних коливань залежить від амплітуди.

В результаті впливу на нелінійний осцилятор гармонічної сили коливання в загальному випадку не будуть гармонічними. Передбачити відгук нелінійного осцилятора на дію сили, що залежить від часу, в загальному випадку не можна. Існує досить мало загальних тверджень, які можна було б зробити щодо відгуку нелінійних осциляторів на дію зовнішніх сил. Навіть будь-яка нескінченно мала частота зовнішньої сили може повністю змінити характер відгуку, відгук може виявитися навіть асинхронним або хаотичним. Головні можливі особливості вимушених коливань можна відобразити та простіше вивчати на слабо ангармонічних осциляторах, які легше піддаються математичному опису.

Припустимо, що на нелінійний пружинний маятник подіяли силою

$$F = F_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.22)$$

Відгук такого осцилятора на зовнішню силу представимо у вигляді

$$x = A(\cos \omega t + \varepsilon \cos^2 \omega t), \quad (6.23)$$

де  $\varepsilon \ll 1$ . Для простоти розрахунків зсув фаз взяли у виразі сили (6.22) рівним нулю  $F = F_0 \cos \omega t$ . Перетворимо вираз (6.23), враховуючи, що  $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$ ,

$$x = A \left( \frac{\varepsilon}{2} + \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\omega t \right). \quad (6.24)$$

З отриманого виразу (6.24) видно, що коливання осцилятора не будуть синусоїдальними.

На рис. 6.3 зображено графік залежності  $x(t)$  суцільною лінією. Для порівняння тут же пунктирною лінією побудований графік для лінійної системи.

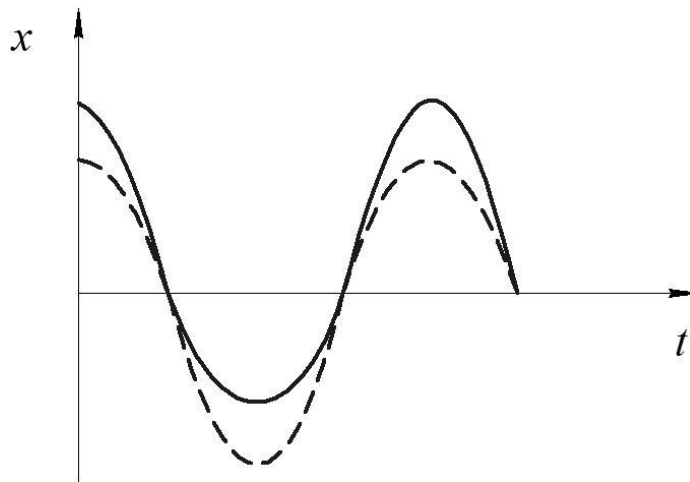


Рисунок 6.3

На рис. 6.3 видно, що коливання нелінійного осцилятора спотворено.

Коливання буде вже містити гармоніки не тільки частоти вимушеної сили  $\omega$ , але і гармоніку з частотою  $2\omega$ . Крім того, з'явився постійний член  $\varepsilon/2$ , який відповідає зсуву середнього значення.

Ефект виникнення зсуву середнього значення називається випрямленням. Отже, такий нелінійний осцилятор буде випрямляти рух і створювати вищі

гармоніки. Нелінійність вищого порядку (введення, наприклад, у рішенні членів, залежних від  $x^3$  або  $x^4$ ) дасть вже більш високі гармоніки.

Розглянемо ще один результат нелінійності. Нехай на розглянутий вище нелінійний осцилятор діють дві гармонічні сили  $F_1 \cos \omega_1 t$  і  $F_2 \cos \omega_2 t$ , тоді

$$x = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t + \frac{\varepsilon}{2} (A \cos 2\omega_1 t + B \cos 2\omega_2 t)^2. \quad (6.25)$$

До лінійного члена додався член

$$x_1 = \frac{\varepsilon}{2} (A^2 \cos^2 2\omega_1 t + B^2 \cos^2 2\omega_2 t + 2AB \cos 2\omega_1 t \cos 2\omega_2 t) \quad (6.26)$$

(як видно, проста суперпозиція вже не має місця). У виразі (6.26) перші два доданки дають другі гармоніки з частотами  $2\omega_1$  і  $2\omega_2$ .

Розглянемо доданок

$$2AB \cos 2\omega_1 t \cos 2\omega_2 t.$$

Його можна трактувати по-різному.

1. Представити як коливання

$$x_2 = c(t) \cos \omega_1 t,$$

де  $c(t) = 2AB \cos \omega_2 t$  – амплітуда, змінюється (деформується) з частотою  $\omega_2$ .

2. По-друге його можна представити у вигляді

$$x_2 = AB((\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t)),$$

тобто можна сказати, що виникають два нових компоненти, один з яких дорівнює сумі частот  $\omega_1 + \omega_2$ , а інший різниці.

У граничному випадку  $\omega_1 \gg \omega_2$  можна пов'язати обидва способи. У цьому випадку  $\omega_1 + \omega_2$  і  $\omega_1 - \omega_2$  близькі один до одного, і між ними повинно спостерігатися зіткнення. Ці зіткнення дають в результаті модуляцію амплітуди коливань із середньою частотою  $\omega$ .

Таким чином, можна сказати, що нелінійна реакція осцилятора на дію зовнішніх сил може дати випрямлення, виникнення гармонік і модуляцій, тобто виникнення гармонік з сумою і різницею частот. У загальному випадку при вимушених коливаннях різних нелінійних осциляторів можуть виникати вимушені коливання з частотами  $\omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_1 - \omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2$ , взагалі  $n\omega_1 + m\omega_2$ , де  $n$  і  $m$  – цілі числа.

Такі додаткові коливання в нелінійних системах називаються комбінаційними коливаннями або частотами (в акустиці комбінаційними тонами). Існують системи, в яких  $n$  і  $m$  залежать від переміщення  $x$ . Наприклад, натяг струни, що визначає її пружність при коливаннях, не є, як це вважають в першому наближенні, постійною величиною, воно залежить в невеликій мірі від амплітуди коливань і, отже, змінюється за періодичним законом. В таких системах при дії вимушеної сили з частотою  $\omega$  можуть виникати коливання з частотами  $\omega/2, \omega/3, \dots$

Всі ефекти, які проявляються при вимушених нелінійних коливаннях пропорційні  $\varepsilon$ , а також  $A^2$  або  $B^2$  або  $AB$ , тобто вони будуть більш важливі для великих амплітуд, ніж для малих. Описані вище ефекти широко зустрічаються на практиці. Завдяки нелінійній пружності барабанної перетинки вуха та інших частин слухового апарату при дії двох коливань (тонів) великої амплітуди ми чуємо так званий різний комбінаційний тон з частотою  $2\omega_1 - \omega_2$ , а також більш слабо і інші комбінаційні тони.

Інший приклад, апарати, які використовують зазвичай в звуковідтворюючих пристроях, завжди мають якісь нелінійності. Вони спотворюють звук, породжуючи гармоніки, яких раніше не було. З цієї причини



високоякісна звуковідтворювальна апаратура повинна бути якомога "більш лінійна". Однак в певних випадках "нелінійність" збільшують, наприклад, в деяких радіопередавачах і приймаючих пристроях. При дії на нелінійний осцилятор зовнішньої гармонічної сили, частота якої безперервно змінюється, залежність амплітуди коливань від частоти буде відрізнятися від аналогічної залежності для лінійних коливань.

Графік залежності амплітуди коливань від частоти (резонансна крива) буде визначатися вибором конкретного рівняння, що описує коливальний рух. Розглянемо вимушені коливання пружинного маятника під дією сили  $F = F_0 \cos \omega t$ , для якого сила пружності нелінійна і змінюється за законом  $F_{np} = k_1 x + k_2 x^3$ . Рівняння коливань для такого маятника

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = F_0 \cos \omega t. \quad (6.27)$$

Перетворимо рівняння (6.27), розділивши його на  $m$  і введемо нові позначення:

$$\frac{\mu}{m} = 2\gamma, \quad \frac{k_1}{m} = a, \quad \frac{k_2}{m} = b, \quad \frac{F_0}{m} = f.$$

Отримаємо

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + ax + bx^3 = f \cos \omega t. \quad (6.28)$$

Рівняння (6.28) називається рівнянням Дуффінга, на ім'я вченого, який вперше дослідив його. Повного дослідження рівняння Дуффінга не існує і до теперішнього часу. Найбільш точно вдалося провести аналіз при малих затуваннях  $\gamma$  і при  $a > 0$ .

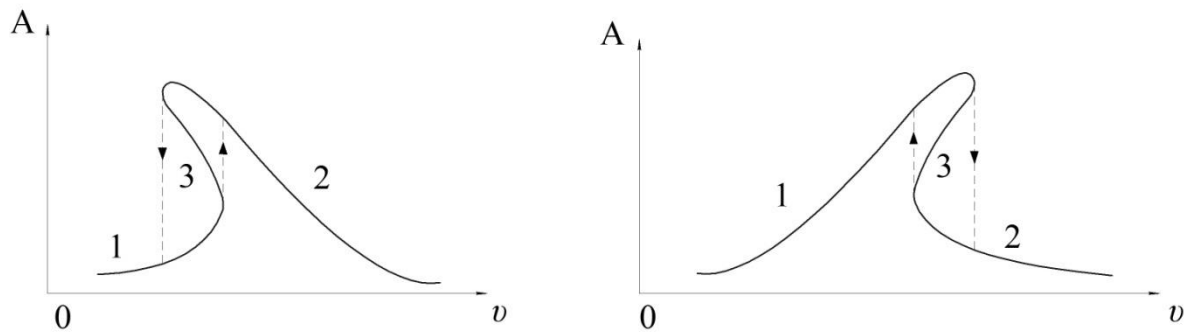


Рисунок 6.4

Резонансна крива, зображена на рис. 6.4, відрізняється від резонансних кривих лінійного осцилятора нахилом "піку" і появою неоднозначності. Нахил може відбуватися як вліво, так і вправо. Це визначається знаком коефіцієнта "b" в рівнянні Дуффінга. Завдяки нахилу і неоднозначності виникає явище гістерезису амплітуди вимушених коливань при повільній зміні частоти  $\mathcal{Q}$  зовнішньої сили. Він полягає в скачках амплітуди. Скачки відбуваються при різних значеннях  $\mathcal{Q}$  при безперервному повільному зростанні і зменшенні частоти  $\mathcal{Q}$ .

При дії на осцилятор зовнішньої гармонічної сили, частота якої безперервно змінюється, резонанс буде спостерігатися не тільки на основній частоті, але і на частотах вищих гармонік і взагалі при різних комбінаційних частотах. Для маятника, описаного рівнянням Дуффінга, резонанс буде відбуватися при частотах, кратних частоті  $\omega_0$  ( $\omega_0^2 = a$ ):  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0$ .

Роль того чи іншого резонансу залежить як від сили, так і від властивостей нелінійної системи. Якщо амплітуда мала, то і резонанс можна не враховувати.

## Перелік контрольних питань:

1. Пояснити суть нелінійності дії сили циліндричної пружини.
2. Записати найпростіший вираз до прикладу фактичної нелінійності дії сили пружності пружини.
3. Якщо розглядати математичний маятник, який здійснює великі амплітудами, чи можна такі коливання вважати лінійними?
4. Записати рівняння руху на основі другого закону Ньютона при нелінійних коливаннях найпростішого пружинного осцилятора?
5. Те саме для математичного маятника?
6. Нелінійні незатухаючі коливання математичного маятника.
7. Розв'язок рівняння нелінійного коливального руху математичного маятника методом збурень. В чому суть?
8. Розрахунок періоду нелінійних коливань математичного маятника.
9. Фазовий портрет нелінійних коливань математичного маятника.
10. Розв'язок рівнянь нелінійного коливального руху пружного маятника.
11. Вимушені нелінійні коливання.
12. Приклади вимушених нелінійних коливань.

## ТЕМА 7. АВТОКОЛИВАННЯ

### 7.1. Загальні відомості про автоколивальні процеси

Власні коливання осцилятора з плином часу є затухаючими через дії сил опору. Щоб коливання були незатухаючими, як завгодно довго необхідно поповнювати втрати енергії. Коливальні системи, що містять в собі джерела енергії, з яких втрати енергії можуть поповнюватися, називаються **автоколивальними системами**, а незатухаючі коливання здійснюються в таких системах, називаються автоколиваннями. Автоколивання знаходять дуже велике застосування на практиці.

Автоколивання відрізняються від власних коливань. Амплітуда незатухаючих власних коливань залежить від початкових умов, в затухаючих власних коливаннях амплітуда також залежить від початкових умов і швидкості затухання.

Особливістю автоколивання є незалежність їх амплітуди від початкових умов. Амплітуда визначається властивостями самої системи. Незалежно від початкової амплітуди автоколивання з плином часу досягнуть такої величини, при якій втрати енергії за період будуть точно компенсуватися притоком енергії від джерела енергії, що входить в автоколивальну систему. Такі коливання називаються **стаціонарними**. Для цього система повинна сама управляти надходженням енергії з джерела. Відповідно, будь-яка автоколивальна система повинна складатися з джерела енергії, коливальної системи, пристрою, що регулює надходження енергії до коливальної системи, і позитивного зворотного зв'язку, на основі якої коливальна система автоматично управляє дією регулюючого пристрою.

Зворотній зв'язок вважається позитивним, якщо призводить до розгойдування коливальної системи. Якщо зворотний зв'язок застосовується для заспокоєння автоколиваної системи, то вона називається негативною.

Наявність регулюючого пристрою зі зворотним зв'язком призводить до нелінійності рівнянь коливань. Тому автоколивальні системи є нелінійними. У чисто механічних автоколивальних системах обов'язковою умовою її переходу до сталого режиму є наявність "змінного" тертя, "змінного" опору або будь-яких пристосувань, дія яких рівносильна наявності "змінного" опору.

Вид автоколивань залежить від втрати енергії на тертя або опір. Якщо втрати енергії на тертя малі, то і енергія, що компенсує ці втрати, теж мала. Невеликі порції енергії, що надходять до коливальної системи, заповнюють втрату енергії, але мало впливають на хід коливального процесу. Тому коливання будуть ближче всього до гармонічних, і період коливань буде практично таким ж, як у власних незатухаючих коливань. Якщо ж втрати на тертя великі, то і енергія, яка надходить до коливальної системи від джерела, буде велика, і коливання за формою можуть помітно відрізнитися від гармонічних, їх період не співпадатиме з періодом незатухаючих коливань.

Якщо втрати енергії такі, що коливання стають аперіодичними, то автоколивання різко відрізняються від синусоїдальних і називаються релаксаційним.

### **Фрикційні автоколивання**

Розглянемо приклад автоколивань з негативним і нелінійним опором. На вантаж, що лежить на поворотній стрічці (рис. 7.1, а), по осі  $x$  діють сили тертя  $F$  і сила пружності  $kx$ . У положенні рівноваги вантажу на стрічці сила тертя дорівнює силі пружності  $F = kx$ . Внаслідок неминучих зовнішніх поштовхів вантаж буде здійснювати нерегулярні рухи зі швидкістю, яка змінюється за величиною і напрямком. У тих випадках, коли вантаж буде рухатися відносно землі у напрямку руху стрічки (вправо), його швидкість ковзання щодо стрічки  $\mathcal{G}_{\text{відн}}$  буде зменшуватися (дорівнює різниці швидкостей стрічки  $\mathcal{G}_{\text{см}}$  і вантажу  $\mathcal{G}_e$ )  $\mathcal{G}_{\text{відн}} = \mathcal{G}_{\text{см}} - \mathcal{G}_e$ .

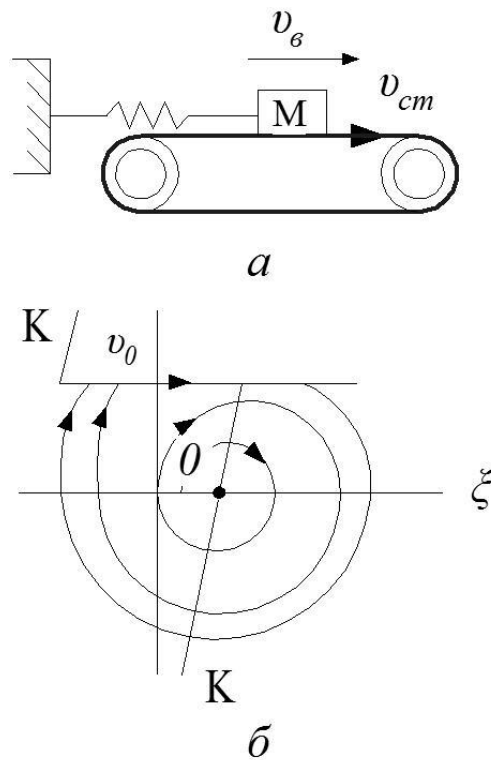


Рисунок 7.1

Коли вантаж буде рухатися горизонтально проти напрямку руху стрічки (вліво), його швидкість щодо стрічки буде збільшуватися  $\mathcal{G}_{\text{відн}} = \mathcal{G}_{\text{см}} + \mathcal{G}_{\text{б}}$ . Рух вантажу буде залежати від сили тертя ковзання і сили пружності.

Сили тертя ковзання залежать від матеріалу дотичних поверхонь, стану цих поверхонь і швидкості, з якою одне тіло рухається відносно іншого (відносної швидкості  $\mathcal{G}_{\text{відн}}$ ).

Залежність сили тертя від відносної швидкості для тіл з різних матеріалів різної обробки поверхні неоднакова. У деяких спеціальних випадках, наприклад для однорідних твердих тіл або при спеціальній обробці дотичних поверхонь, сила тертя ковзання виявляється дуже мало залежною від швидкості і приблизно рівна максимальній силі тертя спокою.

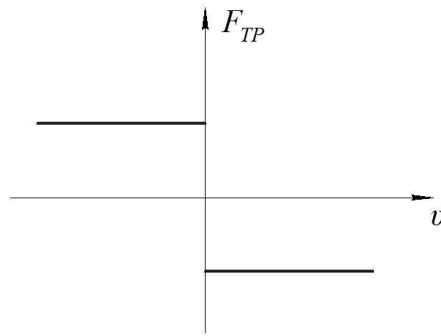


Рисунок 7.2

Графік залежності сили тертя від швидкості в цьому випадку показаний на рис. 7.2. Але для різнорідних матеріалів сила тертя нерідко спадає зі збільшенням швидкості, а потім починає зростати. Для цього випадку залежність сили тертя від швидкості зображена на рис. 7.3.

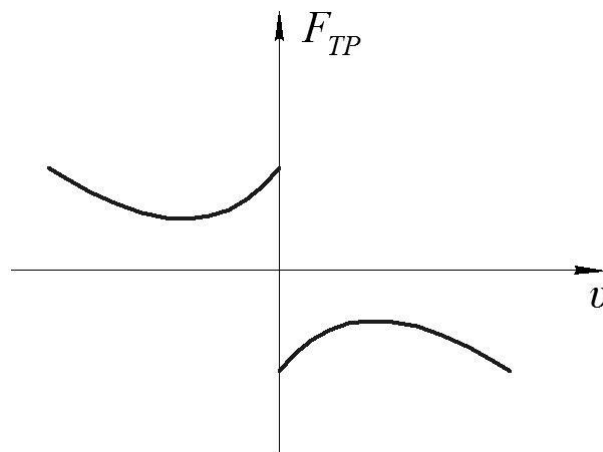


Рисунок 7.3

Якщо сила тертя, що діє між вантажем і стрічкою (рис. 7.1, а), росте зі збільшенням швидкості, то при русі вантажу вправо сила тертя зменшиться, і сила пружності буде більшою від сили тертя – вантаж повернеться в стан рівноваги. Те ж відбудеться при русі вантажу вліво, коли швидкість ковзання збільшиться, і сила тертя буде повертати вантаж в положення рівноваги, так як вона стала більшою, ніж сила пружності пружини. В результаті вантаж на стрічці робить стійкі коливання близько стану рівноваги.

Зовсім інакше буде вести себе вантаж, якщо сила тертя зменшується при збільшенні швидкості ковзання (такі характеристики сил тертя ковзання

зустрічаються нерідко). Якщо в результаті випадкового поштовху вантаж почав рухатися вправо (відносна швидкість буде зменшуватися), то сила тертя буде збільшуватися. Вона виявиться більшою від сили пружності пружини, і вантаж, розтягуючи пружину, буде рухатися вправо з дедалі більшою швидкістю. Відносна швидкість буде зменшуватися, а сила тертя буде продовжувати зростати. Цей рух вантажу припиниться, коли вантаж піде вправо і збільшена сила пружності не буде більшою від сили тертя (за величиною максимальної сили тертя спокою). Тоді вантаж почне рухатися назустріч руху стрічки і повертатися до стану рівноваги. Отже, якщо швидкість стрічки лежить на спадаючій ділянці характеристики тертя ковзання, то сили, що виникають при випадкових рухах вантажу в ту чи іншу сторону від положення рівноваги, відводять вантаж далеко від положення рівноваги, тобто стан рівноваги виявляється нестійким, і вантаж буде здійснювати коливання біля нестійкого положення рівноваги.

Фазова траєкторія для випадку, коли сила тертя зменшується з ростом швидкості показана на рис. 7.1, б.

У цьому випадку частина роботи двигуна, що приводить в рух стрічку з поступальною швидкістю  $\mathcal{Q}_0$ , йде на збільшення енергії коливань вантажу. Коли вантаж рухається в ту ж сторону, що і стрічка, то сила тертя, що діє з боку стрічки на вантаж, здійснює позитивну роботу. Коли вантаж рухається назустріч стрічці, ця сила тертя здійснює негативну роботу. Але так як зі зменшенням швидкості сила тертя збільшується, то, коли вантаж рухається в ту ж сторону, що і стрічка, робота сили тертя буде більшою, ніж коли вантаж рухається в сторону протилежну стрічці, так як в цьому випадку сила тертя зменшується, і, отже, сума робіт сил тертя за період буде позитивною. Ця робота спочатку йде на збільшення енергії коливань вантажу, так як спочатку амплітуда коливань наростає, а потім компенсує виникаючі втрати енергії. При великих амплітудах коливань вантажу швидкість ковзання виходить за межі падаючої ділянки графіка залежності сили тертя від швидкості. Встановлюється амплітуда коливань вантажу, при якій надходження енергії в ту частину



періоду, за яку сила тертя збільшується зі зменшенням швидкості, компенсує втрату енергії за ту частину періоду, при якій сила тертя зменшується при збільшенні швидкості. З цією амплітудою і будуть відбуватися автоколивання вантажу.

Широко поширеною механічною автоколивальною системою є механічний годинник. Коливальною системою тут можуть бути фізичний маятник, балансір або інші коливальні системи. Джерелом енергії можуть служити вантаж, піднятий на певну висоту, або деформована пружина. Регулюючим пристроєм є спусковий механізм, що зв'язує коливальну систему з джерелом енергії. Спусковий механізм грає в годиннику роль зворотного зв'язку.

### **Флаттер крила у повітряному потоці**

**Флаттером** називаються автоколивання тіл у потоці газу чи рідини.

З появою перших швидкісних літаків флаттер спричинив численні катастрофи. Явище флаттера тісно пов'язане з тими впливами, які потік повітря чинить на крило, що коливається.

При флаттері крило літака здійснює згинально-крутильні коливання, тому для аналізу цього явища необхідно врахувати щонайменше два ступені вільності крила. При практичних розрахунках достатньо врахувати рух крила за першими формами власних згинальних та крутильних коливань. У ще простішому варіанті розрахунку розглядають жорстке крило, що має два ступені вільності, що відповідають його вертикальному переміщенню та повороту. Істотне значення має положення центру ваги крила.

## **7.2. Прикладне застосування автоколивань в конструкціях галузевих машин**

Наведемо практичний приклад застосування теорії автоколивальних процесів при проектуванні галузевих машин.

За основу візьмемо машину для основного обробітку ґрунту – плуг загального призначення.

Представимо деякі результати патентного огляду існуючих конструкцій плугів, що направлені на зменшення тягового опору та підвищення надійності конструкції.

Метою винаходу № 662032 є зменшення спрацювання польової дошки і зниження тягового опору плуга. Поставлена мета досягається тим, що польова дошка закріплена у середній частині на стійці за рахунок шарніра з вертикальною віссю. Польова дошка може бути підпружинена відносно стійки.

Корпус складається з стійки, до котрої прикріплений леміш, полиця і польова дошка. Польову дошку кріплять до стійки за допомогою шарніра з вертикальною віссю, розташованою посередині польової дошки. Від значного повороту польова дошка може бути захищена пружинами чи обмежувальними упорами. На зовнішній поверхні польової дошки може бути закріплена пластина, виготовлена із зносостійкого матеріалу.

У процесі роботи завдяки шарніру польова дошка при будь-якому перекосі плуга у горизонтальній площині прилягає до стінки борозни всією площиною. При цьому епюра тиску на польову дошку буде мати форму прямокутника, тобто тиск рівномірно розподіляється по всій площині польової дошки. За рахунок рівномірного розподілення тиску на площину польової дошки значно зменшується спрацювання заднього кінця польової дошки і тяговий опір плуга за рахунок виключення вдавлювання кінця польової дошки в стінку борозни.

На польовій дошці корпуса плуга з робочої сторони може бути встановлена тонка змінна пластина, виготовлена із зносостійкого матеріалу, що попереджає спрацювання основної частини дошки.

У винаході № 594908 метою є зниження тягового опору і покращення якості кришіння ґрунту. Для цього у запропонованому корпусі плуга леміш виконано у вигляді дисків, що вільно обертаються, вони встановлені в одній площині з перемінними вгору і вниз загостреннями, по яких диски примикають один до одного, причому носок лемеша виконано у вигляді наральника трапецеїдальної форми із скосом у сторону дисків.

Продовжуючи пошук альтернативних рішень, свою увагу зосередимо на конструктивному рішенні, що запропоноване у патенті № 64367.

Виконавши аналіз конструктивних особливостей звичайних лемішних плугів для покращення їх роботи, недоліком корпуса плуга можна вважати нездатність лемеша утворювати псевдорозріджений шар ґрунту перед ріжучою площиною для полегшеного різання, а також проводити активне самоочищення ріжучої кромки від рослинних та ґрунтових решток, що у підсумку суттєво знижує тяговий опір цілого корпусу плуга.

За основу для даного дослідження взято конструкцію енергозберігаючого плуга, що представлена у патенті № 64367.

Метою цієї вдосконаленої моделі є забезпечення можливості лемешу корпуса плуга утворювати псевдорозріджений шар ґрунту перед ріжучою площиною, що полегшить різання та самоочищення ріжучої кромки від рослинних та ґрунтових решток. Це у підсумку суттєво знизить тяговий опір цілого корпусу плуга.

На нашу думку, цього можна досягти, якщо конструкцію корпуса плуга виконати такою, що складається з лемеша, полиці і польової дошки, що приєднані до відливу стояка, приєднавши леміш до відливу стояка через приєднувальні елементи у вигляді плоских пружин. Це дозволить лемешу переміщатися у двох взаємно перпендикулярних площинах через компенсаційне вікно, що виконане у відливі стояка.

Розглянемо конструкцію такого корпуса плуга, зображену на рис.7.4.

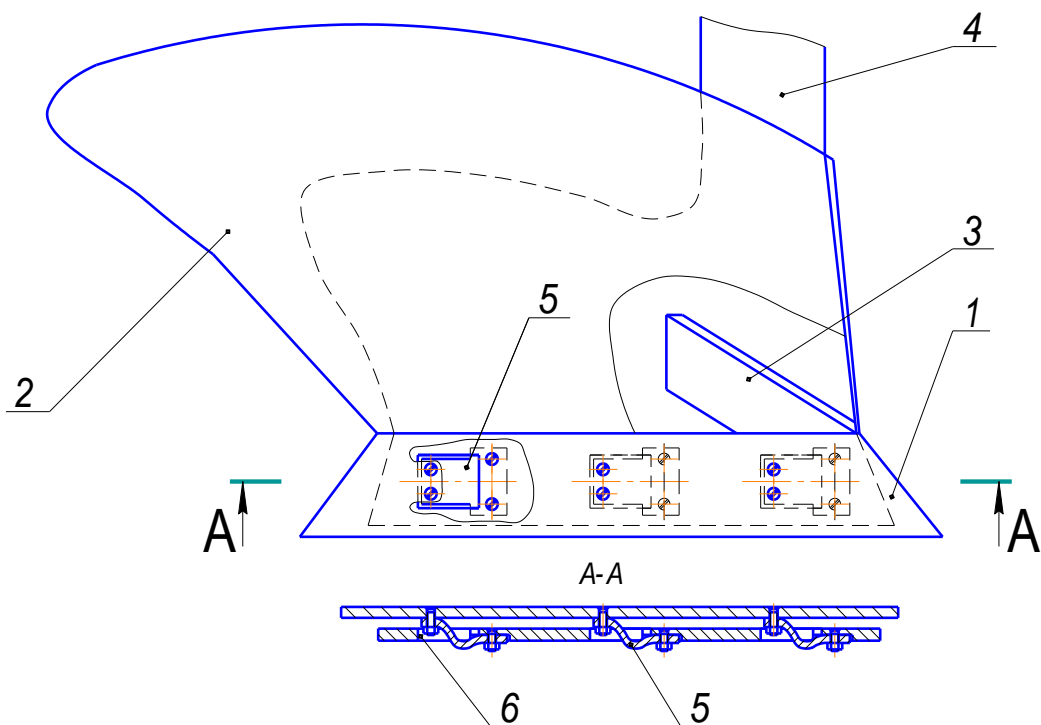


Рисунок 7.4 – Вдосконалена конструкція енергозберігаючого корпусу плуга

Вдосконалена конструкція енергозберігаючого корпусу плуга складається з лемеша *1*, полиці *2* і польової дошки *3*, які приєднані до відливу стояка *4*. Причому, леміш *1* приєднано до відливу стояка *4* через приєднувальні елементи *5* у вигляді плоских пружин, які можуть забезпечити переміщення лемеша *1* у двох взаємно перпендикулярних площинах. Крім того, приєднувальні елементи *5* одним кінцем закріплено на лемеші *1*, а іншим до відливу стояка *4* через виконане в ньому компенсаційне вікно *6*.

Розглянемо запропоновану конструкцію корпусу плуга під час роботи. У ненавантаженому стані, коли технологічний процес не виконується, тобто немає тиску пласта ґрунту на поверхню лемеша *1*, приєднувальні елементи *5* як плоскі пружини відводять його вгору і вперед (за заданою траєкторією руху цих елементів). Під час виконання технологічного процесу тиск пласта ґрунту на поверхню лемеша *1* створює силу, що деформує приєднувальні елементи *5*, переміщаючи леміш *1* до відливу стояка *4*. При цьому приєднувальні елементи *5* ховаються у виконаних компенсаційних вікнах *6*, не створюючи зазору між лемешем *1* і відливом стояка *4*.

Оскільки руйнування або сколювання пласта ґрунту – це процес циклічний, тобто йде накопичення і розвиток тріщин в елементарній скибі до повного руйнування (відділення від основного пласта). Це відбувається на невеликій відстані при переміщені корпусу плуга в орному шарі. Ця відстань залежить від фізико-механічних властивостей ґрунту, технічного стану лемеша *1* і т.ін. Потім процес повторюється. В плані створення тиску пластом ґрунту це виглядає так. При стисканні пласта (зародження і розвиток тріщин) сила дії лемеша *1* на приєднувальні елементи *5* зростає, переміщуючи їх у компенсаційні вікна *6*, при цьому і леміш *1* переміщається до відливу стояка *4*. Коли ж настає момент критичного розвитку тріщин ця елементарна скиба руйнується, а тиск зовнішнього пласта різко падає. В той момент за рахунок сил пружності приєднувальних елементів *5* відбувається зворотній рух лемеша *1* в «миттєво розріджений» або псевдорозріджений шар ґрунту. Леміш *1* набирає високої швидкості, оскільки опір ґрунту є мінімальним. За час його «вільного» переміщення машина (орний агрегат) теж проходить певну відстань і тому закінчення цього руху супроводжується співударенням розігнаного лемеша *1* з новою елементарною скибою. Далі тиск пласта ґрунту зростає, деформуються пружні приєднувальні елементи *5*, переміщуючи леміш *1*; настає руйнування елементарної скиби; знову леміш *1* відводиться пружними приєднувальними елементами *5* і т.д. Тобто проходить почергове накопичення і перетворення потенціальної енергії деформації пружних приєднувальних елементів *5* в кінетичну енергію лемеша *1*, яка витрачається на процес деформування і, відповідно, руйнування пласта ґрунту. Якщо цей процес розглядати на макрорівні, то леміш *1* здійснюватиме вібраційний рух, який збуджується почерговим руйнуванням елементарних скиб пласта ґрунту. Такий рух лемеша *1* дозволить покращити процес його самоочищення від рослинних решток чи налипання частинок ґрунту за рахунок різниці швидкостей точок його робочої поверхні та відповідних точок тих об'єктів, які з ним контактують.

Таким чином, запропонована конструкція корпусу плуга забезпечить можливість лемешем утворювати псевдорозріджений шар ґрунту перед

ріжучою площиною для полегшеного різання і підвищеного активного самоочищення ріжучої кромки від рослинних та ґрунтових решток, що у підсумку суттєво знижує тяговий опір всього корпусу плуга.

### **Дослідження ефективності роботи енергозберігаючого корпусу плуга**

Вивчаючи вібраційні рухи, які здійснює леміш при виконанні технологічного процесу, можна констатувати, що тут виникають автоколивальні процеси, які дуже поширені в техніці.

Доведено, що автоколивання робочих органів ґрунтообробних машин з пружною підвіскою можуть забезпечити можливість значно (до 50 %) знизити тяговий опір ґрунтообробних машин, зокрема плугів. Крім того, робочі органи, в цьому випадку, менше забиваються пожнивними рештками і бур'янами.

Такий підхід дозволяє підвищити також і надійність рами машини чи знаряддя завдяки зниженню питомих навантажень в окремих її ділянках.

Збудження вібрацій можливе за допомогою спеціальних вібраторів (активні робочі органи), але практичний досвід показує, що загальна витрата енергії виявляється навіть більша ніж при роботі звичайних робочих органів. До того ж вартість таких машин суттєво збільшується. Тому ефективним є застосування пружної підвіски робочих органів, що забезпечують автоколивальний режим їх роботи.

Якщо б достеменно була відома картина взаємодії робочого органу з ґрунтом, то вирішення задачі про автоколивання робочого органу на пружній підвісці було б простим завданням.

Проте, можна використати прості моделі сил опору ґрунту і отримати рішення, що матимуть задовільну точність для таких інженерних задач.

Виходячи з цього, розглянемо модель енергозберігаючого корпусу плуга, в якого леміш масою  $m$  приєднаний до відливу стояка через пружні елементи у вигляді плоских пружин постійного перетину, коефіцієнт жорсткості яких  $k$ .

Корпус плуга (точка підвісу) рухається із швидкістю  $v$ . На робочий орган корпусу плуга з боку ґрунту діє сила опору  $R(u)$ , що залежить від відносної швидкості  $u$  руху лемеша (рис. 7.5).

Тоді положення площини лемеша можна визначити координатою  $x$ , а відносна швидкість становитиме  $u = v - \dot{x}$ .

Диференціальне рівняння руху лемеша запишемо у вигляді

$$m\ddot{x} + kx - R(u) = 0. \quad (7.1)$$

Рівняння рівноваги лемеша при нерухомому робочому органі, при умові, що він отримує статичний зсув,

$$x_0 = R(v) / k. \quad (7.2)$$

Характер рівноваги в цьому положенні визначається функцією залежності  $R(u)$ .

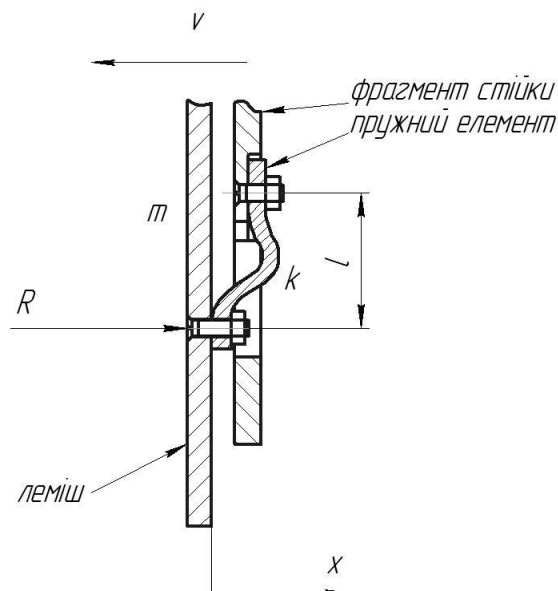


Рисунок 7.5 – Розрахункова модель вібраційного лемеша

Перша задача, яку потрібно вирішити – визначити стійкість положення рівноваги лемеша, що визначається координатою  $x_0$ . Тому допустимо, що є нескінченно мале збурення  $\xi(t)$ , таке що  $x(t) = x_0 + \xi(t)$ .

Якщо коливання лемеша є відносно малими, то силу опору запишемо у вигляді

$$R(u) = R(v - \dot{x}) = R(v) - (dR/du)_{u=v} \xi. \quad (7.3)$$

Враховуючи ці припущення, підставляємо значення  $x$  і  $R$  в рівняння руху (7.1), і отримаємо

$$m\ddot{\xi} + (dR/du)_{u=v} \dot{\xi} + k\xi = 0. \quad (7.4)$$

З аналізу залежності (7.4) видно, що якщо  $(dR/du)_{u=v} > 0$  або  $v > u_0$ , то коливання будуть затухаючими і положення статичної рівноваги є стійким по відношенню до малих збурень. Тобто, якщо  $v > u_0$ , то стан рівноваги стійкий, якщо ж  $v < u_0$ , то після будь-якого досить малого збурення в системі відбувається самозбудження коливань.

Представлена модель може тільки характеризувати автоколивальний процес з позиції умов виникнення таких коливань чи неможливості їх збудження.

Для практичного застосування потрібно мати дані про амплітуди коливань робочого органу в ґрунтовому середовищі. Цього можна досягти, якщо враховувати дійсну нелінійність сили опору ґрунту.

В літературних джерелах можна бачити різні моделі опору ґрунту при роботі ґрунтообробного знаряддя. Представимо  $R(u)$  у вигляді полінома третього ступеня

$$R(v - \dot{x}) = b_0 + b_1 \dot{x} + b_2 \dot{x}^2 + b_3 \dot{x}^3. \quad (7.5)$$

Цей поліном – це усічений ряд Тейлора при розкладанні функції  $R(u)$  в околі точки  $u=v$ :

$$b_0 = R(v), \quad b_1 = -\left(\frac{dR}{du}\right)_{u=v},$$



$$b_2 = \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 R}{du^2} \right)_{u=v}, \quad b_3 = -\frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 R}{du^3} \right)_{u=v}.$$

При апроксимації сили опору виразом (7.5) диференціальне рівняння руху щодо координати  $\xi(t) = x(t) - x_0$ , де  $x_0 = b_0/k$ , отримає вигляд

$$m\ddot{\xi} + (b_1\dot{\xi} + b_2\dot{\xi}^2 + b_3\dot{\xi}^3) + k\xi = 0.$$

Якщо розділити це рівняння почленно на  $m$  та додати до лівої і правої його частин  $\omega^2\xi$ , тут  $\omega$  – шукана частота коливань, то отримаємо таке рівняння

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = f(\xi, \dot{\xi}), \quad (7.6)$$

де

$$f(\xi, \dot{\xi}) = (\omega^2 - k/m)\xi + (b_1\dot{\xi} + b_2\dot{\xi}^2 + b_3\dot{\xi}^3)/m. \quad (7.7)$$

Існують різні методи вирішення рівняння (7.6). Припускаючи, що функція  $f(\xi, \dot{\xi})$  складається з малих нелінійних членів, рішення шукають у вигляді

$$\xi = A \cos \varphi, \quad \dot{\xi} = -A \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

де  $A$  і  $\varphi$  – функції часу, що поволі змінюються. Тоді функція  $f(\xi, \dot{\xi})$  з'явиться у вигляді

$$f(\xi, \dot{\xi}) = f(A \cos \varphi, -A \dot{\varphi} \sin \varphi).$$

Далі визначаємо інтеграли:

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= \int_0^{2\pi} f(A\cos\varphi, -A\omega\sin\varphi) \sin\varphi d\varphi, \\ \Psi(A) &= \int_0^{2\pi} f(A\cos\varphi, -A\omega\sin\varphi) \cos\varphi d\varphi,\end{aligned}\tag{7.8}$$

у припущенні, що  $A$  і  $\varphi$  – постійні величини. Після цього записуємо два диференціальні рівняння

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\Phi(A)}{2\pi\omega},\tag{7.9}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Psi(A)}{2\pi\omega A}.$$

З цього моменту вказуємо, що  $A$  – величина змінна і її можна знайти шляхом інтегрування першого рівняння. Потім, після інтегрування другого рівняння, визначаємо функцію  $\varphi = \varphi(t)$ . Початкові умови для визначення постійних інтегрування беремо у вигляді

$$A(0) = A_0, \quad \varphi(0) = 0.\tag{7.10}$$

Кінцево отримаємо таке рішення заданого рівняння (7.6)

$$x = A(t) \cos[\omega t - \varphi(t)].\tag{7.11}$$

Функція  $A(t)$  є такою, що огинає графік автоколивань, які встановлюються. Для автоколивальних систем амплітуди зростатимуть до деякої межі при необмеженому збільшенні часу. Цю граничну межу можна визначити через амплітуду стаціонарних автоколивань, яка може бути знайдена з умови її постійності

$$\frac{dA}{dt} = 0. \quad (7.12)$$

Відповідно до розглянутого методу, диференціальні рівняння (7.9), після обчислення інтегралів (7.8) з урахуванням виразу (7.7), набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \dot{A} &= A(b_1 + 3/4b_3\omega^2 A^2)/(2m), \\ \dot{\phi} &= -(\omega^2 - k/m)/(2\omega). \end{aligned} \quad (7.13)$$

При стаціонарному режимі руху  $\dot{A} = 0$ ,  $\dot{\phi} = 0$ . Звідси випливає, що частота стаціонарних коливань  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  співпадає з частотою власних коливань системи, а стаціонарну амплітуду  $A$  визначають з рівняння

$$A = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{-4b_1/3b_3}. \quad (7.14)$$

Аналізуючи отриманий вираз, робимо висновок, що стаціонарні коливання можливі тільки в тому випадку, коли коефіцієнти  $b_1$  та  $b_3$  матимуть різні знаки.

Якщо коефіцієнти  $b_1$  і  $b_3$  позитивні, то положення статичної рівноваги нестійке і траєкторія за будь-яких початкових умов йде в нескінченність. При негативних коефіцієнтах всі траєкторії необмежено наближаються на початок координат – стійкий фокус. Стійкий стаціонарний режим, як показано вище, настає, коли  $b_1 > 0$ ,  $b_3 < 0$ . Незалежно від початкових умов фазові траєкторії наближаються до стійкого граничного циклу, що характеризується амплітудою  $A$ . У випадку, коли  $b_1 < 0$ ,  $b_3 > 0$  граничний цикл з амплітудою  $A$  нестійкий.

Розглянемо конкретніший випадок для точнішого розв'язку поставленої задачі.

Якщо сила опору має вигляд, показаний на рис. 7.6, то можливі автоколивання із зупинками руху лемеша, їх ще називають релаксаційними автоколиваннями.

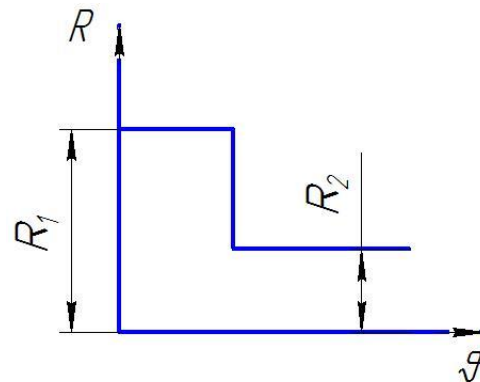


Рисунок 7.6 – Схематизація сил опору лемеша

Розглянемо поетапно процес роботи лемеша для таких умов. У початковий момент руху леміш залишається нерухомим поки сила опору зростає до значення  $R_1$ . Як тільки сила пружного опору пружних елементів  $F(t)=kx(t)$  досягне величини  $R_1$ , леміш почне рух, і сила тертя миттєво зменшиться до значення  $R_2$ . Оскільки сила пружного опору миттєво змінитися не може, то в перший момент руху лемеша, вона буде як і раніше дорівнюватиме  $R_1$ . Цей момент зриву лемеша вважатимемо початком відліку часу ( $t=0$ ). Очевидно, у цей момент нулю дорівнюють як початкове переміщення маси лемеша  $x$ , так і початкова його швидкість  $\dot{x}$ , тобто

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (7.15)$$

Друга умова впливає з того, що миттєвий стрибок швидкості лемеша неможливий, оскільки сила, що діє на леміш кінцева і дорівнює  $R_1 - R_2$ .

Оскільки в подальшому русі швидкість лемеша  $\dot{x}$  відрізняється від швидкості руху корпусу  $v$ , то сила пружності пружних елементів зменшиться на величину  $\Delta F = k(x - vt)$  і буде дорівнювати

$$F(t) = R_1 - k(x - vt). \quad (7.16)$$

Записуємо диференціальне рівняння руху лемеша

$$m\ddot{x} = R_1 - k(x - vt) - R_2.$$

Розділивши обидві частини рівняння на  $m$  (масу лемеша) та виконавши заміну  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  отримаємо

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 vt + \frac{R_1 - R_2}{m}. \quad (7.17)$$

Вирішення цього рівняння, що відповідає початковим умовам (7.15), має вигляд

$$x = vt - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{R_1 - R_2}{c} (1 - \cos(\omega_0 t)). \quad (7.18)$$

Перший доданок правої частини виражає рівномірний рух із швидкістю корпусу, а решта доданків – додаткові коливання лемеша. Швидкість лемеша змінюється згідно із законом

$$\dot{x} = v - v \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_0 (R_1 - R_2)}{k} \sin(\omega_0 t). \quad (7.19)$$

Прискорення лемеша

$$\ddot{x} = \omega_0 v \sin(\omega_0 t) - \frac{\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \cdot (R_1 - R_2)}{k}.$$

Наступна зупинка лемеша відбудеться в мить, коли  $\dot{x}$  знов перетвориться

на нуль. Умова зупинки  $\dot{x} = 0$  призводить до трансцендентного рівняння

$$v - v \cos(\omega_0 t_1) + \frac{\omega_0 (R_1 - R_2)}{k} \sin(\omega_0 t_1) = 0,$$

у якому через  $t_1$  позначений час від зриву до нової зупинки. Введемо безрозмірний параметр

$$\alpha = \frac{\omega_0 (R_1 - R_2)}{kv_0}. \quad (7.20)$$

Тоді умова зупинки лемеша прийме вигляд

$$\alpha \sin(\omega_0 t_1) = \cos(\omega_0 t_1) - 1,$$

звідки найменше відмінне від нуля значення  $t_1$

$$t_1 = \frac{2}{\omega_0} [\pi - \text{arctg}(\alpha)]. \quad (7.21)$$

Знайшовши звідси значення  $t_1$ , можна за формулою (7.18) визначити переміщення лемеша  $x_1$  у момент зупинки, тобто шлях, пройдений лемешем за час  $t_1$

$$x = vt_1 - \frac{v}{\omega_0} \sin(\omega_0 t_1) + \frac{R_1 - R_2}{k} (1 - \cos(\omega_0 t_1)) = vt_1 + \frac{2\alpha v}{\omega_0}.$$

З урахуванням отриманих виразів знайдемо за формулою (7.16) силу пружного опору лемеша у момент зупинки

$$F(t_1) = 2R_2 - R_1.$$

Оскільки  $R_2 < R_1$ , то  $F(t_1) < R_1$ , отже, після зупинки леміш якийсь час залишиться на місці, поки сила пружності знов не досягне значення граничної сили тертя спокою  $R_1$ .

За час, протягом якого леміш стоїть, сила пружності зросте на величину

$$\Delta F = R_1 - F(t_1) = 2(R_1 - R_2),$$

і відповідне переміщення точки кріплення лемеша складе

$$\Delta l = \frac{\Delta F}{k} = \frac{2(R_1 - R_2)}{k}.$$

Цій же величині дорівнює шлях, який проходить корпус за час, поки леміш стоїть на місці. Отже, тривалість стану спокою лемеша дорівнює

$$t_2 = \frac{\Delta l}{v_0} = \frac{2(R_1 - R_2)}{kv_0} = \frac{2\alpha}{\omega_0}. \quad (7.22)$$

Отже, період автоколивань лемеша визначаємо за формулою

$$T = t_1 + t_2. \quad (7.23)$$

У момент  $t=T$  відбувається наступний зрив лемеша, і починається новий цикл автоколивань.

Чим менша швидкість руху корпусу, тим чіткіше виражений процес автоколивань. При малій швидкості, як це впливає з формул (7.20), (7.21) і (7.22), приблизно отримаємо

$$t_1 \approx \frac{\pi}{\omega_0}, \quad T \approx \frac{\pi + 2\alpha}{\omega_0}. \quad (7.24)$$

Отже, залежно від швидкості руху корпусу період коливань змінюється від періоду власних коливань системи леміш-корпус  $2/\omega_0$  при  $v \rightarrow \infty$  до  $T = \pi/\omega_0 + 2\alpha/\omega_0$  при  $v \rightarrow 0$ .

Скориставшись теоретичними дослідженнями, перейдемо до практичного розрахунку, у якому перевіримо ефект вібраційного руху лемеша для зниження тягового опору плуга.

З аналізу літературних джерел відомо, що леміш плуга сприймає приблизно 40 % всього опору корпусу. Прийmemo для середніх ґрунтів питомий опір  $k_0 = 49033 \text{ Н/м}^2$ . Як дослідний зразок використаємо плуг ПЛН-3-35. На прикладі роботи одного корпусу проведемо дослідження. Задамо значення глибини обробітку –  $a = 0,25 \text{ м}$ , ширина захвату –  $b = 0,35 \text{ м}$ .

Визначимо тяговий опір такого корпусу. Задана швидкість орного агрегату 7 км/год. Оскільки питомий опір ґрунту, значення якого наведено у довідниках, визначають при швидкості оранки 5 км/год, то даний показник потрібно уточнити з врахуванням збільшення заданої швидкості агрегату.

$$k_0^{v_p} = k_0[1 + 0,006(v_p^2 - v_0^2)], \quad (7.25)$$

де  $k_0^{v_p}$  – розрахунковий питомий тяговий опір плуга з урахуванням швидкості руху агрегату,  $\text{Н/м}^2$ ;  $k_0$  – питомий опір ґрунту при швидкості руху агрегату  $v_0 = 5 \text{ км/год}$ ,  $\text{Н/м}^2$ ;  $v_p$  – швидкість руху в даний момент (відповідає прийнятій швидкості  $v$  корпусу плуга),  $\text{км/год}$ .

$$k_0^{v_p} = 49033[1 + 0,006(7^2 - 5^2)] = 56090 \text{ Н/м}^2.$$

Тоді тяговий опір буде дорівнювати



$$R = k_0^{v_p} ab + \varepsilon ab v_p^2, \quad (7.26)$$

де  $\varepsilon$  – коефіцієнт, що залежить від форми полиці корпусу плуга і властивостей ґрунту,  $\varepsilon = 1,7 \text{ кНс}^2/\text{м}^4$ ;  $v_p = 7 \text{ км/год}$  або  $v_p = 1,944 \text{ м/с}$ , тоді

$$R = 56090 \cdot 0,25 \cdot 0,35 + 1,7 \cdot 0,25 \cdot 0,35 \cdot 1,944^2 = 4908 \text{ Н.}$$

Звідки приймаємо рушійний опір лемеша

$$R_1 = 0,4 \cdot R. \quad (7.27)$$

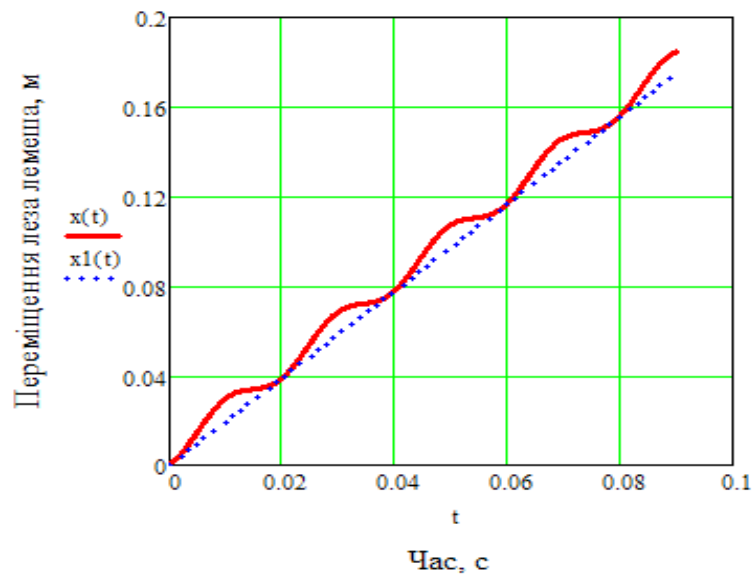
Підставляємо значення

$$R_1 = 0,4 \cdot 4908 = 1963 \text{ Н.}$$

Цю величину опору лемеша беремо до розрахунку, вважатимемо його таким, що руйнує пласт ґрунту.

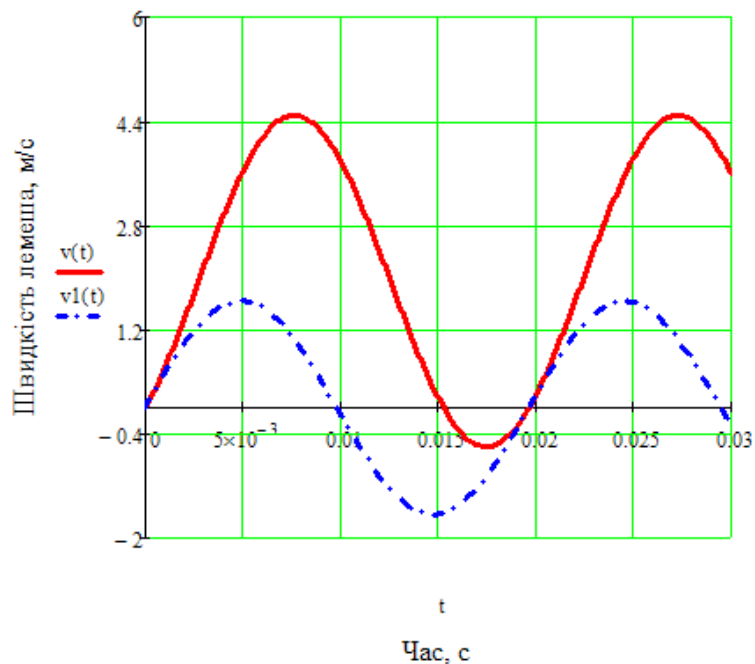
За дослідженнями Г.Є. Листопада, сколювання пласта ґрунту відбувається на відстані від 5...15 мм залежно від типу ґрунту, а саме, його фізико-механічних властивостей. Для розрахунку приймемо відстань, яку пройде леміш, утворюючи ущільнене ядро, до початку сколювання елементарної скиби – 10 мм. Зрозуміло, що це умовне переміщення і навіть для одного і того ж типу ґрунту цей параметр є змінним. Для нас тут важливим є правильно підібрати діапазон такого переміщення. Це буде впливати на різні тривалості вібраційного переміщення лемеша  $t_1$  та час перебування його у відносному спокої  $t_2$ . Жорсткість пружних елементів лемеша приймемо з умови сприйняття ним заданого вище навантаження та переміщення, що відповідає максимальній амплітуді коливань,  $k = 306300 \text{ Н/м}$ .

Дослідження математичної моделі коливального руху лемеша корпусу плуга виконано в середовищі Mathcad 14. Переміщення лемеша представимо у вигляді графіка на рис. 7.7.



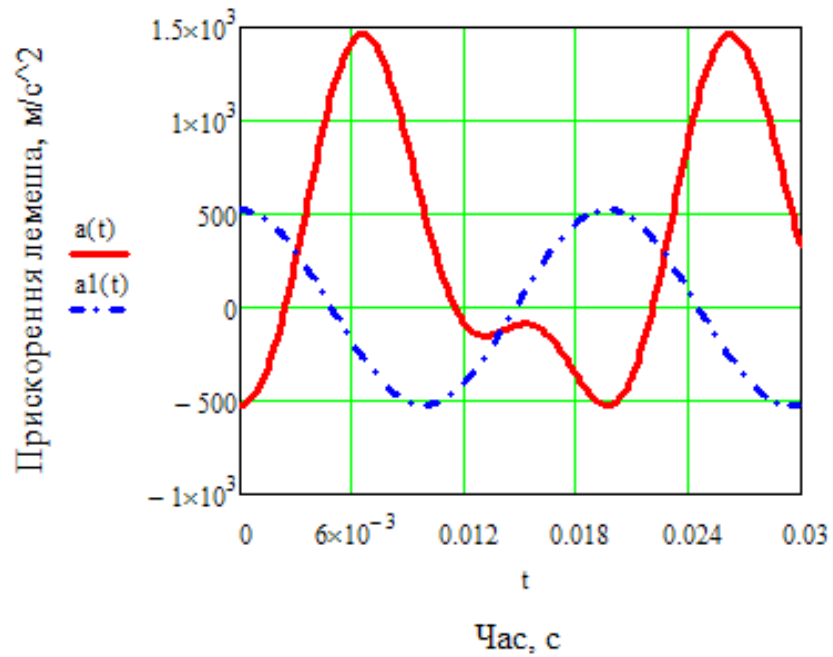
$x(t)$  – динамічна складова переміщення лемеша;  
 $x_1(t)$  – переміщення разом із стійкою корпусу плуга  
 Рисунок 7.7 – Графік, що характеризує переміщення леза лемеша

Графік абсолютної та відносної швидкостей лемеша зображений на рис. 7.8.



$v(t)$  – абсолютна швидкість переміщення лемеша;  
 $v_1(t)$  – швидкість вібраційного переміщення лемеша  
 Рисунок 7.8 – Графік абсолютної та відносної швидкостей лемеша

Прискорення лемеша представлено на рис. 7.9.



$a(t)$  – абсолютне прискорення лемеша;  
 $a_1(t)$  – прискорення при вібраційному переміщенні лемеша  
Рисунок 7.9 – Графік прискорення лемеша

Графік зміни надлишкової інерційної сили, яка виникає при роботі лемеша, зображений на рис. 7.10.

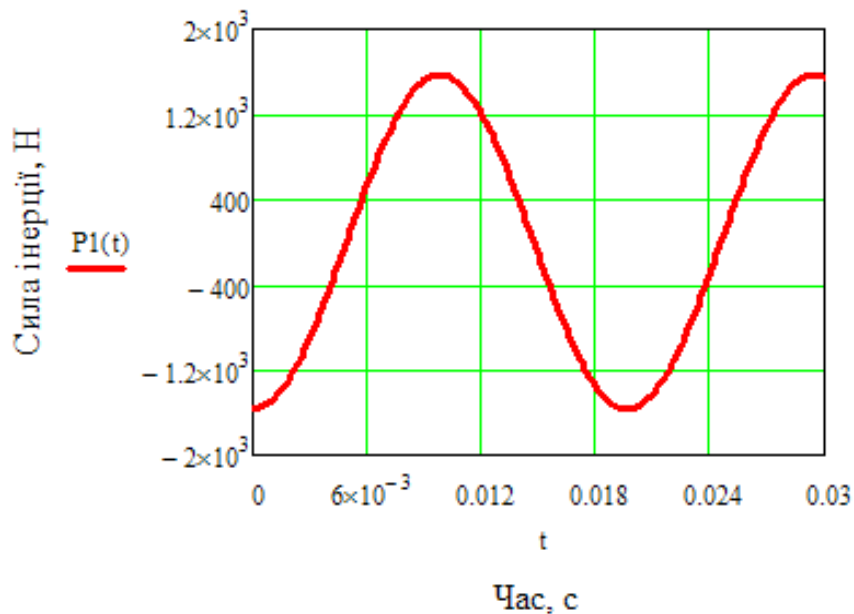


Рисунок 7.10 – Ефективна інерційна сила при вібраційному переміщенні лемеша

Максимальне значення сили інерції становить за виконаним розрахунком 1571 Н. Робота, яку при цьому виконує леміш, має ефект у півперіоді, коли накопичена кінетична енергія деформації пружних елементів лемеша переходить в потенціальну енергію лемеша і затрачається на руйнування нової частинки ґрунту. В числовому вираженні при прийнятих параметрах і умовах роботи ефект складає 40 % від повного циклу – накопичення енергії руйнування пласта, враховуючи, що опір  $R_2$  становить 20 % від опору  $R_1$ , який затрачається на відділення елементарної скиби в пласті ґрунту.

Розглядаючи модель руйнування пласта ґрунту, вважаємо, що опір псевдорозрідженого шару приблизно дорівнює нулю ( $R_2 \approx 0$ ), тому за розробленою моделлю вібраційної взаємодії лемеша з ґрунтовим середовищем, ефект зниження тягового опору такого корпусу плуга складатиме 50 %, що добре корелює з результатами досліджень інших авторів у цьому напрямі.

### **Перелік контрольних питань:**

1. Які системи називаються автоколивальними системами?
2. Пояснити суть виникаючих автоколивань.
3. Як пояснити, що особливістю автоколивання є незалежність їх амплітуди від початкових умов?
4. Які автоколивання називають стаціонарними?
5. Які складові автоколивальної системи?
6. Автоколивальні системи є лінійними чи не лінійними? Пояснити.
7. Навести приклади виникаючих автоколивань на практиці.
8. Пояснити суть виникнення фрикційних автоколивань.
9. Широко поширеною механічною автоколивальною системою є механічний годинник. Як тут виникає автоколивальний процес?
10. Флаттер крила у повітряному потоці. Що це за явище?

11. Навести приклади автоколивальних процесів при роботі ґрунтообробних сільськогосподарських машин?
12. Принцип роботи енергозберігаючого корпусу плуга.
13. Який ефект спостерігається при роботі підпружинених робочих органів в ґрунтовому середовищі?
14. Відносна швидкість переміщення лемеша на пружній стійці.
15. Як записати диференціальне рівняння руху лемеша на пружній стійці?
16. Як змінюються сили опору при руйнування пласта ґрунту?
17. Пояснити як відбуваються процеси зростання опору і «зриви» при переміщенні ґрунтообробного знаряддя в ґрунті?
18. Навести, як приклад, графічні залежності переміщення ґрунтообробного знаряддя в ґрунті при виникненні автоколивань.
19. Як змінюється швидкість переміщення лемеша при переміщенні в ґрунті, де виникають автоколивання?
20. Який ефект можна досягти при реалізації задачі виникнення автоколивань лемішного плуга в ґрунтовому середовищі?

## **ТЕМА 8. ВІБРАЦІЙНЕ ПЕРЕМІЩЕННЯ**

### **8.1. Застосування принципу вібраційного переміщення на практиці**

Принцип вібраційного переміщення широко застосовується в техніці. Під **ефектом вібраційного переміщення** варто розуміти виникнення направлено руху частинок при наданні їм енергії від коливань опорної поверхні. Вібраційне переміщення є основою багатьох технологічних процесів:

транспортування, сепарації, класифікації, дозування, змішування, проникнення, наприклад, сваї в ґрунт тощо.

Вібраційний транспорт широко застосовують у будівництві, машинобудуванні, сільськогосподарському виробництві, харчовій, гірничій промисловості і т.д.

Вібраційні конвеєри (рис. 8.1), що служать для переміщення в горизонтальному, похилому і вертикальному напрямках сипучих чи кускових матеріалів, заготовок та деталей на заводах, фабриках, млинах, будовах, в шахтах, кар'єрах тощо.

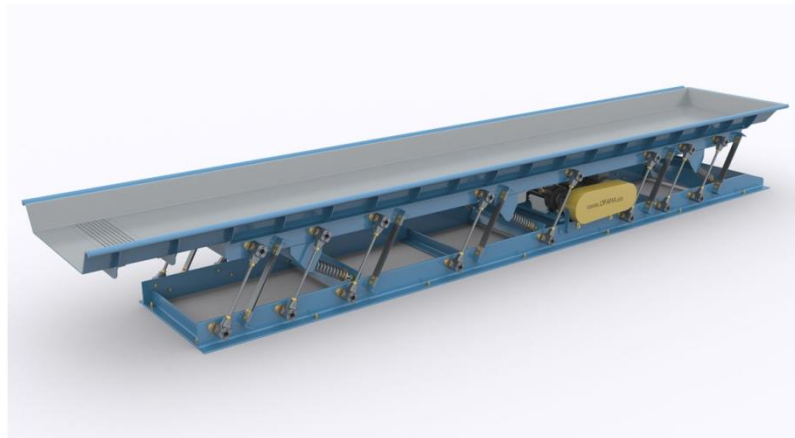


Рисунок 8.1 – Вібраційний конвеєр

Вібраційні конвеєри з інертним приводом з відкритою або закритою секцією жолоба прямокутної форми використовуються для передачі сипучих матеріалів. Закрита секція жолоба використовується, коли транспортна система повинна бути пиленепроникною. Жолоби можуть бути викладені захисним покриттям, стійкого до каучуку або іншого матеріалу. Матеріал, що транспортується жолобами може бути охолоджений, зволожений або просушений і т.д.

Вібраційне сито (рис. 8.2) – апарат для очищення бурового розчину від породи та інших механічних домішок. Основний робочий елемент вібраційного сита – сітка з розміром комірок 0,15-5 мм, якій надають коливання від електродвигуна і ексцентрикового вала з частотою 17-35 с<sup>-1</sup>. Продуктивність

вібраційного сита до 50-90 л/с. Найбільше застосування отримали одноярусні односіткові вібраційні сита з похилим розташуванням сіток. Для очищення дорогих розчинів використовують також одноярусні вібраційні сита із збільшеною поверхнею сітки і двоярусні вібраційні сита з дрібновічковими сітками.



Рисунок 8.2 – Вібраційне сито

Також в техніці дуже часто використовують:

- вібраційні живильники – для подавання різних матеріалів у вагових та об'ємних дозаторах;
- вібраційні бункери – для подавання просторово орієнтованих заготовок і деталей у верстати та технологічні пристрої, у тому числі в автоматичних лініях та робототехнологічних комплексах. Вібробункери набули поширення у приладобудуванні та загальному машинобудуванні;
- вібраційні хоботи – для подавання бетонних сумішей з бункерів у масиви вкладання.

- вібраційні насоси – для підняття рідин (зазвичай води) на невелику висоту або перекачування агресивних та забруднених рідин тощо.

Але, мабуть, одними із найпоширеніших машин, де застосовується принцип вібраційного переміщення – це зерноочисні та сортувальні машини, рис. 8.3.



Рисунок 8.3 – Деякі конструкції зерноочисних машин

Такі машини мають плоску коливальну площину (решета) з отворами певної конфігурації. При наданні цій площині коливального руху прискорення передається частинкам, які на ній знаходяться. Внаслідок чого починають діяти на частинки сили певної величини та напрямку, що змушує їх упорядковано рухатись.

Суть вивчення та дослідження цього процесу полягає в тому, щоб встановити закономірності такого впорядкованого руху та мати змогу «керувати» частинками, тобто їх законом руху з метою найкращої сепарації, заданої швидкості переміщення і т.д.

Є два основні типи вібротранспортування – з нормальним постійним тиском вантажу на робочий орган та із змінним тиском (з підкиданням).



## **8.2. Теоретичні основи вібраційного переміщення матеріалу на коливальній площині**

Тут наведено, як приклад вібраційного переміщення, рух зернової суміші на плоскому решету з метою розділення його на фракції.

*Робочий процес плоского решета містить в собі наступні основні етапи: переміщення зернової суміші, рівномірно розподіленої по поверхні решета; западання насіння в отвори решета і проходження крізь них, розміри яких менше робочих розмірів отворів.*

*В результаті цього зернова суміш ділиться на дві частини або фракції: схід і прохід.*

*Фракцію сходу складають найбільш крупні частинки, розмір яких перевищує робочий розмір отворів.*

*По мірі просування зернової суміші решетом, число зерен на одиниці його довжини зменшується. Ступінь цього зменшення залежить від розмірів зерен в початковому матеріалі відокремлюваної фракції. На решетах, що відокремлюють крупні домішки, при сході залишається лише 3...5 % від початкової кількості, на сортувальних – 30...70 %, а на підсівних – до 95...97 %.*

*В результаті коливальних дій на решето в шарі зернової маси відбувається перерозподіл частинок – найбільш великі спливають вгору, а дрібніші опускаються і стикаються з площиною решета.*

*Відповідно призначенню решета необхідно приймати його довжину такою, щоб до виходу виділитися всі частинки, які можуть пройти крізь отвори.*

**Умови переміщення матеріалу по коливальній площині плоского решета.**

Кінематичні характеристики веденої ланки кривошипно-шатунового механізму при невеликому значенні відношення радіусу до довжини шатуна

$r/l$  можуть бути представлені залежностями:

переміщення  $x = r(1 - \cos \omega t)$ , де  $\omega$  – кутова швидкість кривошипа;

швидкість  $v = r\omega \sin \omega t$ ,  $v_{\max} = r\omega$ ;

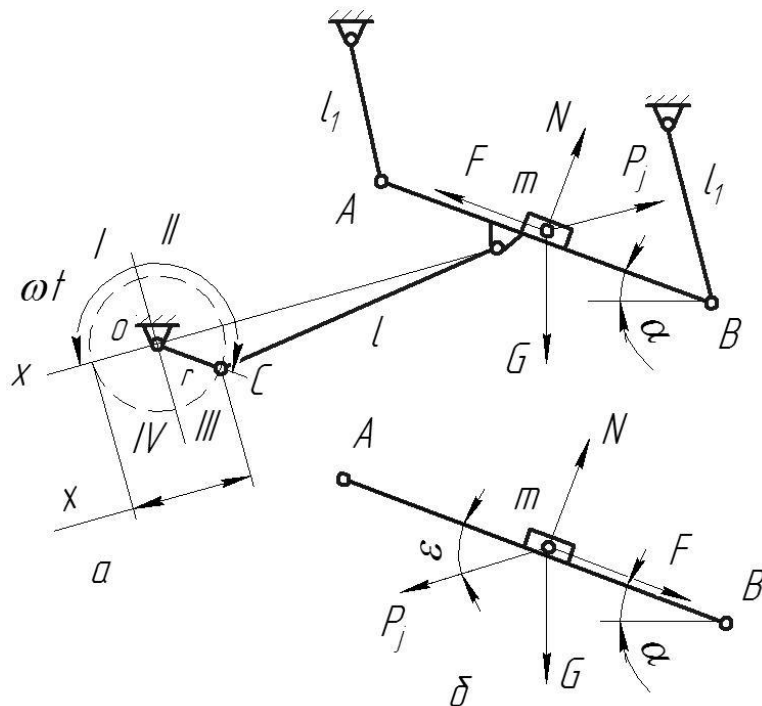
прискорення  $j = r\omega^2 \cos \omega t$ ,  $j_{\max} = r\omega^2$ .

Приймаючи ці характеристики для площини решета, що здійснює поздовжні коливання, розглянемо умови переміщення на ньому оброблюваного матеріалу.

Для вирішення поставленого завдання приймемо наступні припущення.

1. Зерновий матеріал рухається як плоска частинка.
2. Опір повітря не чинить істотного впливу на рух матеріалу.
3. Коефіцієнт  $f$  опору переміщенню матеріалу не залежить від товщини його шару і кінематичних чинників.

На частинку масою  $m$ , розташованій на похилій площині  $AB$  (рис. 8.4), діють сила тяжіння  $G = mg$ , сила інерції  $P_j = mr\omega^2 \cos \omega t$ , реакція  $N$  і сила тертя  $F$ .



а – рух частинки вниз по площині; б – рух частинки вгору по площині

Рисунок 8.4 – Сили, які діють на частинку, що знаходиться на коливальній похилій площині

При положенні кривошипа т. С в III і IV чвертях зрушення частинки можливе вниз по площині, а при положенні в I і II чверті – вгору по площині.

Переміщення частинки вниз по площині буде в тому випадку, якщо результуюча проекція на площину всіх сил, що діють на частинку зліва направо, перевищуватиме силу тертя. Отже, умова переміщення матеріалу вниз по площині може бути записане у вигляді

$$G \sin \alpha + P_j \cos \varepsilon > F = fN = tg \varphi (G \cos \alpha - P_j \sin \varepsilon)$$

або

$$mg \sin \alpha + mj \cos \varepsilon > tg \varphi (mg \cos \alpha - mj \sin \varepsilon), \quad (8.1)$$

де  $\alpha$  – кут нахилу площини;  $\varepsilon$  – кут між площиною і напрямом коливань;  $\varphi$  – кут тертя частинок матеріалу об площину.

Провівши відповідні перетворення для «мертвих» положень площини, коли  $\cos \omega t = 1$ , отримаємо значення прискорення точок площини, що забезпечує ковзання частинок вниз

$$j_{BH} = \omega^2 r > g \sin(\varphi - \alpha) / \cos(\varphi - \varepsilon). \quad (8.2)$$

Умова переміщення матеріалу вгору площиною може бути представлена у вигляді

$$P_j \cos \varepsilon > G \sin \alpha + F$$

або

$$mj \cos \varepsilon > mg \sin \alpha + tg \varphi (mg \cos \alpha - mj \sin \varepsilon), \quad (8.3)$$

звідки після перетворень для «мертвих» положень площини знаходимо необхідне прискорення

$$j_{BB} = \omega^2 r > g \sin(\varphi + \alpha) / \cos(\varphi + \varepsilon). \quad (8.4)$$

Відрив частинки від площини можливий у тому випадку, коли сила інерції  $P_j$ , направлена зліва направо і реакція  $N = 0$ , тобто

$$N = mg \cos \alpha - mj \sin \varepsilon = 0, \quad (8.5)$$

звідки для тих же умов

$$j_0 = \omega^2 r > g \cos \alpha / \sin \varepsilon. \quad (8.6)$$

Узявши відношення  $k = \omega^2 r / g$ , що є показником кінематичного режиму, можна отримати наступні види руху частинки:

сумісний рух з площиною при

$$k_c < \sin(\varphi - \alpha) / \cos(\varphi - \varepsilon);$$

ковзання частинки вниз при

$$k_H > \sin(\varphi - \alpha) / \cos(\varphi - \varepsilon);$$

ковзання частинки не тільки вниз, але і вгору при

$$k_B > \sin(\varphi + \alpha) / \cos(\varphi + \varepsilon);$$

відривши частинки від площини при

$$k_0 > \cos \alpha / \sin \varepsilon.$$

Щоб зерновий матеріал здійснював рух по решету без відриву від

площини з ковзанням вгору і вниз, показник робочого кінематичного режиму  $k_p$  повинен знаходитися в співвідношенні

$$k_0 > k_p > k_B > k_H.$$

Кут тертя насіння зернових культур об сталь  $\varphi = 18...30^\circ$ . Кут нахилу решіт повинен бути менше, щоб не було ковзання матеріалу по решету, коли воно нерухоме.

### 8.3. Умови проходження зерен крізь отвори

Перша основна умова проходження зерен крізь отвори – підбір такого решета, у якого робочий розмір отворів (діаметр або ширина) більше відповідного розміру зерен.

Друга умова відноситься до швидкості переміщення зерен по решету. Кінематичний режим роботи решета повинен забезпечити таку швидкість руху частинок по ньому, яка не перевершувала б деякої межі. Швидкість відносного руху частинок повинна забезпечити можливість западання їх в отвори решета.

Розглянемо випадок проходження частинки діаметром  $2r$  крізь подовгастий отвір довжиною  $l$  решета, нахиленого під кутом  $\alpha$  до горизонту, що здійснює поздовжні коливання (рис. 8.5).

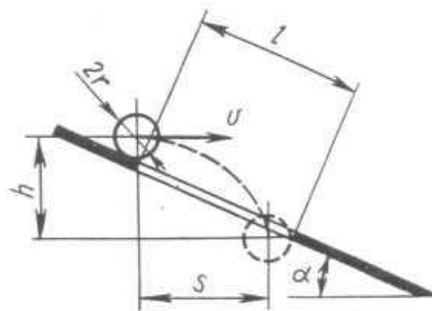


Рисунок 8.5 – До визначення умови проходження частинки крізь отвір

Вважаємо, що частинка рухається як тіло, кинуте з початковою швидкістю  $v$ . При малій швидкості і достатньо великій довжині отвору частинка встигне пройти крізь нього. При великій же швидкості і малій довжині отвору вона може в своєму польоті віддалитися настільки, що не потрапить в отвір або буде відкинута унаслідок зіткнення нижньою своєю частиною об протилежний край отвору.

Граничним випадком, коли ще можливе проходження частинки крізь отвір, буде такий її рух, при якому вона вдариться об край отвору точкою, що знаходиться на рівні центру тяжіння.

В цьому випадку, нехтуючи опором повітря і товщиною решета, можна записати два рівняння, що описують горизонтальне і вертикальне переміщення частинки

$$s = l \cos \alpha - r = vt,$$

$$h = l \sin \alpha + r = gt^2 / 2.$$

Вирішивши їх, знаходимо, що при заданих значеннях величини зерен, довжини отвору і кута нахилу решета відносна швидкість частинок, така, що забезпечує проходження їх крізь отвори, повинна бути

$$v \leq (l \cos \alpha - r) \sqrt{\frac{g}{2(l \sin \alpha + r)}}. \quad (8.7)$$

Звідси видно, що чим більше значення  $l$ , тим більшу швидкість  $v$  можна допускати. Із збільшенням величини зерен і нахилу решета необхідно відносну швидкість зменшувати.

При сортуванні пшениці відносна швидкість матеріалу на решеті зазвичай складає 0,35...0,45 м/с.

#### 8.4. Середня швидкість руху матеріалу по коливальній площині

Гармонічні коливання похилої площини решета, на якій знаходиться матеріальна точка, можуть характеризуватися рівняннями

$$v = r\omega \sin \omega t, \quad j = r\omega^2 \cos \omega t,$$

де  $v$  і  $j$  – швидкість і прискорення точок площини;  $r$  – радіус кривошипа механізму, що приводить площину в рух;  $\omega$  – кутова швидкість кривошипа;  $t$  – час, відлічуваний від початку руху площини (від її «мертвого» положення).

Побудуємо два графіки зміни  $v$  і  $j$  площини та матеріальної частинки (зерна), щоб наочно визначити інтервали, коли зерно рухатиметься вздовж решета і коли разом з ним.

По осі абсцис (рис. 8.6) відкладатимемо час  $t$ , виражаючи його через кути повороту кривошипа  $\theta$  і кутову швидкість  $\omega$ , а по осі ординат –  $v$  і  $j$ . Графік швидкості буде синусоїдою, максимум якої  $\omega r$  і повний період  $\omega t = 2\pi$ . Графік прискорення – косинусоїда з максимумом  $\omega^2 r$  і таким же періодом.

На графіку прискорення проведемо паралельні прямі  $f-f$  і  $f'-f'$ , віддалені від осі абсцис на відстані  $j_{BH}$  і  $j_{BV}$  (у прийнятому масштабі), визначених за (8.2) і (8.4). Зміна відносного прискорення зерна представиться різницею ординат косинусоїди і двох приведених прямих.

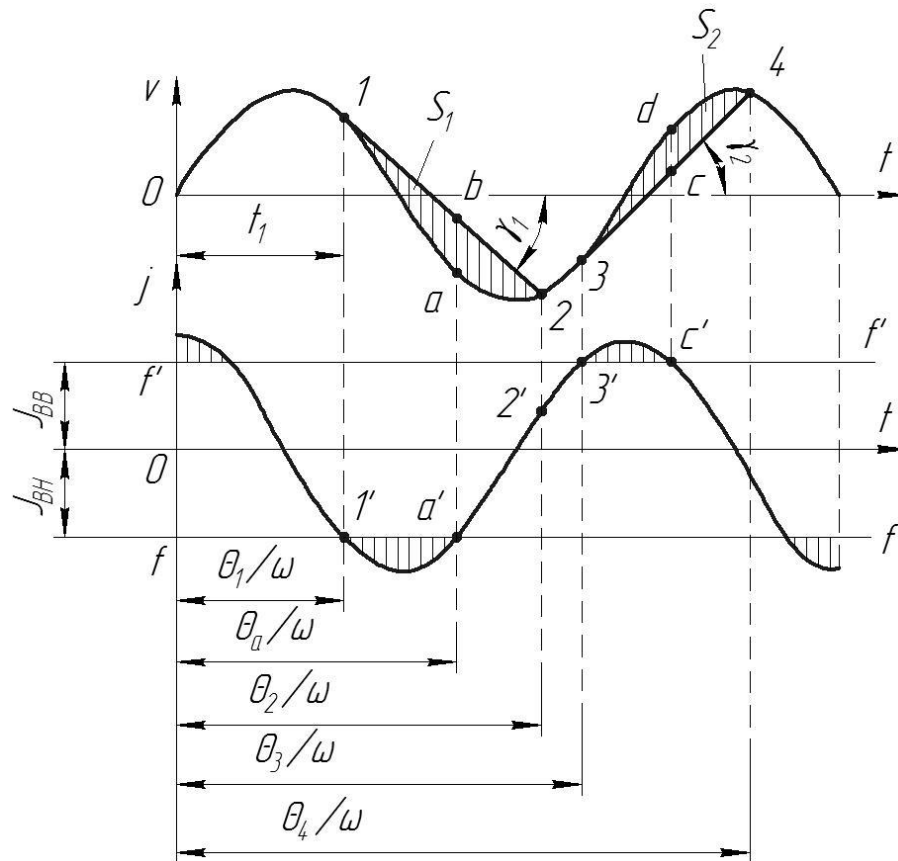


Рисунок 8.6 – Графік швидкостей і прискорень

В момент часу  $t_1 = \theta_1 / \omega$  частинка зрушуватиметься вниз по площині. При цьому швидкість площини визначиться ординатою синусоїди в точці 1. Представивши  $j_{BH}$  як першу похідну швидкості  $v$ , можемо провести в точці 1 дотичну до неї під кутом  $\gamma_1$ . При цьому

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = j_{BH} (M_t / M_v),$$

де  $M_t$  і  $M_v$  – прийняті масштаби часу і швидкості.

Пряма 1-2 характеризує зміну абсолютної швидкості частинки. Різниця ординат синусоїди і прямої показує в масштабі відносну швидкість руху. Максимальне її значення відповідає відрізку  $ab$ , що співпадає по вертикалі з точкою  $a'$ , де прискорення решета стає рівним  $j_{BH}$ .

До моменту часу  $t_2 = \theta_2 / \omega$  відносний зсув частинки вниз по решету



закінчиться, і до моменту часу  $t_3 = \theta_3 / \omega$  вона рухатиметься разом з решетою.

Відносний рух вгору по решету може початися у момент  $t_3 = \theta_3 / \omega$ , коли прискорення його досягне величини  $j_{BB}$ . У зв'язку з цим в точці 3 на графіку швидкостей проводимо дотичну 3-4 під кутом  $\gamma_2$ , визначаючи його за залежністю

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = j_{BB} (M_t / M_v).$$

Відносна швидкість руху вгору досягне найбільшого значення в момент  $t_c = \theta_c / \omega$  і визначиться відрізком  $cd$ .

До моменту  $t_4 = \theta_4 / \omega$  відносне переміщення частинки вгору завершиться, і вона знаходитиметься у відносному спокої.

Таким чином, за повний період коливань решета частинка в інтервалі від  $\theta_1 / \omega$  до  $\theta_2 / \omega$  зрушуватиметься вниз, в інтервалі від  $\theta_2 / \omega$  до  $\theta_3 / \omega$  – знаходитися у відносному спокої і в інтервалі від  $\theta_3 / \omega$  до  $\theta_4 / \omega$  – зрушуватися вгору по решету.

У разі, коли  $t_3 = \theta_3 / \omega < t_2 = \theta_2 / \omega$ , дотичну 3-4 слід проводити через точку 2, оскільки кінцева фаза зрушення вниз співпадає з початковою фазою зрушення вгору, тобто частинка переміщається на решеті вниз і вгору без зупинок.

Тут площі  $S_1$  і  $S_2$  в прийнятому масштабі. За різницею  $S_1 - S_2$  можна судити про абсолютне переміщення частинки за повний період коливань  $t = 2\pi / \omega$ .

Тому, визначивши за кресленням площі  $S_1$  і  $S_2$  і врахувавши масштаби  $M_t$  і  $M_v$ , знаходимо середню швидкість переміщення матеріалу на решеті

$$v_{cp} = \eta \frac{(S_1 - S_2) M_v M_t}{2\pi} \omega, \quad (8.8)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт, що враховує внутрішнє тертя вороху, зіткнення частинок і інші явища; його приймають рівним 0,4...0,7.

### **Перелік контрольних питань:**

1. Що розуміють під ефектом вібраційного переміщення?
2. В яких технологічних процесах застосовують вібраційне переміщення?
3. Навести приклади використання вібраційного транспорту у будівництві, машинобудуванні, сільськогосподарському виробництві, харчовій та гірничій промисловостях...
4. Принцип роботи вібраційного конвеєра.
5. Принцип роботи вібраційного сита.
6. Як працює вібраційний живильник?
7. Для чого використовують вібраційні бункери?
8. Як працює вібраційний насос?
9. Які є два основні типи вібротранспортування?
10. Робочий процес плоского решета.
11. Навести вирази кінематичних параметрів плоского решета.
12. Які припущення використовують при моделюванні вібраційного переміщення на плоскому решеті?
13. Які сили діють на частинку, що знаходиться на плоскому решеті?
14. Що є умовою зрушення частинки на плоскому решету вниз?
15. Що є умовою зрушення частинки на плоскому решету вверх?
16. Що є умовою відриву частинки від плоского решета?
17. Що таке кінематичний показник роботи плоского решета?
18. Які умови проходження зернини крізь отвір?

19. Граничний випадок, коли ще можливе проходження частинки крізь отвір.

20. Пояснити графіки швидкості та прискорення частинки, що знаходиться на плоскому решеті?

## **ТЕМА 9. ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ**

**Параметричними коливаннями** називаються коливання, при яких параметри, що характеризують коливальну систему, змінюються в процесі коливань. **Параметричними називають фізичні величини**, від яких залежить період вільних коливань. Для пружних коливань тіла, підвішеного на пружині, параметрами є коефіцієнт пружності пружини і маса тіла, для математичного маятника – довжина нитки маятника і прискорення вільного падіння.

### **9.1. Незатухаючі параметричні коливання**

**Незатухаючі параметричні коливання** виникають при періодичній зміні параметрів коливальної системи. Прикладом незатухаючих параметричних коливань є коливання математичного маятника при періодичній зміні довжини його нитки, рис. 9.1.

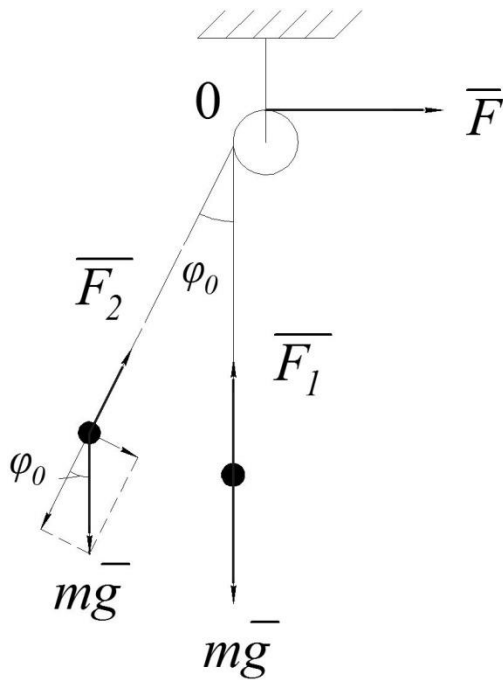


Рисунок 9.1

Закріпимо нерухомий блок 0 і пропустимо нитку підвісу маятника через нього (рис. 9.1). Діючи зовнішньою силою  $\vec{F}$  на нитку, можна змінювати довжину маятника. Припустимо, що при проходженні маятником положення рівноваги нитка маятника підтягується зовнішньою силою на невелику висоту  $h$  (малу в порівнянні з довжиною нитки), а в кожному крайньому положенні довжина нитки збільшується на таку ж величину  $h$ .

Таким чином, за період маятника довжина нитки буде двічі подовжена і двічі вкорочена, тобто, частота періодичної зміни параметра буде вдвічі більша частоти його власних коливань. При втягуванні нитки сила  $\vec{F}$  здійснює позитивну роботу, при збільшенні довжини нитки сила  $\vec{F}$  здійснює негативну роботу. Обчислимо роботу сили  $\vec{F}$  за період.

За кожне підтягування і опускання нитки зовнішня сила  $\vec{F}$  виробляє проти сили тяжіння роботу

$$W = mgh(1 - \cos \varphi_0).$$

При підтягуванні нитки за другим законом Ньютона для руху тіла по колу

$$F_1 - mg = \frac{m g_0^2}{\ell},$$

де  $\frac{g_0^2}{\ell}$  – нормальне прискорення,

$g_0$  – швидкість при проходженні положення рівноваги. Робота сили  $F_1 > 0$

$$W_1 = F_1 \cdot h, \quad W_1 = \left( mg + \frac{m g_0^2}{\ell} \right) h.$$

При опусканні нитки в крайніх положеннях доцентрове прискорення дорівнює нулю, так як швидкість дорівнює нулю, і в проекції на радіус

$$F_2 - mg \cos \varphi_0 = 0;$$

$$F_2 = mg \cos \varphi_0.$$

Якщо кут  $\varphi_0$  малий, то, розклавши  $\cos \varphi$  в ряд і обмежувчись першими двома складовими, отримаємо

$$\cos \varphi_0 \approx 1 - \frac{\varphi_0^2}{2}. \quad (9.1)$$

З урахуванням (9.1) можна записати

$$F_2 = mg \left( 1 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right).$$

Робота сили  $F$  в цьому випадку буде негативною  $W_2 = -F_2 h$ ;

$$W_2 = -mg \left( 1 - \frac{\varphi_0^2}{2} \right) h.$$

Повна робота за підйом і опускання  $W = W_1 + W_2$ .

$$W = mgh + \frac{m\mathcal{G}_0^2}{\ell} \cdot h - mgh + \frac{mg\varphi_0^2}{2} h = \left( \frac{m\mathcal{G}_0^2}{\ell} + \frac{mg\varphi_0^2}{2} \right) h.$$

Виразимо роботу через кінетичну енергію системи при проходженні положення рівноваги

$$W = \frac{m\mathcal{G}_0^2}{2} \left( \frac{2}{\ell} + \frac{g\varphi_0^2}{\mathcal{G}_0^2} \right) h.$$

Врахуємо, що  $\mathcal{G}_0 = \dot{\varphi}_{\max} \ell$ ;  $\dot{\varphi}_{\max} = \varphi_0 \omega$ ;  $\omega^2 = g / \ell$ , тоді  $\mathcal{G}_0 = \varphi_0 \sqrt{\frac{g}{\ell}} \ell$ .

$$W = \frac{m\mathcal{G}_0^2}{2} \left( \frac{2}{\ell} + \frac{g\varphi_0^2}{\mathcal{G}_0^2} \right) h = \frac{m\mathcal{G}_0^2}{2} \left( \frac{2}{\ell} + \frac{1}{\ell} \right) h = \frac{3h}{\ell} \frac{m\mathcal{G}_0^2}{2}.$$

Робота за період буде дорівнювати  $W_T = 2W$

$$W_T = \frac{6h}{\ell} \frac{m\mathcal{G}_0^2}{2}.$$

Відповідно, робота, вироблена зовнішньою силою за період, буде позитивною і пропорційною енергії маятника. Тому енергія маятника і амплітуда коливань маятника зростають. Це явище по аналогії з вимушеними коливаннями називається резонансом.

Запишемо

$$\frac{dE}{dt} = 2\beta E, \quad \beta = \frac{3h}{\ell},$$

де  $\beta$  – коефіцієнт підсилення, величина мала і постійна. Це співвідношення такого ж виду, як і при затухаючих коливаннях, але на відміну від них воно  $> 0$ . Отже, амплітуда буде зростати з часом за експоненціальним законом. Всі ці міркування проводилися без врахування сили опору. Але в дійсності існує сила опору, що викликає затухання коливань. Тому коефіцієнт підсилення  $\beta$  повинен перевершувати деяке мінімальне значення, рівне коефіцієнту затухання.

Класичним прикладом параметричних коливань є розгойдування на гойдалці. Якщо людина, що гойдається на гойдалці, присідає в крайніх положеннях і випрямляється в середньому положенні, то її момент інерції буде змінюватися, тобто буде змінюватися параметр, що характеризує коливання фізичного маятника з частотою, рівній подвоєній частоті власного фізичного маятника, і амплітуда коливань буде зростати.

## 9.2. Рівняння Матьє. Діаграма Айнса – Стретта

Параметричні коливання часто зустрічаються в завданнях динаміки механізмів і машин. Вал, перетин якого має різні жорсткості при вигині, може мати незатухаючі поперечні коливання при обертанні навіть у тому випадку, коли він повністю зрівноважений. Прикладом системи з приведеною масою, що періодично змінюється, служить шатуново-кривошипний механізм.

У більшості випадків диференціальне рівняння параметричних коливань можна привести до стандартної форми (рівняння Матьє)

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (\alpha - 2\beta \cos 2\tau)x = 0, \quad (9.2)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – деякі постійні.

Вирішеннями рівняння (9.2) служать спеціальні функції, які називають функціями Матьє, властивості яких детально вивчені. Ці рішення можуть бути обмеженими по амплітуді коливань, або що необмежено зростають (випадок параметричного резонансу). Виділення відповідних цим випадкам областей  $\alpha$  і  $\beta$  приводить до діаграми стійкості Айнса – Стретта, що показано на рис. 9.2.

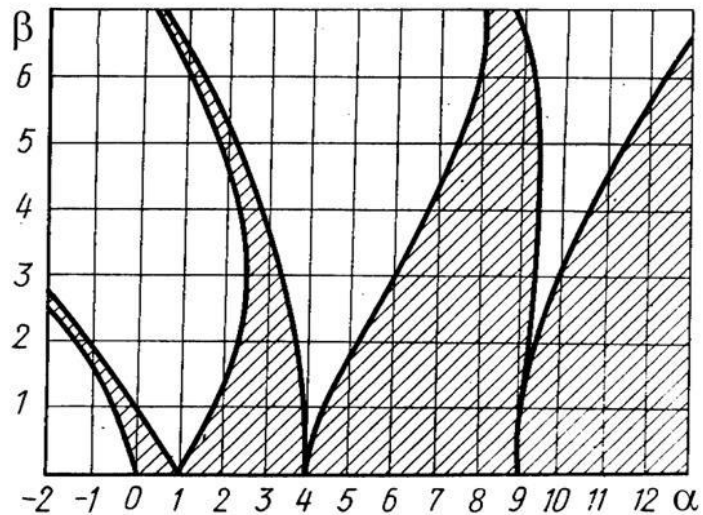


Рисунок 9.2

Кожній такій системі, що описується рівнянням (9.2), відповідає точка з координатами  $\alpha$ ,  $\beta$  на діаграмі. Якщо точка знаходиться в межах заштрихованих полів діаграми, то система стійка; нестійким системам відповідають точки, розташовані на білих полях.

У разі в'язкого тертя межі області нестійкості декілька звужуються.

Діаграма Айнса-Стретта повністю звільняє від виконання яких-небудь операцій за рішенням рівняння Матьє. Досить скласти це рівняння, тобто знайти значення параметрів системи  $\alpha$  і  $\beta$ , після чого діаграма відразу дасть відповідь на питання про стійкість або нестійкість системи.

Рівняння, що описують перші чотири області нестійкості, мають вигляд



$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{7}{128}\beta^4 - \dots, \\
\alpha_2 &= 1 - \beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \frac{1}{64}\beta^3 - \frac{1}{1536}\beta^4 - \dots, \\
\alpha_3 &= 1 + \beta - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{64}\beta^3 - \frac{1}{1536}\beta^4 - \dots, \\
\alpha_4 &= 4 - \frac{1}{12}\beta^2 + \frac{5}{13824}\beta^4 - \dots, \\
\alpha_5 &= 4 - \frac{5}{12}\beta^2 + \frac{763}{13824}\beta^4 - \dots, \\
\alpha_6 &= 9 + \frac{1}{16}\beta^2 - \frac{1}{64}\beta^3 + \frac{13}{20480}\beta^4 \dots, \\
\alpha_7 &= 9 + \frac{1}{16}\beta^2 + \frac{1}{64}\beta^3 + \frac{13}{20480}\beta^4 \dots
\end{aligned}
\tag{9.3}$$

### 9.3. Коливання оберненого маятника

Як приклад визначимо умови стійкості вертикального стану рівноваги оберненого маятника (рис. 9.3), якщо точка його підвісу коливається біля середнього положення згідно із законом  $y = A \cos \omega t$  з частотою  $\omega$  і амплітудою  $A$ .

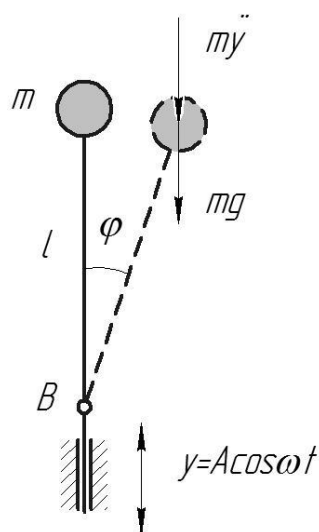


Рисунок 9.3

Для запису диференціального рівняння руху скористаємося зворотним методом. Приймаючи за узагальнену координату кут  $\varphi$  відхилення маятника, з умови рівноваги ( $M_B=0$ ) отримаємо

$$J\ddot{\varphi} - mgl\varphi - m\ddot{y}l\varphi = 0, \quad (9.4)$$

де  $J = ml^2$  – момент інерції маятника відносно точки  $B$ ;  $g$  – прискорення вільного падіння  $\ddot{y} = -A\omega^2 \cos\omega t$ .

Перепишемо рівність (9.4) у вигляді

$$\ddot{\varphi} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{A\omega^2}{l} \cos\omega t\right)\varphi = 0. \quad (9.5)$$

Для приведення рівняння (9.5) до вигляду (9.2) підставимо

$$2\tau = \omega t, \quad \alpha = -\frac{4g}{\omega^2 l}, \quad \beta = -\frac{2A}{l}.$$

Як видно, обидва параметри  $\alpha$  і  $\beta$  негативні. Через симетрію діаграми Айнса-Стретта, знак  $\beta$  ролі не грає. При негативному значенні, як це впливає з діаграми, можливі стійкі стани системи (вертикальне положення маятника). Природно маятник нестійкий за відсутності коливань точки підвісу. Відповідно до (9.3) умова стійкості виконується, якщо параметр  $\alpha$  знаходиться в інтервалі

$$-\frac{1}{2}\beta^2 \leq \alpha \leq 1 - \beta - \frac{1}{8}\beta^2.$$

При малих амплітудах коливань  $A$ ,  $\beta$  права нерівність задовольняється при будь-яких негативних значеннях  $\alpha$  і практично залишається лише одна нерівність

$$\alpha \geq -\frac{1}{2}\beta^2 \quad \text{або} \quad \frac{4g}{\omega^2 l} \geq \frac{2A^2}{l^2}.$$

Перепишемо умову стійкості у вигляді

$$A\omega \geq \sqrt{2gl}.$$

Цю нерівність визначає нижня межа швидкості  $A\omega$  коливань точки підвісу, яка забезпечує стійкість перекинутого маятника. Як видно, вказана швидкість повинна перевищувати швидкість вільного падіння тіла з висоти, рівній довжині маятника.

#### **9.4. Параметричні коливання в приводі кривошипно-шатунного механізму**

Як інший приклад розглянемо параметричні коливання в приводі ріжучого апарату жниварки.

У більшості збиральних машин привод ножа ріжучого апарату здійснюється кривошипно-шатунним механізмом. Схема механізму приводу ріжучого апарату жниварки показана на рис. 9.4, а. Особливістю кривошипно-шатунних механізмів приводу ножа є наявність дезаксіала  $h$  (рис. 9.4, в), тобто зміщення осі кривошипного валу щодо лінії руху ножа. Для комбайнів і жаток  $h=(1\dots 2)r$ ; для косарок  $h=(7\dots 8)r$ . Довжина шатуна  $L=(9\dots 10)r$  для жаток і комбайнів і  $L=(15\dots 25)r$  – у косарок.

Динамічну модель для розрахунку валу приводу можна представити у вигляді системи з двома ступенями вільності (рис. 9.4, б). Тут  $J_m$  – приведений момент інерції приводу,  $J_n$  – приведений момент інерції шатуна і ножа,  $c$  – крутильна жорсткість валу.

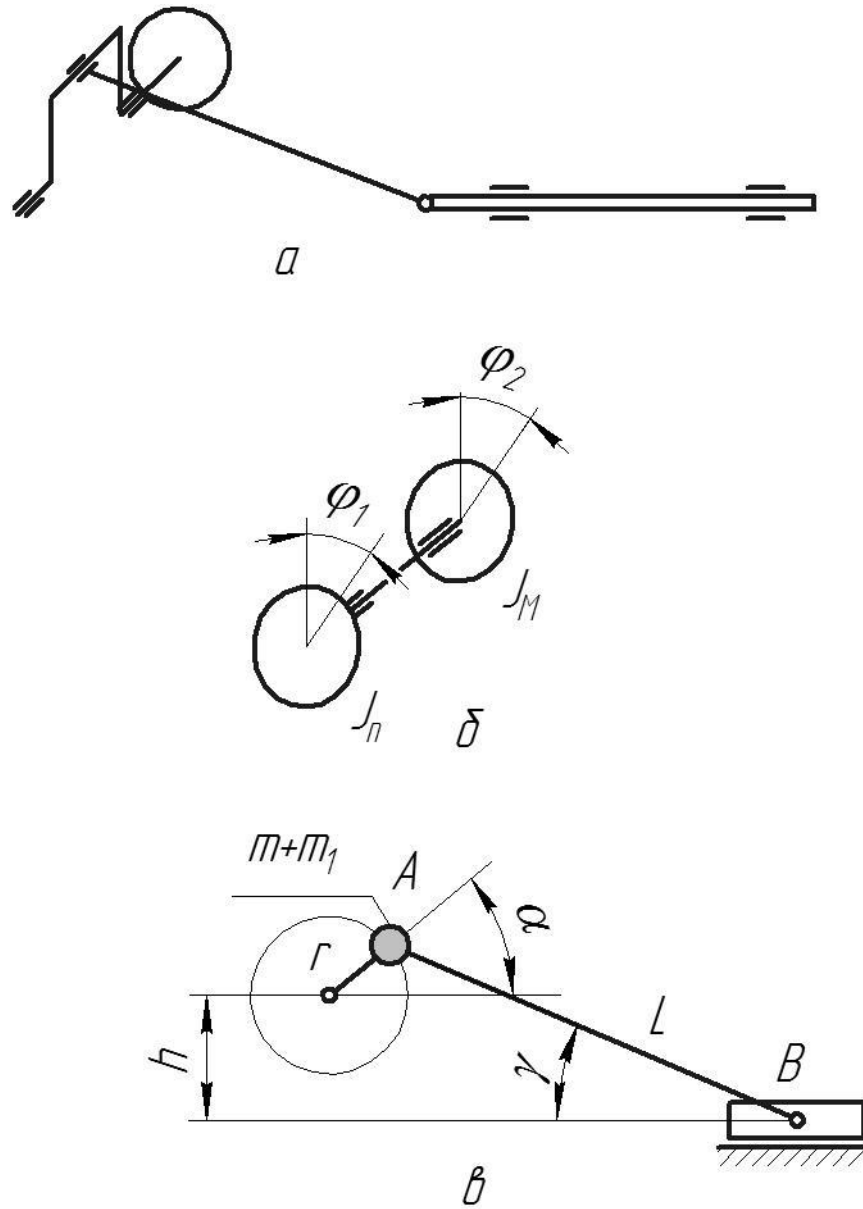


Рисунок 9.4

Приймаючи за узагальнені координати кути повороту дисків, запишемо рівняння руху у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_1 + \frac{c}{J_n}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\
 \ddot{\varphi}_2 - \frac{c}{J_m}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{9.6}$$

Отриману систему рівнянь можна звести до одного рівняння, якщо виключити обертання системи як жорсткого цілого. З цією метою віднімемо з першого рівняння друге і введемо відносний кут повороту дисків  $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$

$$\ddot{\theta} + \frac{c(J_M + J_n)}{J_M J_n} \theta = 0. \quad (9.7)$$

Як відомо, що в кривошипно-шатунному механізмі приведений момент інерції  $J_n$  залежить від положення кривошипа. Ця обставина може привести до параметричних коливань в приводі.

Величину приведенного моменту інерції визначимо з умови кінетичної еквівалентності моделі (рис. 9.4, б) і реального об'єкту (рис. 9.4, в).

Масу шатуна замінимо двома масами, з яких одна  $m_1$  обертається разом з кривошипом з масою  $m$ , а інша  $m_2$  рухається разом з ножем  $m_n$ . Швидкість ножа легко визначити, знаючи швидкість руху точки  $A$  кривошипа

$$v_B = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\cos \gamma} v_A = (\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma + \sin \alpha) v_A.$$

Величину кута  $\gamma$ , як видно з рис. 9.4, в, можна визначити за формулою

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{h + r \sin \alpha}{L}\right).$$

Результати розрахунку, приведені на рис. 9.5, показують, що при заданих значеннях дезаксіала  $h$  і довжини шатуна  $L$ , без великої похибки можна прийняти  $v_B \approx v_A \sin \alpha$ .

$$r := 0.2 \quad L := 10 \cdot r \quad h := 2 \cdot r \quad A(\alpha) := a \sin\left(\frac{h + r \cdot \sin(\alpha)}{L}\right)$$

$$B(\alpha) := \cos(\alpha) \cdot \tan(A(\alpha)) \quad C(\alpha) := B(\alpha) + \sin(\alpha)$$

$$\alpha := 0, 0.1 \dots 2 \cdot \pi$$

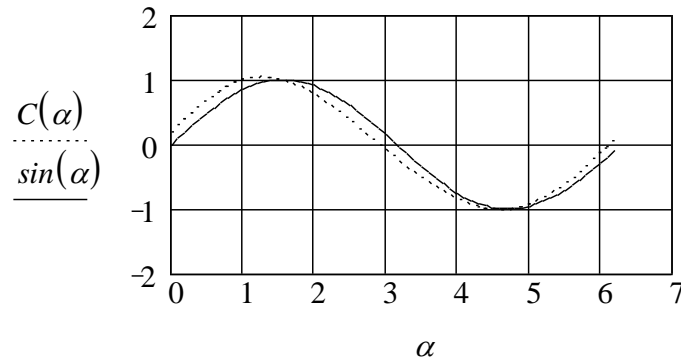


Рисунок 9.5

Умова кінетичної еквівалентності тоді запишеться у вигляді

$$\frac{m_n v_A^2}{2} = \frac{(m + m_1) v_A^2}{2} + \frac{(m_n + m_2) v_A^2 \sin^2 \alpha}{2}.$$

Помноживши цей вираз на  $r^2$ , а, також враховуючи, що  $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$ , отримаємо

$$J_n = (m + m_1) r^2 + (m_n + m_2) r^2 (1 - \cos 2\alpha) / 2.$$

Підставляючи отриманий вираз в рівняння (9.7) отримаємо

$$\ddot{\theta} + c \left\{ \frac{1}{J_m} + \frac{1}{J_0 \left[ 1 - \frac{(m_n + m_2) r^2}{2J_0} \cos 2\omega t \right]} \right\} \theta = 0, \quad (9.8)$$

де  $J_0 = (m + m_1) r^2 + (m_n + m_2) r^2 / 2$  ( $\alpha = \omega t$ ) – середнє значення приведенного моменту інерції.

З огляду на те, що  $\frac{(m_n + m_2)r^2}{2J_0} \ll 1$ , допустимо прийняти

$$\frac{1}{1 - \frac{(m_n + m_2)r^2}{2J_0} \cos 2\omega t} \approx 1 + \frac{(m_n + m_2)r^2}{2J_0} \cos 2\omega t.$$

Тоді рівняння (9.8) прийме вигляд

$$\ddot{\theta} + c \left[ \frac{1}{J_m} + \frac{1}{J_0} + \frac{(m_n + m_2)r^2}{2J_0^2} \cos 2\omega t \right] \theta = 0. \quad (9.9)$$

Для визначення областей параметричного резонансу потрібно представити цей вираз в стандартному вигляді

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (\alpha - 2\beta \cos 2\tau)\theta = 0.$$

Вважаючи  $\omega t = \tau$ , з рівняння (9.9) визначаємо коефіцієнти рівняння Матьє

$$\alpha = \frac{c(J_0 + J_m)}{J_0 J_m \omega^2}, \quad \beta = \frac{c(m_n + m_2)r^2}{4J_0^2 \omega^2} \quad (9.10)$$

Простежимо за поведінкою розглянутої коливальної системи залежно від частоти обертання кривошипа. Із зростанням частоти обидва параметри  $\alpha$  і  $\beta$  пропорційно зменшуються. Оскільки відношення обох параметрів залишається постійним, і рівним

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(m_n + m_2)r^2 J_m}{4J_0(J_0 + J_m)}, \quad (9.11)$$

то послідовні стани системи визначаються точками, які зображають, на промені  $\beta = k\alpha$ , що проходить через початок координат (рис. 9.6).

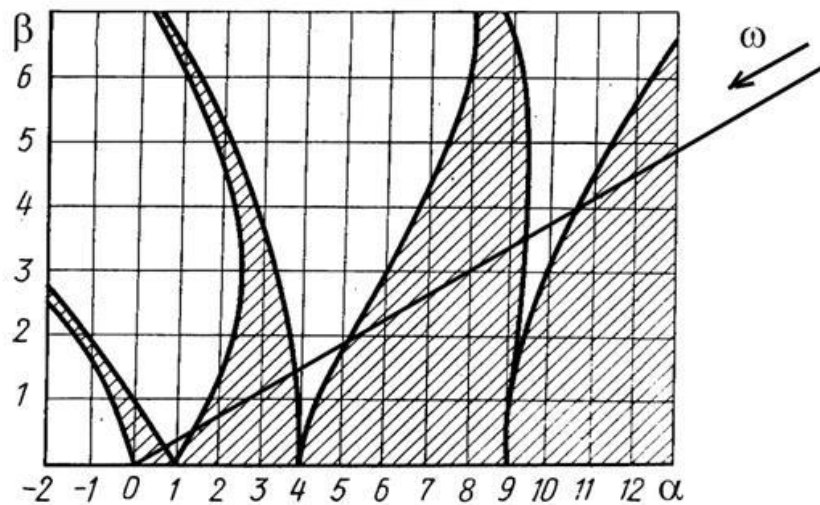


Рисунок 9.6

Як видно з рисунка, параметричні резонанси можливі. Частота обертання приводу ріжучого апарату залежить від швидкості руху машини і може варіюватися в широких межах. Отже, необхідний підбір величин, що входять у вирази (9.10) так, щоб не потрапити в зони нестійкості діаграми на всіх режимах роботи машини.

### 9.5. Стійкість коливальної системи

Визначення умов рівноважного стану різних систем відіграє дуже велику роль на практиці. Системи, для яких визначаються умови рівноваги, можуть бути дуже складними, наприклад, інженерні споруди або рухомий транспорт. Вихід систем зі стану рівноваги найчастіше пов'язаний з виникненням коливального руху. Розглянемо умови рівноваги для простих коливальних систем, коливальні рухи яких описуються однаковими диференціальними рівняннями. Для таких систем існують два види рівноваги – стійкий і нестійкий. Якщо система знаходиться в стійкому стані рівноваги, то при



виведенні її з положення рівноваги виникнуть сили або моменти сил, які повертають систему в положення рівноваги. На рис. 9.7 показано стійке становище рівноваги кульки: а) на легкому стержні, б) на увігнутій поверхні.

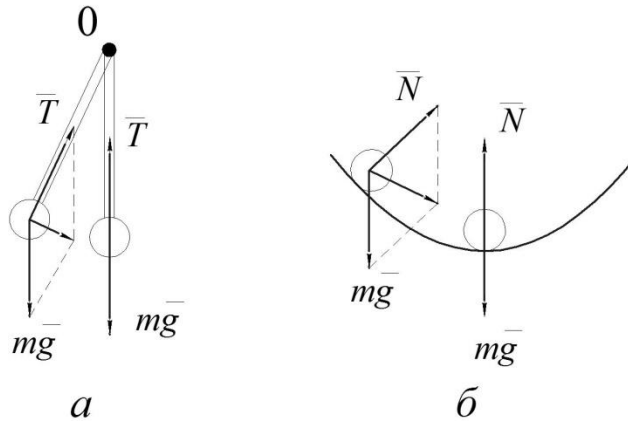


Рисунок 9.7

Якщо система виходить з положення рівноваги і виникають сили або моменти сил, які рухають систему від положення рівноваги, то такий стан рівноваги називається нестійким. На рис. 9.8 показано нестійке положення рівноваги кульки: а) на легкому стержні, б) на вигнутій поверхні. При цьому необхідно враховувати, що відхилення систем від положення рівноваги не повинні перевищувати визначених значень.

На практиці здійснюються як стійкі положення рівноваги, так і нестійкі. Відомі випадки, коли в цілях забезпечення важливих динамічних характеристик (наприклад, підвищеної маневреності судна або літака) допускають нестійкість основного стаціонарного режиму, який стабілізується відповідною системою управління їх рухом.

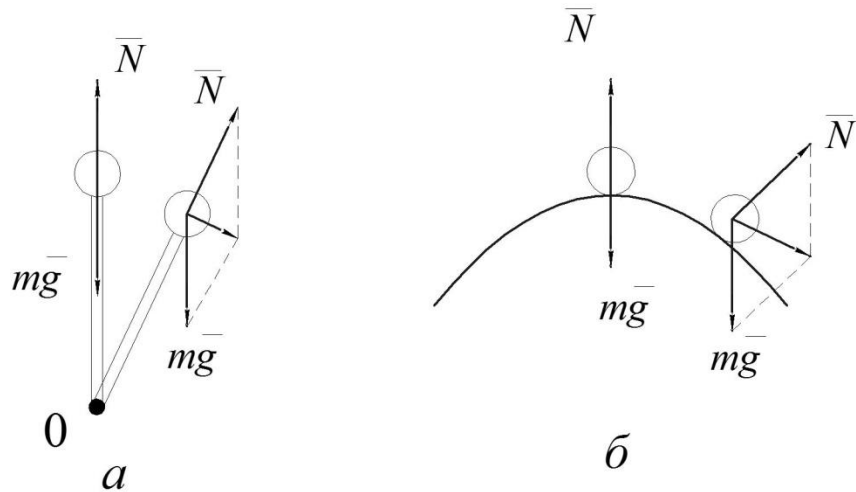


Рисунок 9.8

Дослідження стійкості стану рівноваги зручно розглядати, використовуючи метод фазових траєкторій. Розглянемо докладніше фазові траєкторії для різних видів коливань:

а) вільні незатухаючі коливання. Фазові траєкторії – це кола (рис. 9.9), радіус яких залежить від вибору початкових умов, вони описуються

диференціальними рівняннями виду  $x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 = A^2$ .

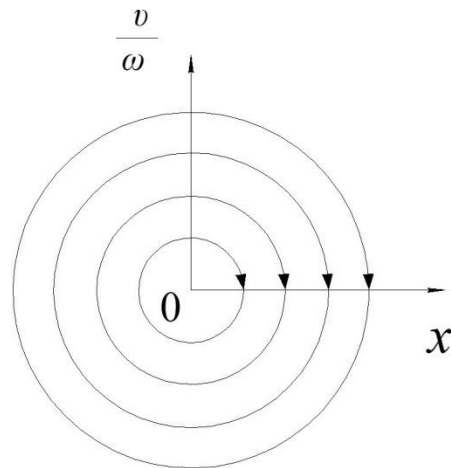


Рисунок 9.9

Точка 0 є особливою точкою. Через неї не проходить жодна з фазових траєкторій, але вона є спільною для всіх фазових траєкторій. Ця точка  $x=0$ ,  $\mathcal{G}=0$  є особливою точкою і для диференціального рівняння. Така точка називається центром. Вона відповідає стану рівноваги.

$$\frac{dx}{dt} = 0; \vartheta = 0; \frac{d\vartheta}{dt} = 0; \text{ тобто } F = 0;$$

б) вільні затухаючі коливання при малих коефіцієнтах затухання, які описуються диференціальним рівнянням (9.4). Фазові траєкторії мають форму спіралей, що мають асимптотичну точку на початку координат. Максимальні значення зменшуються від оберту до оберту. Точка 0 теж особлива точка, але вона загальна для всіх фазових траєкторій і відповідає стану стійкої рівноваги. Особлива точка, яка є асимптотичною точкою всіх фазових спіралей, вкладених одна в одну, називається фокусом (точка 0 - фокус, рис. 9.10, а).

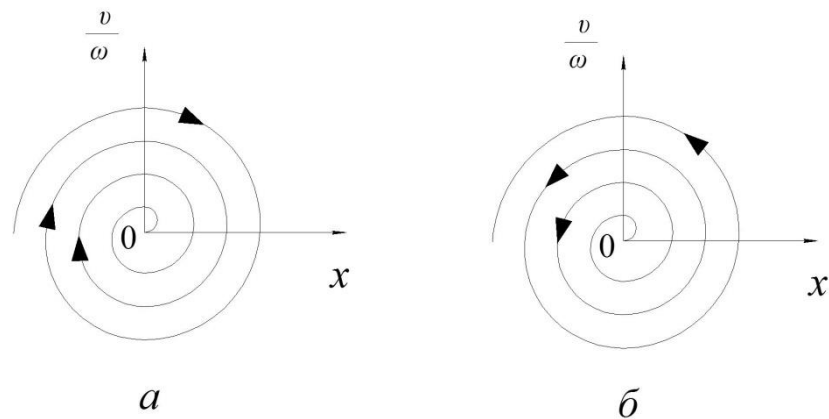


Рисунок 9.10

Стійкість особливої точки типу фокуса пов'язана з тим, що спіраль закручується по напрямку руху. Якби спіраль розкручувалася (рис. 9.10, б), то напрямок руху мав б змінитися на протилежний. В цьому випадку особлива точка типу фокуса описує нестійкий стан. Для цього в диференціальному рівнянні для затухаючих коливань знак плюс треба змінити на знак мінус перед  $2\gamma, \gamma < 0$ .

Стійкість пов'язана з втратою енергії, тобто сила тертя перешкоджає руху, а нестійкість – зі збільшенням енергії.

Таким чином, особлива точка типу фокуса, взагалі кажучи, може бути як стійкою, так і нестійкою, на відміну від особливої точки типу центра, яка завжди стійка;

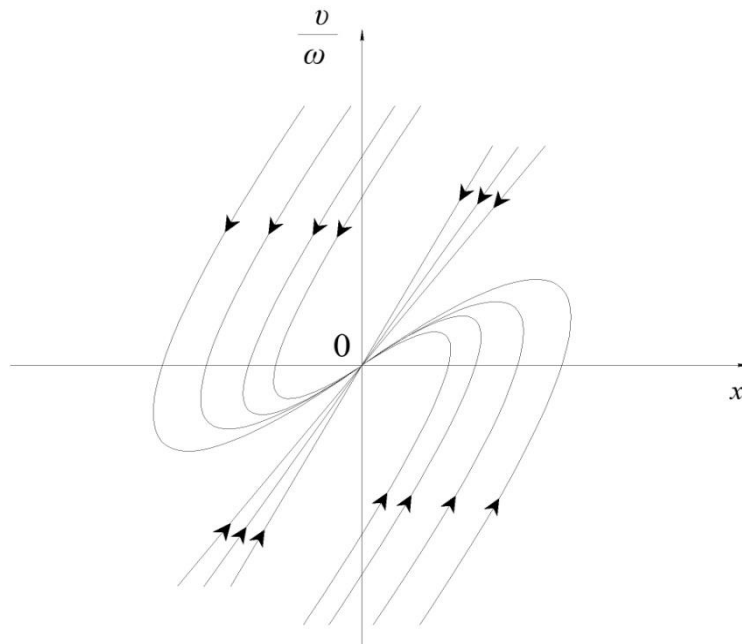


Рисунок 9.11

в) затухаючі негармонічні аперіодичні рухи при великих коефіцієнтах затухання  $\gamma$ . Фазові траєкторії мають параболічну форму (рис. 9.11).

Всі фазові траєкторії проходять через одну особливу точку  $0$ , яка називається вузлом. Такий вузол називається стійким, так як коливальна система приходить до стану рівноваги.

Якщо так само, як і в попередньому випадку, змінити напрямок на протилежний, то коливальна система буде прагнути уникнути положення рівноваги, це буде, якщо  $\mu < 1$  і, відповідно,  $\gamma < 0$ ;

г) введемо ще одну особливу точку. Розглянемо маятник на легкому стержні, що знаходиться в стані нестійкої рівноваги (рис. 9.12). Припустимо, що тертя в маятнику відсутнє. Якщо кут  $\varphi$  відраховувати від верхнього положення рівноваги, то рівняння руху маятника буде

$$m\ell\ddot{\varphi} = mg \sin \varphi.$$

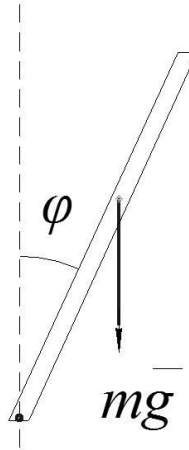


Рисунок 9.12

Обмежимося областю, близькою до положення рівноваги,  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \varphi = 0. \tag{9.12}$$

Рівняння (9.12) – лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Воно аналогічне рівнянню:

$$m\ddot{x} - kx = 0, \quad m > 0 \text{ або } k > 0 \rightarrow \ddot{x} - \frac{k}{m}x = 0, \quad m > 0, \quad k > 0.$$

Знайдемо рівняння для фазової траєкторії

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{k}{m}x,$$

виключимо  $dt$  і отримаємо рівняння

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{k}{m} \frac{x}{\vartheta} \rightarrow \vartheta d\vartheta = \frac{k}{m} x dx. \tag{9.13}$$

Стан рівноваги в цій системі тільки один:  $x=0$ ,  $\mathcal{G}=0$ . Щоб отримати траєкторію точки на фазовій площині, проінтегруємо рівняння (9.13). Отримаємо

$$\mathcal{G}^2 = \frac{k}{m} x^2 + c \quad \text{або} \quad \frac{\mathcal{G}^2}{k} - \frac{x^2}{m} = c.$$

Це сімейство рівносторонніх гіпербол (рис. 9.13), віднесене до головних осей. При  $c=0$  виходять дві асимптоти цього сімейства. Це прямі, які проходять через початок координат,

$$\mathcal{G} = -\sqrt{\frac{k}{m}} x \quad \text{і} \quad \mathcal{G} = \sqrt{\frac{k}{m}} x.$$

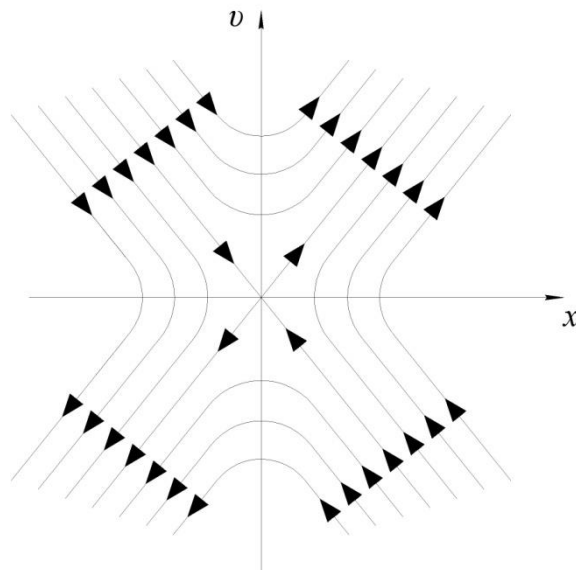


Рисунок 9.13

Початок координат є єдиною особливою точкою фазових траєкторій. Гіперболи не проходять через початок координат. Така особлива точка, через яку проходять тільки дві прямі, які є асимптотами, а решта траєкторії через неї не проходять, називається особливою точкою типу сідла. При позитивній швидкості координата системи повинна зростати, а при негативній – спадати.

Розглядаючи напрямки руху точки, легко переконатися, де б не знаходилася точка в початковий момент (за винятком особливої точки і точок на асимптоті  $\vartheta = -\sqrt{k/mx}$ , що проходить через 2 і 4 квадранти), вона завжди в кінцевому рахунку буде віддалятися від стану рівноваги, причому рух її буде не коливальним, а аперіодичним. Отже, стан рівноваги буде нестійким.

### Перелік контрольних питань:

1. Які коливання називають параметричними?
2. Які фізичні величини називають параметричними?
3. Навести приклади параметричних коливань?
4. Коли виникають незатухаючі параметричні коливання?
5. Навести приклад незатухаючих параметричних коливань.
6. Диференціальне рівняння параметричних коливань у формі рівняння Мат'є.  
7. З якою метою використовують діаграму стійкості Айнса – Стретта?  
8. Пояснити діаграму стійкості Айнса – Стретта.  
9. Що таке обернений маятник?  
10. Диференціальне рівняння оберненого маятника.  
11. Параметричні коливання в приводі кривошипно-шатунного механізму.  
12. Що таке дезаксіал в кривошипно-шатунному механізмі?  
13. Співвідношення величини дезаксіалу та радіуса кривошипа для різних типів збиральних машин.  
14. Що розуміють під стійкістю коливальної системи?  
15. Навести схематичний приклад системи в стані стійкої рівноваги.  
16. Що таке нестійке положення рівноваги?  
17. Навести приклад системи, що перебуває в нестійкій рівновазі.

## ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Andreykiv O., Babii A., Dolinska I., Yadzhak N., Babii M. Residual lifetime prediction of field sprayer booms under the action of manoeuvre loading and corrosive environment. *Procedia Structural Integrity*. Volume 36, 2022, Pages 36-42.
2. Andrii Babii, Taras Dovbush, Nadiia Khomuk, Anatolii Dovbush, Anna Tson, Vasyl Oleksyuk, 2022. Mathematical model of a loaded supporting frame of a solid fertilizers distributor. *Procedia Structural Integrity*. No 36, .203-210.
3. Babii A. (2019) Parameters investigation for independent pendular suspension of sprayer boom. *Scientific Journal of TNTU (Tern.)*, vol 96, no 4, pp. 90–100.
4. Babii A. (2020) Important aspects of the experimental research methodology / Andrii Babii // *Scientific Journal of TNTU*. Tern. : TNTU, 2020. Vol 97. No 1. P. 77–87.
5. Babii A. (2020) Study of the efficiency of working mixture application in chemical crop protection / Andrii Babii // *Scientific Journal of TNTU*. Tern. : TNTU, 2020. Vol 98. No 2. P. 99–109.
6. Babii A., Babii M. (2019) Taking impact of oscillation amplitude of bearing frame sections of boom sprayers into account on its resource. *Scientific Journal of TNTU (Tern.)*, vol. 95, no 3, pp. 97-104.
7. Hevko R., Stashkiv M., Lyashuk O., Vovk Y., Oleksyuk V., Tson O., Bortnyk I. Investigation of internal efforts in the components of the crop sprayer boom section. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*. Volume 105, Issue 1 (2021), 33 – 41.
8. Improving the efficiency of a sowing technology based on the improved structural parameters for colters / Alexander Nanka, Ivan Morozov, Vladimir Morozov, Mykola Krekot, Anatolii Poliakov, Ivan Kiralhazi, Mykhailo Lohvynenko, Konstantin Sharai, Andriy Babiy, Mykola Stashkiv // *Eastern-European Journal of*



*Enterprise Technologies*. VOL 4, NO 1 (100) (2019) Engineering Technological Systems. pp. 33 – 45.

9. Leshchak, R.L., Babii, A.V., Barna, R.A. *et al.* Corrosion Resistance of the Coating of the Frame of an Agricultural Sprayer Boom. *Mater Sci* 58, 2022. 268–273.

10. Mykola Stashkiv, Iaroslav Lytvynenko, Viktor Stashkiv (2022). Test Data Processing Use for Structural Fatigue Life Assessment. *The 2st International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems 2022 (ITTAP 2022)*. Vol.3309. 241-258.

11. Nanka, A., Morozov, I., Morozov, V., Krekot, M., Poliakov, A., Kiralhazi, I., Lohvynenko, M., Ryndiaiev, V., Dyakonov, S., & Stashkiv, M. (2021). Substantiation of the presence and parameters of seed guides in the openers, which increase the quality of sowing and yield. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 4, №. 1 (112), 61–75.

12. Pidgurskyi I., Stashkiv M., Pidgurskyi M., Rudyak Yu., Ripetskyi Ye., Ripetskyi R., Lazaryuk V. (2022) *Prediction of residual durability of structural elements with identical surface cracks taking into account the stage of their coalescence*. Procedia Structural Integrity. 1st Virtual International Conference “In service Damage of Materials: Diagnostics and Prediction”. Vol. 36 (2022), 190–196.

13. Pidgurskyi I., Yasniy P., Pidgurskyi M., Baranovsky V., Shelestovskii B., Stashkiv M. (2022) *Mathematical model for estimating SIF  $K_I$  during coalescence of two identical surface cracks*. Procedia Structural Integrity. 1st Virtual International Conference “In service Damage of Materials: Diagnostics and Prediction”. Vol. 36 (2022), 171–176.

14. Rybak T. I., Babii A.V., Bortnyk I. M., Tsion G. B., and Konovalenko S. I. Estimation of resource of frame steel sections of barbell field sprinklers // *Materials Science*. 2019. 55, No 6. P. 68–74.

15. Stashkiv, Mykola & Matsiuk, Oleksandr (2021) nCode GlyphWorks Software Use for Test Data Processing. *The 1st International Workshop on Information Technologies: Theoretical and Applied Problems 2021 (ITTAP 2021)*. Vol-3039. 192-205.

16. The tribology of the car: Research methodology and evaluation criteria / Oleg Lyashuk, Andrii Gupka, Yuriy Pyndus, Vasily Gupka, Mariia Sipravska, Mykola Stashkiv // *ICCPT 2019: Current Problems of Transport: Proceedings of the 1st International Scientific Conference*, May 28-29, 2019, Ternopil, Ukraine, pp. 231-237.

17. Бабий А., Бабий М., Рыбак Т. Математическая модель нагрузки привода режущего аппарата косилки. *Motrol*, 2014. Commission of motorization and energetics in agriculture. Lublin. Vol. 16, No 4. С.275–284.

18. Бабий А., Бабий М. Дослідження міцності елементів конструкції функціонально–транспортуючих мобільних засобів. *Науковий журнал «Інженерія природокористування*, 2019. №3 (13) С. 87–91.

19. Бабий А.В. Аналіз параметрів штангового обприскувача з метою збільшення його продуктивності. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. Kyiv. Ukraine, 2019. Vol. 10. No. 4. С. 51–55.

20. Бабий А.В. Приводний механізм косарки сегментно-пальцевої. Деклараційний патент на корисну модель 61217, А01D 34/00, заявлено 29.12.2010, опубліковано 11.07.2011. Бюлетень № 13.

21. Бабий А.В., Андрейків О.Є. Підвіска штанги обприскувача. Деклараційний патент на корисну модель 1436292. А01М 7/00 (2020.01), заявлено 27.01.2020, опубліковано 10.08.2020. Бюлетень № 15.

22. Бабий А.В., Андрейків О.Є. Підвіска штанги обприскувача. Деклараційний патент на корисну модель 145916, А01М 7/00 (2020.01), заявлено 25.08.2020, опубліковано 06.01.2021. Бюлетень № 1/2021.

23. Бабий А.В., Бабий М.В. Динамічна модель енергозберігаючого приводного механізму косарки. *Вісник ХНТУСГ*. Випуск 145. “Проблеми надійності машин та засобів механізації сільськогосподарського виробництва”. Харків, 2014. С.112–118.

24. Бабий А.В., Бабий М.В. Дослідження впливу конструкторсько–технологічних факторів на запас міцності спинки ножа косарки. *Вісник ХНТУСГ*. Випуск 139. “Проблеми надійності машин та засобів механізації

сілськогосподарського виробництва”. Харків, 2013. С.187–192.

25. Бабій А.В., Бабій М.В. Привідний механізм косарки. Деклараційний патент на корисну модель 92982, А01D 34/00 (2014.01), заявлено 10.09.2014, опубліковано 10.09.2014. Бюлетень № 17.

26. Бабій А.В., Бабій М.В., Кучвара І.М. Аналіз причин травмування зернового матеріалу при збиранні та транспортуванні. *Науковий журнал «Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів»*, Харків. № 11. 2018. С. 27–34.

27. Бабій А.В., Коноваленко С.І., Бабій М.В., Цепенюк М.І. Причіпний пристрій широкозахватної машини. Деклараційний патент на корисну модель 140142, А01В 59/06 (2006.01), заявлено 24.06.2019, опубліковано 10.02.2020. Бюлетень № 3/2020.

28. Бабій А.В., Литвин П.П. Корпус плуга. Деклараційний патент на корисну модель 64367, А01В 15/00, заявлено 18.03.2011, опубліковано 10.11.2011. Бюлетень № 21.

29. Бабій А.В., Рибак Т.І., Бабій М.В. Обґрунтування конструктивних особливостей енергозберігаючого приводного механізму косарки. *Вісник ХНТУСГ*. Випуск 134 “Технічний сервіс машин для рослинництва”. Харків, 2013. С.116–122.

30. Бабій А.В., Рибак Т.І., Бабій М.В. Привідний механізм косарки. Деклараційний патент на корисну модель 86536, А01D 34/30 (2006.01), заявлено 18.03.2013, опубліковано 10.01.2014. Бюлетень № 1.

31. Бабій А.В., Рибак Т.І., Попович П.В., Господарський Я.Я., Сікорський С.П. Механізм зміни ширини колії. Деклараційний патент на корисну модель 63090, А01В 51/00, заявлено 01.03.2012, опубліковано 10.09.2012. Бюлетень № 17.

32. Бабій А.В., Рибак Т.І., Попович П.В., Довбуш Т.А. Пристрій для визначення кута закручування рами мобільної машини. Деклараційний патент на корисну модель 63398, G01L 1/00, заявлено 02.03.2011, опубліковано 10.10.2011. Бюлетень № 19.

33. Бабій А.В., Цепенюк М.І. Методичні вказівки до виконання практичних робіт (самостійної підготовки) з дисципліни «Динаміка машин» для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» для здобуття освітнього ступеня «Магістр». Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2022. 60 с.

34. Бабій А.В., Цепенюк М.І. Підвищення ефективності різання при роботі сегментно-пальцевого різального апарату. *Загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник. Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин*, вип. 47, ч.І. Кропивницький: ЦНТУ, 2017. С. 59-64.

35. Бабій М.В., Бабій А.В. Дослідження роботи енергозберігаючого приводного механізму косарки. *Вісник ТНТУ*. Тернопіль : ТНТУ, 2015. Том 77. № 1. С. 149-161. (Машинобудування, автоматизація виробництва та процеси механічної обробки).

36. Бабій М.В., Попович П.В., Бабій А.В. Підвищення ефективності роботи різального апарату косарки. *Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства*. Випуск 170 “Технічний сервіс машин для рослинництва”. Харків, 2016. С.176–180.

37. Динаміка машин / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. К.: ЦП „КОМПРИНТ”, 2013. 227 с.

38. Довбуш Т.А., Хомик Н.І., Бабій А.В., Цьонь Г.Б., Довбуш А.Д. Опір матеріалів: навчальний посібник до виконання розрахунково-графічних робіт і самостійної роботи. Тернопіль: *ФОП Паляниця В.А.*, 2022. 220 с.

39. ДСТУ 3008:2015. Звіти у сфері науки і техніки. Структура та правила оформлення. Чинний від 2017-07-01. *Вид. офіц. Київ : ДП «УкрНДНЦ»*, 2016. 31 с.

40. ДСТУ 8302:2015. Інформація та документація. Бібліографічне посилання. Загальні положення та правила складання. Чинний від 2016-07-01. *Вид. офіц. Київ : Книжк. палата України ім. Ів. Федор.*, 2015. 26 с.

41. Рибак Т.І., Бабій А.В., Сташків М.Я., Паламарчук П.В., Бортник І.М. Стенд для дослідження механічної системи привода. Деклараційний патент на корисну модель 123736, G01M 13/00 (2018.01), заявлено 11.08.2017, опубліковано 12.03.2018. Бюлетень № 5.

42. Рибак Т.І., Попович П.В., Сташків М.Я. Концепція пошукового конструювання мобільної техніки в АПК // *Загальнодержавний міжвідомчий наук.-техн. зб. «Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин»*. Вип. 39. Кіровоград: КНТУ, 2009. С. 40-47.

43. Сільськогосподарські машини: теоретичні основи, конструкція, проектування: Підруч. для студ. вищ. навч. закл. із спец. «Машини та обладнання сільськогосподарського виробництва» / За ред. М.І. Черновола. Кн. 1: Машини для рільництва / П.В. Сисолін, В.М. Сало, В.М. Кропівний; За ред. М.І. Черновола. К.: *Урожай*, 2001. 384 с.

44. Сільськогосподарські машини: теоретичні основи, конструкція, проектування: Підруч. для студ. вищ. навч. закл. із спец. «Машини та обладнання сільськогосподарського виробництва» / За ред. М.І. Черновола. Кн. 2: Машини для рільництва / П.В. Сисолін, Т.І. Рибак, В.М. Кропівний; За ред. М.І. Черновола. К.: *Урожай*, 2001. 382 с.

45. Сільськогосподарські машини: теоретичні основи, конструкція, проектування: Підруч. для студ. вищ. навч. закл. із спец. «Машини та обладнання сільськогосподарського виробництва» / За ред. М.І. Черновола. Кн. 3: Машини та обладнання для переробки зерна та насіння / П.В. Сисолін, М.М. Петренко, М.О. Свірень; За ред. М.І. Черновола. К.: *Фенікс*, 2007. 432 с.

## ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

46. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. М.: Высш. школа, 1980. 408 с.
47. Иванченко Ф. К. Механика приводов технологических машин. К.: Выща школа, 1986. 152 с.
48. Кожевников С. Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. К.: Наукова думка, 1986. 288 с.
49. Комаров М.С. Динамика механизмов и машин. М.: Машиностроение, 1969.
50. Комаров М.С. Основы научных исследований. Львов: ЛГУ, 1982.
51. Комаров М.С., Цепенюк М.І. Задания к выполнению расчетно-графических работ по курсу “Основы научных исследований” для студентов механических специальностей. Львов: ЛПИ, 1982.
52. Лурье А.Б. и др. Моделирование сельскохозяйственных агрегатов и их систем управления. Л.: Колос, Ленингр. отд, 1979. 312 с.
53. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. Учебное пособие для вузов. М. «Наука», 1980. 272 с.
54. Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1976 (Биб-ка расчетчика). 216 с.
55. Светлицкий В.А., Стасенко І.В. Сборник задач по теории колебаний. М.: Высшая школа, 1973.
56. Сурьянинов Н.Г. Теоретические основы динамики машин. Учебн. Пособие / Сурьянинов Н.Г., Дашенко А. Ф., Белоус П.А. Одесса, ОГПУ, 2000. 302 с.
57. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Цирер У. Колебания в инженерном деле. Пер. с англ. М., Машиностроение, 1985. 472 с.



