МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ПУЛЮЯ

Курс лекцій з дисципліни
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
розділ «ТЕОРІЯ ГРАФІВ»

для студентів факультету
«Комп’ютерно- інформаційних систем і програмної інженерії»

Тернопіль 2023

УДК 519
К93

Курс лекцій з дисципліни «Дискретна математика» розділ «Теорія графів»

Для студентів факультету «Комп’ютерно- інформаційних систем і програмної інженерії»

Укладачі: Надія КРИВА
Наталія БЛАЩАК
Рецензент Михайло МИХАЙЛИШИН

Розглянуто на засіданні кафедри МН протокол № 7 від 12 січня 2023 р.

Затверджено на засіданні методичної ради факультету комп’ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії ТНТУ протокол № 3 від 15 лютого 2023 р.

Курс лекцій з дисципліни «Дискретна математика» розділ «Теорія графів» для студентів факультету «Комп’ютерно- інформаційних систем і програмної інженерії» / Упоряд.: Н.Р. Крива, Н.І. Блащак – Тернопіль: ТНТУ, 2023. – 40 с.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «Дискретна математика» входить до складу дисциплін циклу природничо-наукової підготовки бакалаврів спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія», 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» і є однією з базових математичних дисциплін цього циклу.

Матеріал, який пропонується для вивчення дисципліни, складається з таких розділів: «Основи теорії множин», «Комбінаторика», «Булева алгебра», «Елементи теорії графів ».

Для вивчення дисципліни «Дискретна математика» студент повинен мати знання математики в обсязі середньої школи і володіти базовими поняттями та методами лінійної алгебри та математичного аналізу, що вивчаються в курсі «Вища математика».

У посібнику теоретичний матеріал із теорії графів структуровано за темами лекцій згідно з робочою програмою дисципліни «Дискретна математика». Означення проілюстровано прикладами, наведено доведення теорем. Перелік літератури містить підручники та посібники, які можна використати для більш глибокого вивчення деяких теоретичних положень теорії графів та їх практичного застосування.

Лекція 1. Основні поняття теорії графів

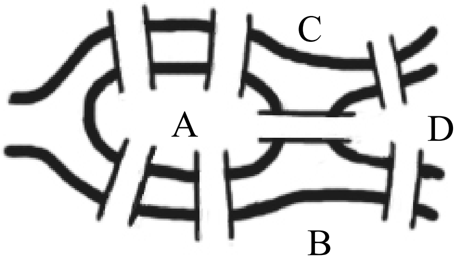
План

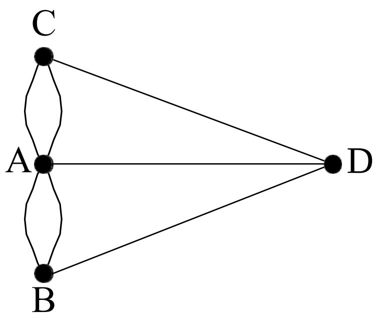
1. Виникнення теорії графів
2. Приклади графових моделей
3. Основні означення теорії графів
4. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини
5. Деякі спеціальні види графів

1. Виникнення теорії графів

Найперша згадка про графи зустрічається в роботах Л.Ейлера, який у 1736 році розв'язав задачу про кенігсберзькі мости.

У Кенігсберзі було два острови, які з'єднувались сімома мостами з берегами річки Прегель та один із одним так, як зображено на рисунку 1, а). Задача полягала в пошуку маршруту проходження всіх чотирьох частин суші, який мав починатися на довільній з них, закінчуватися на ній же та по одному разу проходити кожен міст. Проте всі спроби знайти маршрут були невдалими.





а) б)

Рис. 1. Кенігсберзькі мости та граф

Щоб довести неможливість існування такого маршруту, Л.Ейлер позначив кожну частину суші точкою (вершиною, або вузлом), а кожен міст — лінією (ребром), що з'єднує відповідні точки, і одержав "граф" (рис. 1, б). Твердження про неіснування маршруту рівносильно неможливості спеціальним чином обійти граф. Виходячи з цього конкретного випадку, Ейлер узагальнив постановку задачі та знайшов критерій існування обходу.

Пізніше елементи теорії графів з'явилися в таких природничих науках, як географія, фізика, хімія, електротехніка. Взагалі, графи застосовні в усіх галузях, де є елементи й зв'язки між ними, тому теорія графів є актуальним прикладним розділом математики.

2. Приклади графових моделей

Неформально, граф виглядає як множина точок площини (вершин, або вузлів), з'єднаних між собою лініями (ребрами). Діаграма дає уявлення про зв'язки між елементами (вершинами), але нічого не каже про метричні властивості (довжина ліній, їх форма тощо).

Залежно від типу ребер розрізняють кілька типів графів. Петля — це ребро, що з'єднує вершину саму з собою. У мультиграфі петлі не допускаються, але пари вершин можуть з'єднуватися кількома ребрами, які називаються кратними, або паралельними. У псевдографі допускаються петлі й кратні ребра. В звичайному графі немає ні петель, ні кратних ребер (рис. 2). В задачі про кенігсберзькі мости з'являвся мультиграф.

За допомогою графів подаються структурні залежності між елементами, наприклад, у електричній схемі, в молекулі, складеній з атомів, або у схемі міського транспорту. Для побудови графа, відповідного транспортній схемі, вершинами можна подати зупинки, а ребрами — ділянки маршрутів між зупинками. Схему доріг міста можна представити у вигляді мультиграфа, вершини якого відповідають перехрестям, а ребра — вулицям. Існують вулиці з одностороннім рухом, тому задається напрям руху по них (стрілки на рис. 2). Відповідний граф називається орієнтованим, або орграфом, а його орієнтовані ребра — дугами. Граф, що має орієнтовані та неорієнтовані ребра одночасно, називається змішаним.

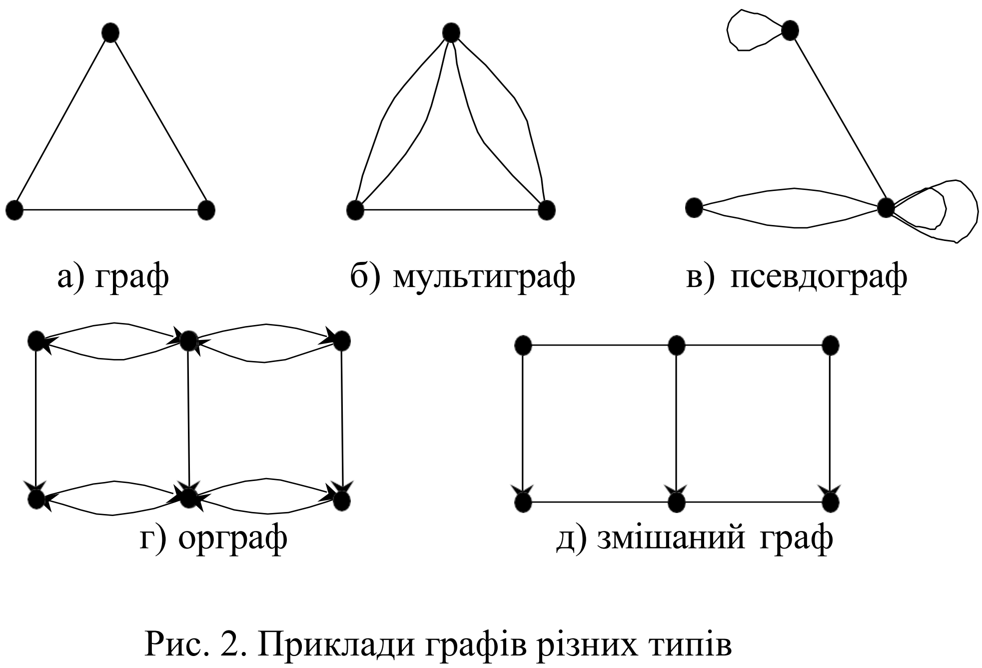


Рис. 2. Приклади графів різних типів

3. Основні означення теорії графів

Нехай задано непорожню скінчену множину V і множину E невпорядкованих пар різних елементів з множини V.

Простим графом G називають пару множин V і E, тобто $G = (V, E)$.

Елементи основної множини V називають вершинами.

Будемо позначати вершини графа $v_1, v_2, \dots, v_n$. Кількість вершин графа G (потужність множини V) називається розміром графа. Розмір графа зазвичай позначають буквою n: $|V| = n$. Тут функція $|\dots|$ — кількість елементів множини. Елементи множини E (невпорядковані пари різних вершин) називають ребрами. Ребра позначають буквами $e_1, e_2, \dots e_m$. Кількість ребер графа G (потужність множини E) називають потужністю графа. Потужність графа позначають m: $|E| = m$. Якщо пара вершин v_i та v_j з'єднані ребром, то це ребро позначають $\{v_i; v_j\}$. На рисунках ребра зображають прямою чи кривою лініями без стрілок, а вершини позначають буквами або цифрами. Оскільки E множина, то у простому графі довільну пару вершин може з'єднувати не більше ніж одне ребро. Наприклад, на рисунку 3 зображено простий граф G з множиною вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ і множиною ребер
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_2, v_5\}\}$
Розмір графа $|V| = 5$, а потужність графа $|E| = 6$.

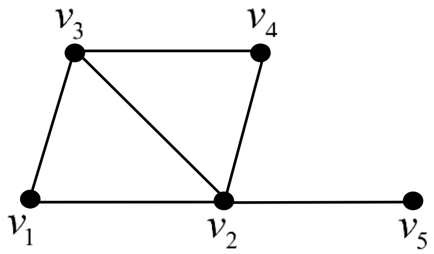


Рис. 3

У деяких випадках розглядають графи, у яких дві вершини може з'єднувати декілька ребер. Виникає поняття мультиграфа – пари (V, E), де V – непорожня скінчена множина, а E – сім'я невпорядкованих пар різних елементів з V. Термін «сім'я» означає, що елементи E (ребра) можуть повторюватись. Ребра, які з'єднують одну і ту ж пару вершин, називають кратними (або паралельними).

Окрім кратних ребер допускають наявність петель – ребер, які з'єднують вершину саму з собою.

Псевдографом називають пару (V, E), де V – непорожня скінчена множина вершин, а E – сім'я невпорядкованих пар не обов'язково різних елементів з множини V. Зауважимо, що псевдограф – це найзагальніший тип неорієнтованого графа, бо він може містити як петлі, так і кратні ребра; мультиграф може містити кратні ребра, але не повинен мати петель; а простий граф не має ні петель ні кратних ребер.

4. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини

Нехай $G = (V, E)$ — граф, $e \in E$ — ребро. Кажуть, що ребро $e = (v, w)$ з'єднує вершини v і w, які є його кінцями. Вершини v і w називаються суміжними; кожна з них є інцидентною ребру e. Два різних ребра, інцидентних одній і тій самій вершині, називаються суміжними.

Степенем вершини v в графі G називається кількість ребер, інцидентних v (петлю враховують двічі), і позначається $\deg(v)$.

У графі з n вершинами степінь вершини може мати значення від 0 до $n-1$. Вершина степеня 0 називається ізольованою (вона не має інцидентних ребер та суміжних вершин), а степеня 1 — кінцевою, або висячою (має тільки одне інцидентне ребро). Наприклад, на рисунку 3 вершина v_5 є висячою, а вершина v_4 має максимально можливий степінь в цьому графі $n-1=5-1=4$ і суміжна з усіма іншими вершинами. Очевидно, що якщо вершина має степінь $n-1$, то вона суміжна з усіма іншими вершинами, й у графі немає ізольованих вершин. Аналогічно, якщо в графі є ізольована вершина, то немає вершини степеня $n-1$ (суміжної з усіма іншими). Отже, справджується наступне твердження.

Теорема 1. У будь-якому графі з n вершинами одночасно не можуть існувати вершини степенів 0 і $n-1$.

Теорема 2. У будь-якому графі з n вершинами ($n \geq 2$) є принаймні дві вершини з однаковими степенями.

Доведення. Степені вершин можуть бути цілими значеннями від 0 до $n-1$ Але за теоремою 1 вершини степенів 0 і $n-1$ у графі одночасно існувати не можуть, тобто степенями вершин графа можуть бути лише $n-1$ різних чисел. Але вершин n, тому за принципом Діріхле обов'язково є принаймні дві вершини з однаковими степенями.

Задача Рамсея. Довести, що серед довільних шести осіб знайдуться або троє попарно знайомих, або троє попарно незнайомих.

Переклавши задачу на мову теорії графів, одержимо твердження: у довільному графі $G = (V, E)$ з шістьма вершинами існують три вершини, які є або попарно суміжними, або попарно несуміжними.

Візьмемо довільну вершину $v \in V$ та відносно неї розділимо решту вершин на дві множини, що не перетинаються: $V_1 = \{w |\, w \in V \wedge (v, w) \in E\}$ — множина вершин, суміжних із v, і $V_2 = \{w |\, w \in V \wedge (v, w) \notin E\}$ — несуміжних.

$V = V_1 \cup V_2 \cup \{v\}$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $|V| = 6$, тому $|V_1| + |V_2| = 5$, і хоча б одна з цих множин містить принаймні три вершини.

Надалі вершини, що належать множині V_1 позначатимемо точками, а ті, що належать множині V_2 — виколотими точками.

Перший випадок: $|V_1| \geq 3$. Розглянемо спочатку $|V_1| = 3$. Якщо жодні дві вершини з множини V_1 несуміжні, то множина V_1 містить три попарно несуміжні вершини (рис. 4).

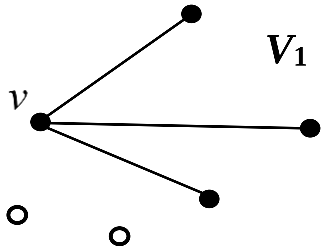


Рис. 4

Якщо в множині V_1 є дві суміжні вершини, то разом з вершиною v вони утворюють три попарно суміжні вершини (трикутники) (рис. 5).

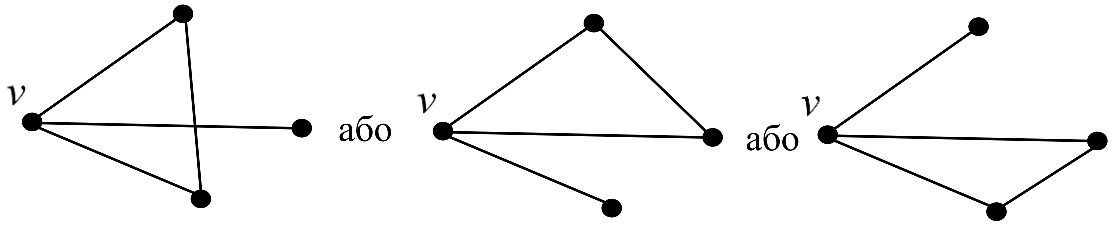


Рис. 5

Як між собою поєднані вершини, що належать множині V_2, не суттєво. Для $|V_1| > 3$ доведення аналогічне.

Другий випадок: $|V_2| \geq 3$. Розглянемо $|V_2| = 3$.

Якщо в множині V_2 є дві несуміжні вершини, то разом з v вони утворюють три попарно несуміжні вершини (рис. 6). Якщо кожні дві вершини з множини V_2 є суміжними, то множина V_2 містить три попарно суміжні вершини (рис. 7).

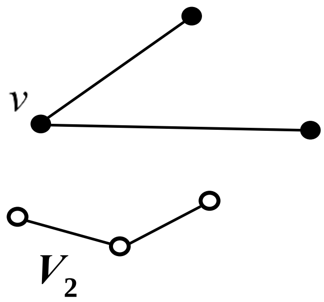


Рис. 6

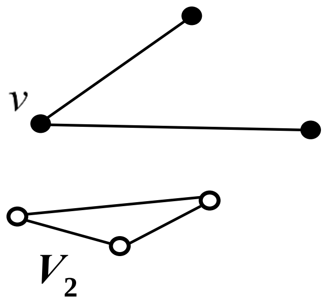


Рис. 7

Отже, в обох випадках існують три вершини, що є попарно несуміжними або попарно суміжними, що й треба було довести.

5. Деякі спеціальні види графів

Розглянемо графи з деякими структурними особливостями. Порожнім називається граф з порожньою множиною ребер, порожній граф з n вершинами позначають як O_n; зокрема граф O_1 (з однією вершиною й без ребер) називається тривіальним. Протилежними до таких графів є повні. Граф, у якому кожна вершина суміжна з усіма іншими, називається повним. Повний граф з n вершинами позначається K_n; кожна його вершина має степінь $n-1$ (рис. 8).

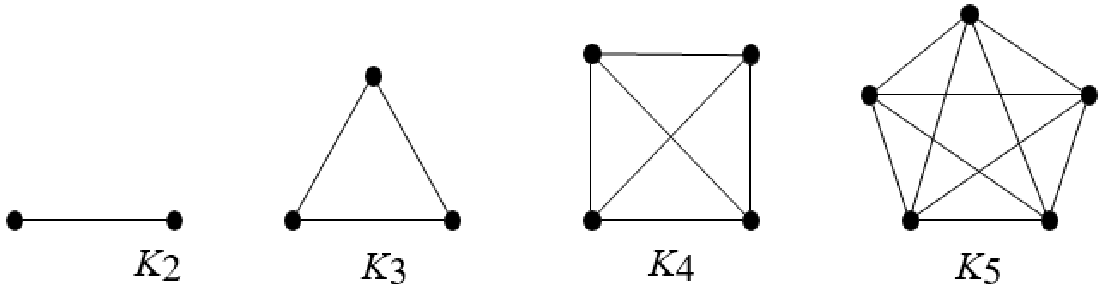


Рис. 8. Приклади повних графів

Якщо граф $G = (V, E)$ є повним, то за означенням $E = V^{(2)}$

Окремий клас графів утворюють двочасткові(дводольні) графи. Граф $G = (V, E)$ називається двочастковим, якщо множину його вершин V можна так розбити на дві підмножини V_1 і V_2 (частки або долі), що кожне ребро графа з'єднує вершини з різних часток. Двочастковий граф називається повним двочастковим, якщо будь-які дві вершини з різних часток суміжні. Якщо частки повного двочасткового графа мають n і m вершин відповідно, він позначається $K_{n,m}$. Повний двочастковий граф $K_{1,n}$ називається зірковим графом, або зіркою (рис.9).

Повний двочастковий граф $K_{3,3}$ є моделлю задачі про «три будинки та три колодязі».

Три сусіди, що посварилися, спільно користуються трьома колодязями. Чи можна провести доріжки від кожного будинку до кожного колодязя так, щоб доріжки не перетиналися, тобто сусіди не зустрічалися на шляхах до колодязів?

Двочасткові графи виникають у багатьох відомих задачах. Наприклад, у задачі про одруження є множина юнаків, і кожен з них знайомий з кількома дівчатами. Питання в тому, чи може кожний юнак одружитися зі знайомою йому дівчиною. Ця задача (звичайно, в іншій формі) відіграє важливу роль при вивченні потоків у мережах.

Рис. 9. Приклади повного двочасткового та зіркового графів

Лекція 2. Лема про рукостискання. Ізоморфізм графів. Маршрути

План

1. Лема про рукостискання
2. Операції над графами
3. Ізоморфізм графів.
4. Інваріанти ізоморфних графів, зв'язані вершини, компоненти зв'язності
5. Точки зчленування, мости
6. Кількісні ознаки зв'язності
7. Відстань між вершинами
8. Ексцентриситет, радіус, діаметр, центр

1. Лема про рукостискання

У довільному графі кожне ребро інцидентне рівно двом вершинам, тому до суми степенів вершин графа кожне ребро додає двійку. Таким чином, справджується твердження, яке було встановлено Ейлером і є історично першою теоремою теорії графів.

Теорема 1. Сума степенів вершин графа $G = (V, E)$ дорівнює подвоєній кількості його ребер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Цю теорему інколи називають «лемою про рукостискання». Вершини графа подають людей, а ребра — рукостискання, якими люди обмінялися при зустрічі. Оскільки кожне рукостискання має дві діючи особи, число потиснутих рук удвічі більше кількості рукостискань. Але число потиснутих рук — це сума степенів вершин графа, а кількість рукостискань — це кількість ребер.

Висновок 1. Повний граф з n вершинами має $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

Дійсно, степінь кожної з n вершин дорівнює $n-1$, тому за теоремою 1 маємо

$$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = n(n-1), \text{ звідки кількість ребер дорівнює } \frac{n(n-1)}{2}.$$

Висновок 2. У довільному графі сума степенів вершин парна.

Висновок 3. У будь-якому графі кількість вершин, степінь яких непарний, парна.

Нехай дано граф $G = (V, E)$. Множину вершин графа V можна розбити на дві підмножини, що не перетинаються: множина вершин парного степеня $V_п$ та множина вершин непарного степеня $V_Н$; $V_п \cup V_Н = V$, $V_п \cap V_Н = \emptyset$. Тоді

$$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in V_п} \deg(v) + \sum_{v\in V_н} \deg(v),$$

звідки

$$\sum_{v\in V_н} \deg(v) = 2|E| - \sum_{v\in V_п} \deg(v).$$

Сума степенів вершин з множини $V_п$ завжди парна, оскільки її складають вершини парного степеня. Тоді сума степенів вершин з непарними степенями парна як різниця двох парних чисел. Але якщо сума непарних чисел є парною, то вона має парну кількість доданків, тобто кількість вершин непарного степеня парна.

2. Операції над графами

Якщо для двох графів $G = (V, E)$ і $G' = (V', E')$ виконуються включення $V' \subseteq V$ і $E' \subseteq E$, то граф G' називається *підграфом* графа G; це позначається $G' \subseteq G$.

Граф G у цьому випадку називається *надграфом* графа G'.

Якщо $G' \subseteq G$ і $V' = V$, то G' називається *суграфом* графа G.

Якщо $V_0 \subseteq V$, то граф $G(V_0) = (V_0, E \cap V_0^{(2)})$ називається підграфом графа G, визначеним множиною вершин V_0.

Об'єднанням $G_1 \cup G_2$ графів $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф з множиною вершин $V_1 \cup V_2$ і множиною ребер $E_1 \cup E_2$, $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Об'єднання $G_1 \cup G_2$ називається прямою сумою графів G_1 і G_2, якщо множини вершин V_1 і V_2 не перетинаються.

Для графів $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ аналогічно означається їх *перетин:* $G_1 \cap G_2 = (V, E_1 \cap E_2)$ та різниця $G_1 \setminus G_2 = (V, E_1 \setminus E_2)$.

Для графів означаються дві специфічні операції — вилучення ребра та вилучення вершини.

Нехай дано граф $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$.

Результатом застосування операції *вилучення ребра* e до графа G є граф $G\text{-}e = (V, E \setminus \{e\})$.

Результатом застосування операції *вилучення вершини* v до графа G є граф $G\text{-}v = (V \setminus \{v\}, E \cap (V \setminus \{v\})^{(2)})$, тобто з G вилучається вершина v та всі інцидентні їй ребра.

Приклад.

Якщо $G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{(v_1, v_2,), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\})$, то

$G - (v_1, v_2) = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{(v_1, v_3), (v_2, v_3)\})$ (вилучення ребра), а

$G - v_1 = (\{v_2, v_3\}, \{(v_2, v_3)\})$ (вилучення вершини).

3. Ізоморфізм графів

Буквальний переклад слова "ізоморфізм" означає "однаковість форми". Форма графа – це його структура. Таким чином, ізоморфізм графів означає однаковість їх структур.

Два графи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називаються ізоморфними (це позначається $G1 \cong G2$), якщо між множинами їх вершин існує взаємно однозначне відображення $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$, яке зберігає суміжність, тобто для довільних вершин v і w ребро $(v, w) \in E_1$ тоді й тільки тоді, коли ребро $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$.

При цьому φ називається ізоморфним відображенням або ізоморфізмом графа G_1 на граф G_2.

Про ізоморфні графи кажуть, що вони рівні з точністю до ізоморфізму.

Ізоморфізм графа на себе називається автоморфізмом. Очевидно, що тотожне відображення множини вершин графа є автоморфізмом (цей автоморфізм називається тривіальним). Неважко також переконатися, що якщо φ є ізоморфізмом графа G_1 на граф G_2, то відображення φ^{-1} є ізоморфізмом G_2 на G_1. Крім того, якщо є ізоморфізм φ графа G_1 на граф G_2 і ізоморфізм γ графа G_2 на G_3, то їх композиція $\varphi \circ \gamma$ буде ізоморфізмом G_1 на G_3.

Теорема 2. Якщо φ - ізоморфізм графа G_1 на G_2, то вершини v у графі G_1 і $\varphi(v)$ у G_2 мають однакові степені.

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ і $v \in V_1$. Якщо v не має суміжних вершин, то і $\varphi(v)$ не може мати таких, тобто $\deg(v) = \deg(\varphi(v)) = 0$. Якщо v має суміжні вершини, то, за означенням ізоморфізму, для будь-якої вершини w маємо: $w \in O(v)$ тоді й тільки тоді, коли $\varphi(w) \in O(\varphi(v))$.

Отже, $|O(v)| = |O(\varphi(v))|$, тобто $\deg(v) = \deg(\varphi(v))$.

(Множину вершин, суміжних з вершиною v, позначають $O(v)$. Очевидно, що $\left|O(v)\right| = \deg(v)$).

4. Інваріанти ізоморфних графів

Під інваріантом графа G розуміють числовий параметр, пов'язаний з G, значення якого однакові для всіх графів, ізоморфних G. Деякі найпростіші інваріанти представлено в наступних теоремах.

Теорема 3. Ізоморфні графи мають однакову кількість вершин.

Це випливає з існування взаємно однозначної відповідності між множинами вершин.

Ізоморфізм φ можна продовжити на множину ребер наступним чином: покладемо $\varphi'((v, w)) = (\varphi(v), \varphi(w))$. З властивостей φ випливає, що відображення $\varphi' : E_1 \longrightarrow E_2$ є взаємно однозначним.

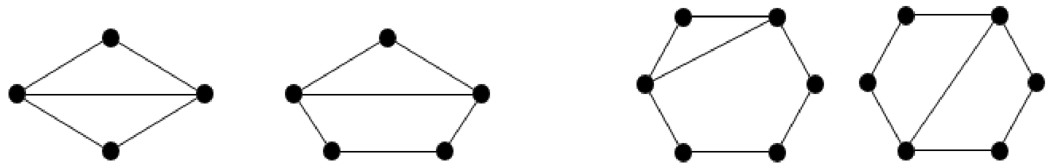
Маємо наступну теорему.

Теорема 4. Ізоморфні графи мають однакову кількість ребер.

Теорема 5. Ізоморфні графи для довільного k ($k \geq 0$) мають однакову кількість вершин степеня k.

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ — ізоморфізм графа G_1 на граф G_2, $v \in V_1$ і $\deg(v) = k$. За теоремою 2 $\deg(\varphi(v)) = k$, тому ізоморфізм взаємно однозначно відображає множину вершин степеня k графа G_1 на множину вершин степеня k графа G_2.

Тоді ізоморфні графи G_1 і G_2 мають однакову кількість вершин степеня k.



а) б)

Рис. 10 Пари неізоморфних графів

5. Маршрути, зв'язані вершини, компоненти зв'язності

Маршрутом у графі $G = (V, E)$ називається послідовність вершин і ребер $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$, де $v_0, \ldots, v_n$ – вершини, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $1 \le i \le n$ – ребра.

Ребра e_i та e_{i+1} $(1 \le i \le n - 1)$ є сусідніми ребрами маршруту й мають принаймні одну спільну вершину. Вказаний маршрут з'єднує вершини v_0 і v_n, або веде з v_0 у v_n. Цей маршрут можна позначити $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$, не вказуючи ребер.

Число n називається довжиною маршруту.

Тривіальний, або нуль-маршрут — маршрут, що складається з єдиної вершини й має довжину 0. Інші маршрути вважаються нетривіальними.

Маршрут називається ланцюгом, якщо всі його ребра попарно різні, і простим ланцюгом, якщо всі його вершини попарно різні.

Якщо $v_0 = vn$, то маршрут називається замкненим, або циклічним. Його останнє та перше ребро вважаються сусідніми. Нетривіальний замкнений ланцюг називається циклом. Цикл $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ називається простим, якщо його вершини $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ попарно різні. Кожний простий цикл є циклом, а довжина будь-якого нетривіального замкненого маршруту $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$, де $v_0 = v_n$, з попарно різними ребрами не менше 3, оскільки треба вийти з вершини та повернутися в неї, але по різних ребрах. Отже, цикл і простий цикл повинні проходити принаймні через три вершини.

Якщо $Z_1 = (v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i)$ і $Z_2 = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ — маршрути, то під $Z_1 \cdot Z_2$ будемо розуміти маршрут $(v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, а під Z_1^{-1}— маршрут $(v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1, v_0)$.

Через C_n позначається граф, утворений одним простим циклом з n вершин, P_n — простим ланцюгом з n вершин.

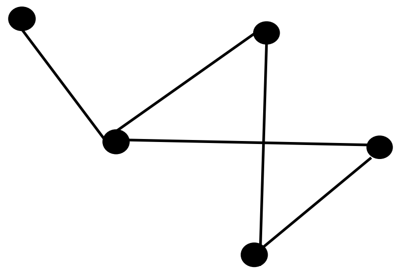
Граф C_3 часто називається трикутником. Це цикл і простий цикл з найменшою кількістю вершин.

Граф, що не має циклів, називається ациклічним.

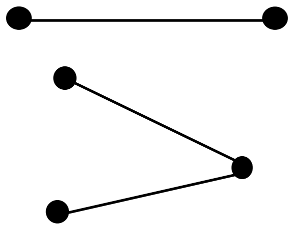
Граф, довільні дві вершини якого можуть бути з'єднані деяким маршрутом (є зв'язаними), називається зв'язним. Інакше граф називається незв'язним.

Максимальний за відношенням $\subseteq$ зв'язний підграф графа називається компонентою зв'язності.

На рисунку 11 а) зображено зв'язний граф, а на рисунку 11 б) маємо приклад незв'язного графа з двома компонентами зв'язності K_3 і K_2.



а)



б)

Рис. 11

Відношення зв'язності на множині вершин графа $G = (V, E)$ є еквівалентністю; позначимо її R. vRw має місце тоді й тільки тоді, коли вершини v і w є зв'язаними в графі. За еквалентністю R побудуємо фактор-множину $V/R = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, яка є розбиттям множини вершин. Підграфи $G(V_i)$, $1 \leq i \leq n$, є компонентами зв'язності графа G (максимальними зв'язними підграфами), а сам граф можна подати як пряму суму його зв'язних компонент $G = \bigcup G(V_i)$.

Теорема 6. Кожний граф можна однозначно подати як пряму суму зв'язних компонент.

Розглянемо деякі властивості маршрутів.

Теорема 7. Будь-який маршрут, що веде з вершини v у вершину w ($v \neq w$), містить простий ланцюг, що веде з v в w.

Нехай є маршрут $Z = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$, де $v_0 = v$, $v_n = w$.

Побудуємо за ним простий ланцюг, що веде з v у w. Якщо всі вершини маршруту Z різні, то він є простим ланцюгом. Інакше, нехай $v_i = v_j$ при деяких i та j, $0 \leq i < j \leq n$. Вилучивши частину маршруту Z між v_i та v_j, одержимо маршрут

$(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \ldots, e_n, v_n)$, довжина якого менше довжини Z. Умова $v \neq w$ гарантує, що $i \neq 0$ або $j \neq n$, тому новий маршрут з'єднує v і w. Якщо він не є простим ланцюгом, то застосуємо до нього таке саме скорочення. Кількість вершин графа та початковий маршрут Z скінченні, і на кожному кроці зменшується довжина маршруту, тому на деякому скінченному кроці буде одержано маршрут, що з'єднує вершини v та w і має попарно різні вершини, тобто є простим ланцюгом.

Теорема 8. Якщо в графі для деяких трьох різних вершин v, u і w є ланцюги, один з яких веде з v в u, а другий — з u в w, то існує простий ланцюг, що веде з v в w.

6. Точки зчленування, мости

У розв'язанні практичних задач з графами досить часто застосовуються методи типу «розділяй та володарюй», коли задача розв'язується для окремих частин графа, а потім результати об'єднуються. Розклад графа на окремі структурні частини дозволяє зменшувати розмірність розв'язуваних підзадач і досягати ефективнішого розв'язання всієї задачі.

Найпростіший спосіб розкладу графа — у пряму суму його компонент зв'язності. Проте існують класи зв'язних графів, які можна піддавати структурній декомпозиції, тобто розкладати на компоненти зв'язності в результаті вилучення однієї вершини чи ребра. Виявлення таких вершин та ребер допомагає вивчати структуру зв'язного графа.

Означення. Точкою зчленування графа, або розділовою вершиною неорієнтованого графа називається вершина, видалення якої збільшує число компонентів зв'язності.

Означення. Мостом неорієнтованого графа називається ребро, видалення якого збільшує число компонентів зв'язності графа.

Таким чином, якщо v – точка з'єднання зв'язного графа G, то граф $G - v$ не зв'язний.

Означення. Неподільним графом називається зв'язний, непустий неорієнтований граф, що не має точок з'єднання.

Означення. Блок графа – це його максимальний неподільний підграф. Якщо G – неподільний граф, то часто він сам називається блоком.

На рисунку 12 v, u – точки з'єднання, а w – ні, x – міст, а y – ні; окремо наведено чотири блоки графа G. Кожне ребро графа належить тільки одному з його блоків, також як і кожна вершина, яка не є ні ізольованою, ні точкою з’єднання. Ребра будь-якого простого циклу графа також належать тільки одному блоку.

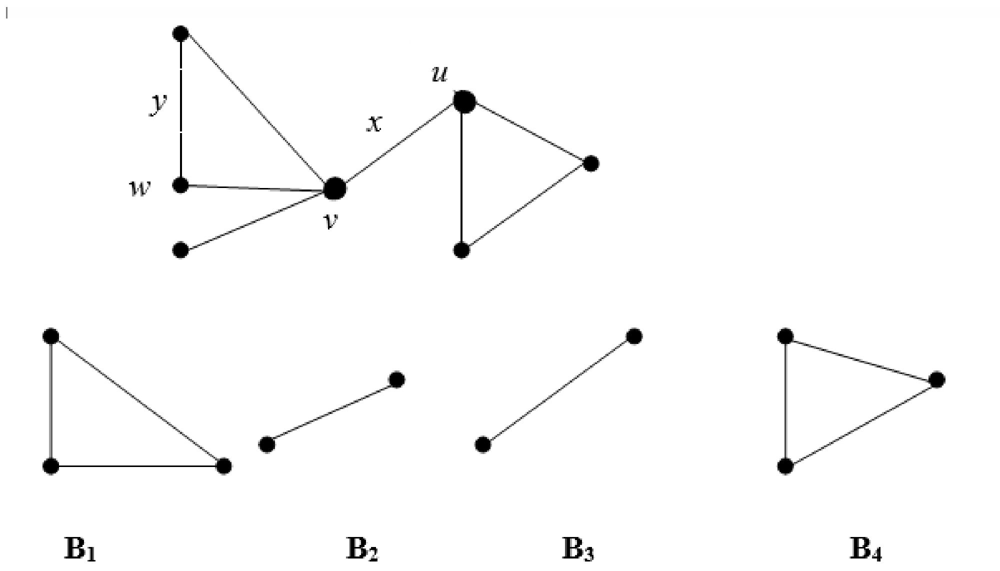


Рис. 12 Граф та його блоки

7. Кількісні ознаки зв’язності

Теорема 9. В довільному графі з n вершинами, k компонентами зв’язності і кількістю ребер m задовольняються нерівності $n-k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$, причому ці оцінки є досяжними.

Висновок 1. Якщо в графі з n вершинами кількість ребер більше ніж $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, то граф зв’язний.

Якщо граф має k компонент зв’язності та m ребер, то $m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$, звідки $(n-1)(n-2) \le (n-k)(n-k+1)$, що можливо лише при $k = 1$, тобто граф зв’язний.

Висновок 2. Якщо $m < n - 1$, то граф з n вершинами та m ребрами незв’язний.

Зв’язний граф має одну компоненту зв’язності і за теоремою $m \ge n - 1$, що суперечить умові. Тому граф не є зв’язним.

Висновок 3. Якщо граф з n вершинами незв’язний, то кількість його ребер не більша, ніж $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

8. Відстань між вершинами

Довжина найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує вершини v і w зв'язного графа, називається відстанню між вершинами v і w та позначається $d(v, w)$.

Задача пошуку найкоротшого маршруту або відстані між двома вершинами графа виникає дуже часто, коли граф виступає моделлю, наприклад, якоїсь транспортної системи.

Теорема 10. У довільному зв'язному графі $G = (V, E)$ функція відстані $d(v, w)$ задовольняє трьом аксіомам метрики, тобто за будь-яких вершин v, w, $u \in V$ виконується:

1) $d(v, w) \geq 0$; $d(v, w) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $v = w$;
2) $d(v, w) = d(w, v)$;
3) $d(v, w) \leq d(v, u)+d(u, w)$.

1. Відстань між вершинами невід'ємна, за означенням, та дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли між ними існує нуль-маршрут, тобто вони збігаються.

2. Якщо відстань досягається на простому ланцюзі L, що веде з v в w, то L^{-1} буде простим ланцюгом тієї ж самої довжини, що веде з w в v.

3. Якщо $v = w$, то $d(v, u)+d(u, w) \geq 0 = d(v, w)$. Якщо $v \neq w$, і простий ланцюг L_1 довжини $d(v, u)$ веде з v в u, а простий ланцюг L_2 довжини $d(u, w)$ — з u в w, то маршрут $L_1 \cdot L_2$ довжини $d(v, u)+d(u, w)$ веде з v в w. Він містить простий ланцюг, що з'єднує v та w і має довжину, не більшу ніж довжина $L_1 \cdot L_2$. Звідси за означенням відстані $d(v, u)+d(u, w) \geq d(v, w)$.

9. Ексцентриситет, радіус, діаметр, центр

Ексцентриситетом вершини $v \in V$ зв'язного графа $G = (V, E)$ називається величина

$$e(v) = max\{d(v, w) \mid w \in V\},$$

тобто найбільша з відстаней між v та іншими вершинами графа.

Діаметром зв'язного графа G називається найбільший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $D(G)$. Жодна відстань в графі не перевищує його діаметр.

Радіусом зв'язного графа G називається найменший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $R(G)$.

Якщо $e(v) = R(G)$, то вершина v називається центральною. Центром графа називається множина всіх його центральних вершин. За означенням

$D(G) = x\{e(v) \mid v \in V\} = max\{d(v, w) \mid v, w \in V\}$ і

$R(G) = min\{e(v), v \in V\}$.

Теорема 11. Діаметр графа дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли граф повний.

Доведення.

($\Rightarrow$) Якщо діаметр графа дорівнює 1, то відстань між довільними двома різними вершинами не перевищує 1, тобто вони суміжні, і граф повний.

($\Leftarrow$) Якщо граф повний, то ексцентриситети всіх вершин дорівнюють 1. Тоді й діаметр дорівнює 1.

У повному графі есцентриситети всіх вершин рівні, тому його центр збігається з множиною всіх вершин.

$D(K_n) = R(K_n)$ у довільному повному графі K_n.

У зірковому графі $K_{1,n}$ при $n \geq 2$ маємо $D(K_{1,n}) = 2$, $R(K_{1,n}) = 1$, тобто $D(K_{1,n}) = 2R(K_{1,n})$.

Теорема 12. Для довільного зв'язного графа G виконується

$$R(G) \leq D(G) \leq 2R(G).$$

Доведення.

Перша нерівність випливає з означень радіуса та діаметра:

$R(G) = min\{e(v)\ v \in V\} \leq max\{e(v) \mid v \in V\} = D(G)$.

Доведемо другу нерівність. Нехай z — центральна вершина. Візьмемо дві довільні вершини v і w. Маємо $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w) = 2R(G)$.

Тоді $D(G) = max\{d(v, w) \mid v, w \in V\} \leq 2R(G)$.

Ізоморфізм можна продовжити на множину маршрутів графа. Маршруту $S = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ у графі G_1 поставимо у відповідність маршрут φ «$(S) = (\varphi\ (v_0), \varphi\ (v_1), \ldots, \varphi\ (v_k))$ у графі G_2. Оскільки φ — ізоморфізм, вказане відображення φ буде взаємно однозначним відображенням множини маршрутів G_1 на множину маршрутів G_2. Воно зберігає довжину маршруту, а також властивості маршруту бути простим ланцюгом, повним простим ланцюгом, максимальним простим ланцюгом, циклом, простим циклом. З цих міркувань випливає наступна теорема.

Теорема 13. В ізоморфних графах для довільного k ($k \geq 0$) існує взаємно однозначна відповідність:

1) між множинами простих ланцюгів довжини k;
2) між множинами простих циклів довжини k.

Висновок 1.
Ізоморфізм зберігає відстань між вершинами графа.

Висновок 2.
Для зв'язного графа ексцентриситет вершин, діаметр та радіус є інваріантами.

Рівність інваріантів є необхідною умовою ізоморфності графів, проте не є достатньою, тобто графи з однаковими значеннями деяких інваріантів не обов'язково ізоморфні.

Лекція 3. Ейлерові графи. Гамільтонові графи

План

1. Ейлерові графи. Алгоритм Фльорі
2. Гамільтонові графи. Теорема Оре. Теорема Дирака
3. Компоненти зв'язності. Ранг та цикломатичне число графа
4. Дерева і ліси

1. Ейлерові графи. Алгоритм Фльорі

Цикл, що містить усі ребра графа, називається ейлеровим. Граф називається *ейлеровим*, якщо в ньому є ейлерів цикл. *Ейлеровим* ланцюгом називається ланцюг, що проходить через усі ребра графа.

Наприклад, у графі K_5 з множиною вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ існує ейлерів цикл $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1$.

Ейлерові цикли виникають у практичних задачах, пов'язаних з обходом усіх ребер графа по одному разу. Наприклад, є система шляхів, які треба ремонтувати. Ремонтна бригада має проїхати через усі ці шляхи, починаючи від своєї бази. Бригада має спеціальну техніку, яка рухається дуже повільно, тому бажано двічі тим самим шляхом не проїжджати. Виходить, що найкращим маршрутом бригади буде саме ейлерів цикл, який починається й закінчується в її базі.

Теорема 1. Для зв'язного нетривіального графа G наступні твердження еквівалентні:

1. G — ейлерів граф (існує цикл, що містить усі ребра графа по одному разу);
2. Кожна вершина графа має парний степінь;
3. Множину ребер графа можна розбити на прості цикли, які не перетинаються по ребрах.

Доведення.

(1)⟹(2) Нехай у графі G існує ейлерів цикл. Спочатку вилучимо всі ребра, а далі додаватимемо їх по одному у порядку проходження циклу. Якщо в цьому циклі ми приходимо до вершини, то ми повинні вийти з неї (з початкової вершини циклу ми виходимо, а в кінці приходимо до неї). Тому кожне проходження вершини додає 2 до її степеня. Коли додано всі ребра, одержано граф G, кожна вершина якого має парний степінь.

(2) ⟹(3) Кожна вершина графа має парний степінь і граф зв'язний (ізольованих вершин немає), тому степінь кожної вершини не менше 2. Тоді у графі можна знайти простий цикл. Вилучимо ребра цього циклу. Степінь кожної вершини або зменшується на 2, або не зменшується, і в обох випадках залишається парним. Якщо в графі залишаються ребра, продовжуємо процедуру вилучення простих циклів доти, поки існує хоча б одна нетривіальна зв'язна компонента. З описаної процедури, очевидно, що граф є сумою вилучених простих циклів, причому ці прості цикли не мають спільних ребер.

(3) ⟹(1) Нехай M_1 — один з простих циклів розбиття. З нього почнемо будувати ейлерів цикл. Нехай на деякому кроці побудовано цикл M_k і залишаються прості цикли розбиття, що не увійшли до складу M_k. За зв'язністю графа існує простий цикл Z, який має спільну вершину v з M_k. Зауважимо, що цю спільну вершину можна без обмеження загальності важати початковою вершиною обох маршрутів, тобто $Mk = (v)\cdot Mk'\cdot(v)$ і $Z = (v)\cdot Z'\cdot(v)$. Побудуємо маршрут $Mk+1 = (v)\cdot Mk'\cdot(v)\cdot Z'\cdot(v)$. Він є циклом, який об'єднує Mk з обраним простим циклом Z. Оскільки граф скінченний, продовження цього процесу на деякому кроці вичерпає всі прості цикли, і побудований цикл міститиме всі ребра графа, тобто граф є ейлеровим.

Висновок. Нетривіальний зв'язний граф має ейлерів ланцюг тоді й тільки тоді, коли він має тільки дві вершини з непарними степенями.

Доведення.

(⟹) Нехай вершини v, w, $v\neq w$, є кінцями ейлерового ланцюга. Додамо до графа нову вершину u та ребра (v, u), (w, u); при цьому зміняться степені лише вершин v та w (збільшаться на 1). В новому графі ці два ребра разом з ейлеровим ланцюгом утворюють ейлерів цикл, і усі вершини мають парний степінь. Кінці ейлерового ланцюга у початковому графі мали степені на 1 менше, ніж у новому, тому ці степені були непарними.

($\Longleftarrow$) Якщо граф має рівно дві вершини непарного степеня v, w, $v \neq w$, то додамо до графа нову вершину u та ребра (v, u), (w, u). В отриманому графі всі вершини первинного графа будуть мати парний степінь, додана вершина буде мати степінь 2 — також парний, звідки граф буде ейлеровим, тоді в ньому існує ейлерів цикл. Цей цикл проходить через вершину u рівно один раз, без обмеження загальності можна вважати, що вона є початком та кінцем ейлерового циклу. Тепер вилучимо з графа цю вершину та суміжні з нею ребра. При цьому з ейлерового циклу ми отримаємо ейлерів ланцюг.

Спосіб побудови ейлерового циклу в ейлеревому графі

Починаючи з довільної вершини u, присвоїмо довільному ребру (u, v) номер 1. Потім викреслимо ребро (u, v) та перейдемо до вершини v. Нехай на попередньому кроці ми перейшли до вершини w і присвоїли ребру номер k. На черговому кроці вибираємо довільне ребро, інцидентне w, причому ребро, що не входить до складу жодного циклу в графі, який залишився, обираємо тільки тоді, коли інших немає; присвоюємо обраному ребру номер k+1 та викреслюємо його.

2. Гамільтонові графи

Ейлерові цикли характеризуються властивістю проходити по одному разу через кожне ребро графа, а гамільтонові цикли — через кожну вершину.

Гамільтоновим називається простий цикл, який проходить через кожну вершину графа.

Граф, у якому є гамільтонів цикл, називається гамільтоновим.

Простий ланцюг, що проходить через кожну вершину графа, називається гамільтоновим.

Уперше задача пошуку простого циклу, що містить усі вершини графа, з’явилася у вигляді головоломки, яку в 1859 році запропонував сер Вільям Гамільтон. Суть її полягала в побудові маршруту, який проходив би по одному разу через кожне з 20 міст та повертався у початкову вершину маршруту.

Задачу про гамільтонові цикли можна інтерпретувати наступним чином. Серед лицарів деякі є друзями. Як їх можна розсадити за круглим столом, щоб по обидва боки кожного з присутніх сиділи його друзі?

До задач про гамільтонові цикли відносять і задачу про комівояжера. Він має відвідати кілька міст, відстані між якими відомі. Необхідно знайти найкоротший маршрут, що проходить через усі міста й повертається в початкове. Ця задача має низку застосувань у дослідженні операцій, наприклад, у зв'язку з ефективним використанням обладнання.

Приклади гамільтонових графів наведено на рис. 13.

K_5 $K_{3,3}$

Рис. 13. Приклади гамільтонових графів

Очевидно, що в довільному повному графі $K_n = (V, V^{(2)})$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $n \geq 3$, існує гамільтонів цикл $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$.

Для двочасткового графа $K_{n,n}$ з частками $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V_2 = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n}\}$, $n \geq 2$, також існує гамільтонів цикл $(v_1, v_{n+1}, v_2, v_{n+2}, \dots, v_{n-1}, v_{2n-1}, v_n, v_{2n}, v_1)$.

Незважаючи на схожість означень ейлерових і гамільтонових циклів, вони мають цілком різні властивості.

Зокрема, існують гамільтонові графи, що не є ейлеровими, і навпаки (Рис. 14).

Їх відмінність виявляється також у тому, що задача побудови ейлерового циклу розв'язується дуже просто (алгоритм Фльорі), а задача побудови гамільтонова циклу (як і задача комівояжера) належить до так званих важкорозв'язуваних задач.

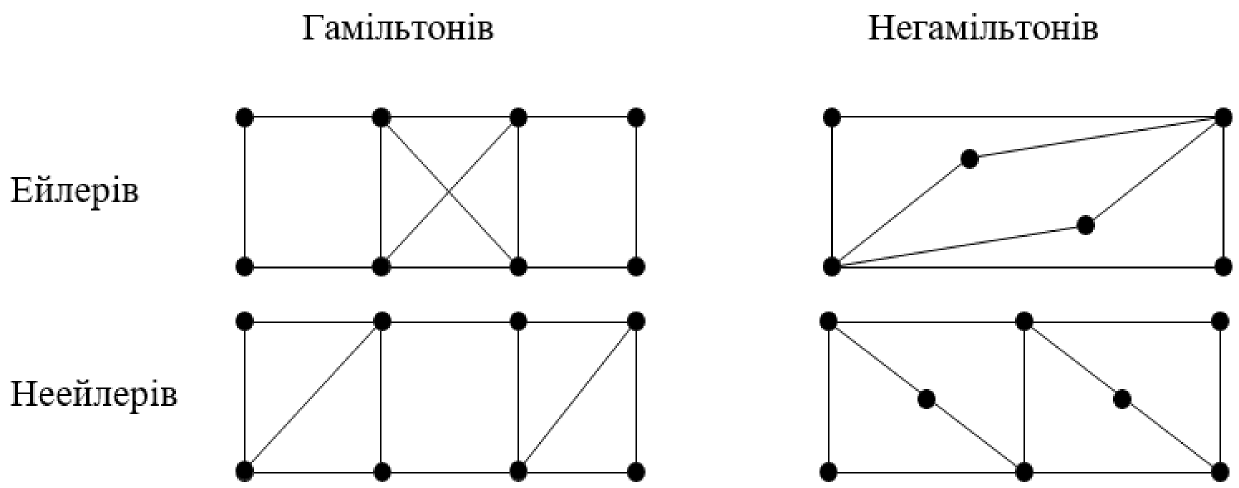


Рис. 14.

В гамільтоновому графі всі вершини зв'язані між собою гамільтоновим циклом. Крім того, цей цикл проходить через кожну вершину, тому степені всіх вершин гамільтонового графа не менше 2.

Теорема Оре. Якщо для довільних несуміжних вершин v і w зв'язного графа G з n ($n \geq 3$) вершинами виконується $\delta(v) + \delta(w) \geq n$, то граф G має гамільтонів цикл.

Теорема Дирака. Якщо для будь-якої вершини v зв'язного графа G з n ($n \geq 3$) вершинами виконується $\delta(v) = n/2$, то граф G має гамільтонів цикл.

Алгоритм Дейкстри, на відміну від алгоритму Флойда з допомогою якого можна відшукати найкоротший маршрут між будь-якими двома вершинами графа, призначений для пошуку маршруту найкоротшої довжини від заданої вершини графа до всіх інших. В процесі виконання даного алгоритму при переході від вершини i до вершини j використовується спеціальна процедура, яка кожній вершині графа присвоює відповідну мітку.

3. Компоненти зв'язності. Ранг та цикломатичне число графа

Граф G називають зв'язним, якщо у ньому існує шлях між кожною парою вершин.

Позначимо V_v множину, що складається з даної вершини v і всіх тих вершин графа, що можуть бути з'єднані з нею ланцюгом.

Означення. Компонента зв'язності чи просто компонента – це підграф, породжений множиною типу V_v або вершинно породжений підграф $\langle V_v \rangle$.

Розглянемо незв'язний неорієнтований граф $G(V,E)$ (Рис.15).

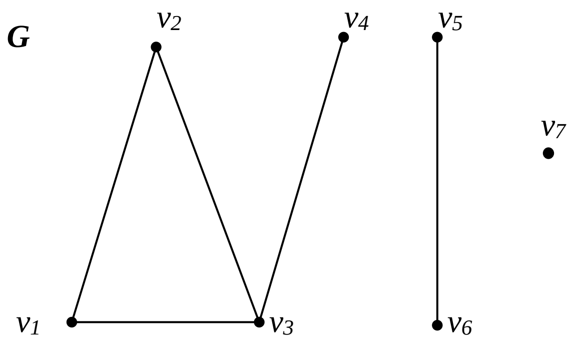


Рис.15

Множину його вершин $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$ можна розбити на такі підмножини: $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$; $V_2=\{v_5,v_6\}$; $V_3=\{v_7\}$, так, що вершинно породжені підграфи $\langle V_1\rangle$, $\langle V_2\rangle$, $\langle V_3\rangle$ були зв'язними, і жодна вершина з підмножини V_i не була суміжною з жодною вершиною підмножини V_j, $i\neq j$.

Очевидно, що виконуються такі властивості для підмножин V_i, які утворюють розбитття множини *V:*

1) $V_i\neq\varnothing$;
2) $V_i\neq V_j \Rightarrow V_i\cap V_j=\varnothing, (i\neq j)$;
3) $\cup V_i=V$.

Підграфи $\langle V_1\rangle$, $\langle V_2\rangle$, $\langle V_3\rangle$ – компоненти зв'язності графа G. Кожен з них – максимально зв'язний підграф графа G, тобто $\langle V_i\rangle$ не є власним підграфом будь-якого іншого підграфа $\langle V_j\rangle$.

Отже, наведений на прикладі граф G має три компоненти зв'язності.

Теорема. Граф буде зв'язним лише у тому випадку, якщо він складається з однієї компоненти зв'язності.

Розглянемо граф G на n вершинах і m ребрах, який має p компонент зв'язності.

Означення. Рангом графа G називають число, яке дорівнює різниці між кількістю його вершин і компонент зв'язності:

$$\rho(G)=n-p.$$

Означення. Цикломатичним числом графа G називають число, яке дорівнює різниці між кількістю його ребер і вершин плюс кількість компонент зв'язності:

$$\nu(G) = m - n + p.$$

Зауважимо, що існує зв'язок між рангом і цикломатичним числом графа:

$$\rho(G) + \nu(G) = m.$$

Ранг і цикломатичне число – найважливіші характеристики графа.

Теорема.

Нехай G' граф, одержаний з графа G додаванням нового ребра між вершинами x_i та x_j . Тоді:

1) якщо $x_i = x_j$ чи вони можуть бути з'єднані ланцюгом в G, то

$$\rho(G') = \rho(G)\ ,\ \ \nu(G') = \nu(G) + 1;$$

2) якщо $x_i \neq x_j$ чи вони не можуть бути з'єднані ланцюгом в G, то

$$\rho(G') = \rho(G) + 1\ ,\ \nu(G') = \nu(G).$$

Доведення.

Якщо виконується умова 1, то додавання нового ребра кількості компонент зв'язності графа не змінює. Очевидно, що $n' = n,\ m' = m + 1,\ p' = p$.

Тому

$$\rho(G') = n' - p' = n - p = \rho(G),$$
$$\nu(G') = m' - n' + p' = (m+1) - n + p = (m - n + p) + 1 = \nu(G) + 1.$$

Випадок 1 доведено.

Якщо ж виконується умова 2, то додане ребро – перешийок між компонентами зв'язності графа G, тому воно зменшує їх кількіть на 1.

У цьому випадку $n' = n,\ m' = m + 1,\ p' = p - 1$.

Тоді

$$\rho(G') = n' - p' = n - (p - 1) = (n - p) + 1 = \rho(G) + 1,$$
$$\nu(G') = m' - n' + p' = (m+1) - n + (p - 1) = m - n + p = \nu(G).$$

Випадок 2 доведено.

Теорему доведено.

4. Дерева і ліси

Ациклічний зв'язний граф називається деревом.

Кістяковим деревом графа називається такий його суграф (підграф, що містить всі вершини графа), що є деревом.

Ациклічний граф називається лісом.

Відповідно, кістяковим лісом графа називається пряма сума кістякових дерев усіх компонент зв'язності графа.

Кістяковий ліс зв'язного графа складається з єдиного дерева.

Кістякові дерева з'явилися в роботах Кірхгофа, який у 1847 р. Розробив теорію дерев для визначення сили струму в кожному провіднику та кожному контурі електричної схеми.

Пізніше, в 1857 р. Келі розглядав дерева як модель насичених вуглеводнів та розв'язав задачі перерахування дерев.

Дерева (головним чином, кореневі орієнтовані з навантаженими вузлами та дугами) широко використовуються в обробці інформації.

Досить назвати такі, як пошук та сортування, трансляція, стискання даних та штучний інтелект.

Основні властивості дерев

Теорема. Для довільного графа $G = (V, E)$ з n вершинами і m ребрами наступні твердження рівносильні:

1) G — дерево (ациклічний зв'язний граф);

2) G — зв'язний граф і $m = n - 1$;

3) G — ациклічний граф і $m = n - 1$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) За означенням дерева достатньо довести, що $m = n - 1$. Зробимо це індукцією за кількістю вершин n. При $n = 1$ та $n = 2$ деревами є K_1 і K_2, в яких $m = n - 1$. Нехай твердження виконується для всіх дерев з кількістю вершин не більше t ($t \geq 2$). Розглянемо довільне дерево з $t + 1$ вершиною й вилучимо з нього довільне ребро. Граф ациклічний, тому одержимо граф з двома компонентами зв'язності. Кількості вершин t_1 і t_2 у цих компонентах не більше t, тому для них виконується припущення індуції, тобто загальна кількість ребер в одержаному графі дорівнює $(t_1 - 1) + (t_2 - 1)$, причому $t_1 + t_2 = t + 1$. З урахуванням вилученого ребра загальна їх кількість у дереві з $t + 1$ вершиною дорівнює $(t_1 - 1) + (t_2 - 1) + 1 = t$. Отже, за індукцією твердження доведено.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Достатньо довести ациклічність. Припустимо супротивне: зв'язний граф з $n - 1$ ребрами має цикл. Тоді будь-яке ребро, що входить до складу цього циклу, можна вилучити і одержати зв'язний граф. У цьому графі

залишиться n - 2 ребра, а це неможливо (зв'язний n - вершинний граф повинен мати принаймні n - 1 ребро). Суперечність.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Достатньо довести зв'язність графа. Припустимо супротивне: нехай він має k компонент зв'язності з кількостями вершин $n_1, n_2, \ldots, n_k$; $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Граф ациклічний, тому кожна його компонента зв'язності є деревом, і за переходом (1) $\Longrightarrow$ (2) i-а компонента має n_i -1 ребро. Тоді граф має $(n_1 -1)+(n_2 -1) + \ldots + (n_i -1) = n - k$ ребер. За умовою кількість ребер дорівнює n -1, тому $k = 1$, тобто граф зв'язний.

Кістякові дерева й ліси

Щоб отримати кістякове дерево зв'язного графа $G = (V, E)$, можна послідовно вилучати з нього ребра, що входять до складу хоча б одного циклу. Кожного разу одержується зв'язний граф. Граф скінченний, тому на деякому кроці залишиться ациклічний зв'язний граф, який буде кістяковим деревом графа. При цьому ми вилучимо $|E| - |V| +1$ ребер. Зауважимо, що ребро зв'язного графа, інцидентне кінцевій вершині, входить в усі зв'язні суграфи графа, оскільки вилучення такого ребра робить відповідну вершину ізольованою.

Для побудови кістякового ліса для незв'язного графа слід побудувати кістякове дерево для кожної його компоненти зв'язності. Ця операція потребує вилучення $|E| - |V| + k$ ребер, де k — кількість компонент зв'язності графа. З наведеного алгоритму випливає наступне твердження.

Теорема. Зв'язний граф має кістякове дерево.

Теорема. Граф G є лісом тоді й тільки тоді, коли $\nu(G) = 0$.

Теорема. Ліс з дерев, який містить n вершин, має $n - k$ ребер.

Приклад 1. Для довільного дерева $G = (V, E)$ з n вершинами виконується $\sum_{v\in V} deg(v) = 2(n-1)$ (дерево T із n вершинами має n – 1 ребро).

Приклад 2. Будь-яке нетривіальне дерево $G = (V, E)$ має принаймні дві кінцеві вершини.

Припустимо, що дерево G має менше двох кінцевих вершин. Тоді степінь лише однієї вершини може дорівнювати 1, а степені всіх інших – не менші 2.

Отже, $\sum \deg(v) \geq 2(n-1)+1 = 2n-1, \quad v \in V$, що суперечить результату попереднього прикладу.

Приклад 3. Ліс F, який має n вершин і складається з k дерев, містить $n - k$ ребер.

Дійсно, якщо дерево G_i лісу F має n_i вершин, то воно містить $n_i - 1$ ребро, $i = 1, 2, \ldots, k$. Додаючи кількості ребер кожного з дерев G_i, дістанемо кількість $n - k$ ребер у F.

Приклад 4. У графі G із n вершинами, який має більше ніж $n - 1$ ребро, є принаймні один цикл.

Розглянемо довільний граф G із n вершинами та кількістю ребер, яка перевищує $n - 1$. Припустимо, що G – ациклічний граф. Тоді G – ліс, що складається з k дерев ($k \geq 1$). За попередньою задачею кількість ребер у такому графі дорівнює $n - k$; тоді $n - k > n > 1$, тобто $k < 1$, що неможливо.

Лекція 4. Розфарбовування графа

План

1. Плоскі та планарні графи
2. Задача про чотири фарби. Правильне розфарбування графа
3. Практичне застосування розфарбування графів
4. Деякі спеціальні види графів

1. Плоскі та планарні графи

Граф називають плоским, якщо його діаграму можна зобразити на площині таким чином, щоб лінії, які відповідають ребрам графа, не перетиналися (тобто мали спільні точки тільки у вершинах графа). Таке зображення називають плоскою картою графа.

Граф називають планарним, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу. Граф на рисунку 16 *а*) – планарний, оскільки він ізоморфний графу, що зображений поруч *б*). Простий цикл, дерево та ліс – також планарні графи.

а *б*

Рис. 16

Про планарні графи кажуть, що вони укладаються на площині (мають плоске укладання).

Жордановою кривою називатимемо неперервну лінію, що не перетинає сама себе. Гранню плоского графа називають множину точок площини, кожну пару яких можна з'єднати жордановою кривою, що не перетинає ребер графа. Межею грані вважають замкнений маршрут, що обмежує цю грань.

Плоский граф розбиває всю множину точок площини на грані так, що кожна точка належить деякій грані. Плоский граф має одну, причому єдину, необмежену грань . Її називають зовнішньою, а всі інші грані – внутрішніми.

Множину граней плоского графа позначатимемо через P.

Степенем грані r називають довжину циклічного шляху, що обмежує грань r, тобто довжину межі грані r (позначають $\otimes_r$).

На рисунку 17 зображено плоский граф із п'ятьма гранями

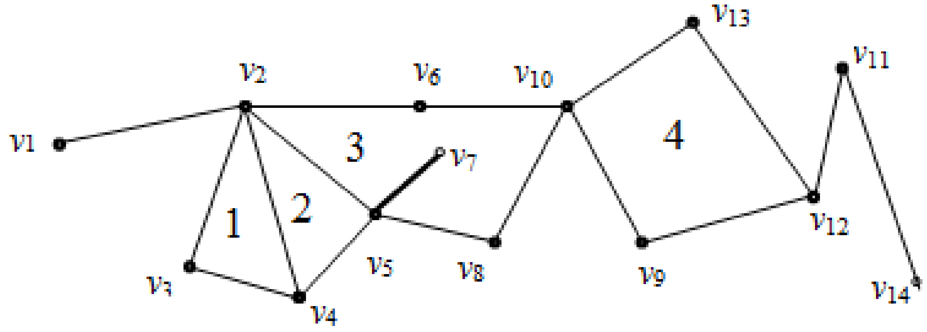


Рис. 17

У цьому графі v_3, (v_3, v_2), v_2, (v_2, v_4), v_4, (v_4, v_3), v_3 – циклічний шлях, що обмежує грань 1,

v_2, (v_2, v_5), v_5, (v_5, v_7), v_7, (v_7, v_5), v_5, (v_5, v_8), v_8, (v_8, v_{10}), v_{10}, (v_{10}, v_6), v_6, (v_6, v_2), v_2 - циклічний шлях для грані 3.

Отже, $\otimes_1 = 3$ і $\otimes_3 = 7$.

Максимальним планарним графом називають планарний граф, який при додаванні до нього будь-якого ребра перестає бути планарним.

Плоский зв'язний граф, кожну грань якого (включаючи й зовнішню) обмежено трикутником, називають тріангуляцією.

Можна довести, що граф є максимальним плоским графом тоді й тільки тоді, коли він – тріангуляція.

1. Довести, що для плоского графа $G = (V, E)$ виконується рівність

$$\sum_{r \in P} \otimes_r = 2|E|$$

Кожне ребро плоского графа або розділяє дві різні грані, або лежить усередині однієї грані (наприклад на рисунку 17 це ребро (v_5, v_7)). Отже, кожне ребро графа

G або входить у межі тільки двох граней, або є елементом межі лише однієї грані, але при циклічному обході цієї грані таке ребро проходять двічі. Тому кожне ребро плоского графа вносить у розглядувану суму дві одиниці.

2. Довести, що для будь-якого зв'язного плоского графа $G = (V, E)$ виконується формула Ейлера

$$|V| - |E| + |P| = 2.$$

Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний плоский граф із $n = |V|$ вершинами, а $T = (V, E_T)$ – деяке його кістякове дерево. Дерево T має тільки одну грань (зовнішню). Кількість ребер дерева T становить $|E_T| = |V| - 1$. Отже, для кістякового дерева T формула виконується.

Послідовно проводитимемо в дереві T ребра графа G із множини $E \setminus E_T$. При цьому на кожному кроці процедури кількість вершин $|V|$ залишатиметься незмінною, а кількості ребер і граней одночасно збільшуватимуться на одиницю. Таким чином, формула Ейлера виконується після кожної такої операції, тому вона справджується й для графа G, який отримаємо на завершення всієї процедури.

При дослідженні плоских графів особливе місце займають графи K_5 і $K_{3,3}$. Доведемо, що графи K_5 і $K_{3,3}$ не є планарними.

Доведемо, що граф K_5 непланарний.

Припустимо супротивне, тобто що $K_5 = (V, E)$ – планарний граф. Тоді $|E| \le 3|V| - 6$.

Однак для графа K_5 $|E| = 10$ і $|V| = 5$, тобто має виконуватись $10 \le 3\cdot 5 - 6 = 9$, що неможливо. Отже, припущення про те, що K_5 – планарний граф, неправильне.

Аналогічно методом від супротивного доведемо, що граф $K_{3,3}$ непланарний.

У графі $K_{3,3}$ жодні три вершини не є вершинами трикутника. Отже, $\otimes_r \ge 4$ для всіх граней $r \in P$. Припускаючи, що граф $K_{3,3}$ планарний, з формули Ейлера отримаємо

$|P| = |E| - |V| + 2 = 9 - 6 + 2 = 5.$

Тоді $2|E| = \sum_{r \in P} \otimes_r \ge 4|P| = 4 \cdot 5 = 20$, тобто $|E| \ge 10$, що неправильно для графа $K_{3,3}$.

Значення графів K_5 і $K_{3,3}$ полягає в тому, що вони є єдиними істотно непланарними графами.

Усі інші непланарні графи містять підграфи, подібні до K_5 або $K_{3,3}$.

Характер цієї подібності розкривається за допомогою таких понять.

Нехай $e = (v, w)$ – ребро графа G, а u не є вершиною G.

Вилучимо ребро e з графа G і додамо до нього нові ребра $e_1 = (v, u)$ та $e_2 = (v, u)$. Цю операцію називатимемо підрозбиттям ребра e.

Графи називають *гомеоморфними*, якщо їх можна отримати з одного графа за допомогою послідовного підрозбиття його ребер.

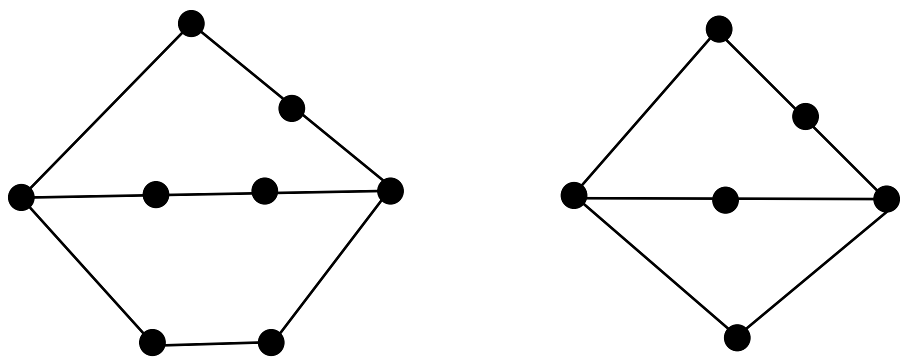


Рис. 18

На рисунку 18 зображено два гомеоморфні графи.

Очевидно, що коли граф G планарний, то будь-який граф, гомеоморфний G, також планарний.

Критерій планарності сформульовано у славетній теоремі К. Куратовського:

граф G планарний тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних K_5 або $K_{3,3}$.

У теорії графів існують також інші критерії планарності. Наведемо ще один із них.

Елементарним стягуванням графа $G = (V, E)$ називають вилучення в ньому деякого ребра $(v_i, v_j) \in E$ та злиття вершин v_i і v_j в одну вершину v, причому v інцидентна всім тим відмінним від (v_i, v_j) ребрам графа G, які були інцидентні або вершині v_i , або вершині v_j.

Кажуть, що граф G стягується до графа G', якщо G' можна отримати із G за допомогою послідовності елементарних стягувань.

Критерій планарності можна сформулювати у вигляді такого твердження: граф планарний тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів, що стягуються до K_5 або $K_{3,3}$.

Наведені критерії дають змогу перевірки планарності графів. Існують алгоритми, які, установивши планарність графа, будують для нього можливе плоске укладання.

2. Задача про чотири фарби. Правильне розфарбування графа

Так склалося історично, що окреме місце у теорії графів займають дослідження з розфарбування планарних графів. Це пов'язано зі відомою проблемою (гіпотезою) чотирьох фарб.

Грані плоскої карти назвемо суміжними, якщо їхні межі мають принаймні одне спільне ребро.

Гіпотеза чотирьох фарб виникла у зв'язку з розфарбуванням друкованих географічних карт (звідси й термін плоска карта) і була сформульована так: грані довільної плоскої карти можна розфарбувати не більше ніж чотирма фарбами так, що будь- які суміжні грані матимуть різні кольори.

Згодом з'явилось інше, рівносильне, формулювання гіпотези чотирьох фарб: для правильного розфарбування вершин довільного планарного графа потрібно не більше чотирьох фарб.

Ця гіпотеза виникла в середині XIX ст. Більше ста років дослідники намагалися її довести чи спростувати. У результаті багаторічних досліджень виявилось, що для розв'язання проблеми чотирьох фарб потрібно перевірити її справедливість для скінченої кількості графів певного вигляду. Кількість варіантів, які потрібно було перебрати, була настільки великою, що тільки за допомогою потужної ЕОМ, яка неперервно працювала протягом більше двох місяців, у 1976 р. справедливість гіпотези чотирьох фарб було підтверджено. Однак такий експериментальний спосіб доведення не зовсім влаштовує багатьох професіональних математиків, тому вони продовжують пошуки аналітичного доведення гіпотези.

Нехай G – плоский неорієнтований граф, який, не має кратних ребер. Розглядають розфарбування граней графа, його ребер і вершин.

Означення. Будь-яке відображення $f : V \to N_k$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність деяке натуральне число $f(v) \in N_k$, називають розфарбуванням графа G.

Число $f(v)$ називають кольором, або номером фарби, вершини v.

Означення. Розфарбування f графа G називають правильним, якщо для будь-яких його суміжних вершин v і w виконується $f(v) \neq f(w)$.

Означення. Мінімальне число k, для якого існує правильне розфарбування графа G, називають хроматичним числом графа G і позначають $\chi(G)$.

Мінімальним правильним розфарбуванням графа G називають правильне розфарбування для $k = \chi(G)$.

Для певних типів графів визначити хроматичні числа не складно.

Наприклад, 1-хроматичними є порожні графи $G = (V, \varnothing)$ і тільки вони.

Хроматичне число повного графа K_n дорівнює n.
Хроматичне число довільного двочасткового графа – 2.
2-х хроматичні графи часто називають біхроматичними.

Неважко обґрунтувати такі твердження.

Якщо кожна зв'язна компонента графа G потребує для свого правильного розфарбування не більше k фарб, то $\chi(G) \leq k$.

Граф є біхроматичним тоді й тільки тоді, коли він двочастковий. Зокрема, усі дерева та прості цикли парної довжини C_{2k} біхроматичні. Водночас $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

Доведемо, що для довільного графа G виконується нерівність $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, де $\Delta(G)$ – найбільший зі степенів вершин графа G.

Доведення проведемо індукцією за кількістю n вершин графа G.

Для тривіального графа ($n = 1$) і графів із двома вершинами нерівність виконується.

Нехай твердження теореми виконується для всіх графів із кількістю вершин t ($t \geq 2$).

Розглянемо довільний граф G із $t + 1$ вершиною. Вилучимо з нього деяку вершину v. Одержимо граф G', степені всіх вершин якого не перевищують $\Delta(G)$. Отже, за припущенням індукції для правильного розфарбування G' потрібно не більше ніж $\Delta(G) + 1$ фарб. Правильне розфарбування для G одержимо з правильного розфарбування графа G', якщо пофарбуємо вершину v у колір, відмінний від кольорів усіх суміжних із v вершин. Оскільки таких вершин не більше ніж $\Delta(G)$, то для правильного розфарбування графа G достатньо $\Delta(G) + 1$ фарб.

3. Практичне застосування розфарбування графів

Розглянемо деякі практичні задачі, які зводяться до розфарбовування графів.

Задача складання розкладу

Припустимо, що потрібно прочитати декілька лекцій у найкоротший термін. Кожна лекція окремо займає одну годину, але деякі лекції не можна читати одночасно (наприклад, якщо це робить один і той самий лектор, або лекції читаються одній і тій самій групі студентів). Побудуємо граф G, вершини якого взаємно однозначно відповідають лекціям, і дві вершини суміжні тоді й тільки тоді, коли відповідні лекції не можна читати одночасно.

Очевидно, що будь-яке розфарбування цього графа задає можливий розклад: лекції, які відповідають вершинам одноколірного класу, читають одночасно. Навпаки, будь-який можливий розклад задає розфарбування графа G. Оптимальні розклади відповідають розфарбуванням мінімальною кількістю кольорів, а час, потрібний для читання всіх лекцій, дорівнює $\chi(G)$.

Задача розподілу обладнання

Задано множину $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ і $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ відповідно робіт і механізмів. Для виконання кожної роботи потрібен певний час, однаковий для всіх робіт, і якісь механізми. Жоден із механізмів не може бути зайнятий на декількох роботах одночасно. Потрібно розподілити механізми так, щоб загальний час виконання всіх робіт був мінімальним.

Побудуємо граф G з множиною вершин V, вершини v_i та v_j $(i \neq j)$ якого суміжні тоді й лише тоді, коли для виконання робіт v_i та v_j потрібний хоча б один спільний механізм. Розфарбуємо граф G. Роботи, що відповідають вершинам одного кольору, можна виконувати одночасно, а мінімальний час виконання всіх робіт відповідає розфарбуванню мінімальною кількістю кольорів.

Задача призначення телевізійних каналів

Передавальні станції зображають вершинами графа. Якщо відстань між будь-якими двома станціями менша за l, то відповідні вершини графа з'єднують ребром. Граф розфарбовують зіставляючи різним кольорам вершин різні канали. Мінімальна кількість каналів відповідає розфарбуванню графа мінімальною кількістю кольорів.

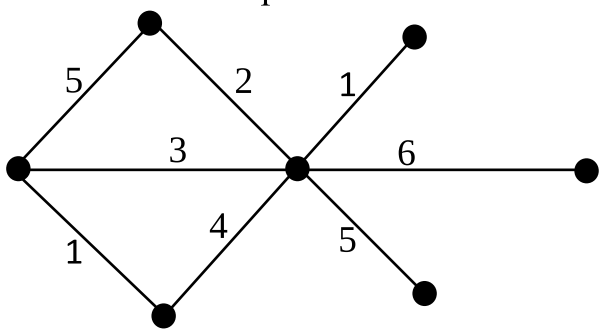


Рис.19

Наприклад, у графа на рисунку 19 максимальний степінь вершини 6, тобто 6 ребер є суміжними і повинні бути розфарбовані різними фарбами, тому менше, ніж 6 фарб неможливо використати для правильного розфарбування. На рисунку наведено один із способів правильного реберного розфарбування заданого графа.

Розглянемо наступні приклади, які приведуть до важливих результатів.

Приклад 1. Довести, що для правильного розфарбування довільного планарного графа потрібно не більше шести фарб.

Доведення. Доведення виконаємо індукцією за кількістю n вершин графа.

Для $n \leq 6$ твердження очевидне.

Припустимо, що хроматичне число всіх планарних графів із t вершинами не перевищує 6 ($t \geq 6$). Розглянемо довільний планарний граф G із $t + 1$ вершиною. У графі G існує вершина v, степінь якої не більше 5. Вилучимо вершину v із графа G. Отримаємо граф G', вершини якого за припущенням індукції можна правильно розфарбувати не більше ніж у шість кольорів.

Тоді правильне розфарбування для G отримаємо з одержаного правильного розфарбування графа G', надаючи вершині v колір, відмінний від кольорів усіх суміжних із нею вершин. Оскільки таких вершин не більше п'яти, то для виконання цієї процедури достатньо шести фарб.

Отже,

$$\chi(G) \leq 6.$$

(Можна переконатись у справедливості такого твердження: для довільного планарного графа G виконується $\chi(G) \leq 5$).

Граф G називають критичним, якщо хроматичне число підграфа G', отриманого в результаті вилучення будь-якої вершини із G, строго менше, ніж хроматичне число графа G.

Критичний граф G, для якого $k = \chi(G)$, називають k-критичним.

Приклад 2. Довести, що довільний критичний граф є зв'язним.

Доведення. Припустимо, що деякий критичний граф G є незв'язним і має кілька компонент зв'язності. Вилучимо довільну вершину з тієї компоненти зв'язності графа G, хроматичне число якої не перевищує хроматичні числа решти компонент зв'язності. Отримаємо суперечність, оскільки після такого вилучення хроматичне число графа G не зміниться.

Існують планарні графи, хроматичне число яких дорівнює 4. Найпростішим таким графом є K_4. Отже, гіпотезу чотирьох фарб не можна вдосконалити, перетворивши на гіпотезу трьох фарб.

Література

1. Нікольський Ю.В, Пасічник В.В, Щербина Ю.М. Дискретна математика. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
2. Кривий С.Л. Дискретна математика: підручник для студентів вищ. навч. закл.– Чернівці-Київ: Видавничий дім «Букрек», 2014. – 568 с.
3. М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.
4. Ю.В. Нікольський, Ю.М. Щербина. Збірник задач з дискретної математики. Львів, ЛДУ ім. І.Франка, 1998.
5. Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw-Hill, Inc, 1988.
6. Базилевич Л. Дискретна математика у прикладах і задачах : підручник / Л. Базилевич. – Л. : Видавець І. Е. Чижиков, 2013. – 487 с.
7. Карнаух Т. О. Вступ до дискретної математики / Т. О. Карнаух, А. Б. Ставровський. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2006. – 113 с.
8. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: Навч. посіб. –К.: Вид. дім дім "Києво-Могилянська Академія", 2009.
9. Матвієнко М. П. Дискретна математика : навч. посіб. / М. П. Матвієнко. – К. : Видавництво "Ліра-К", 2013. – 348 с.
10. Борисенко О. А. Дискретна математика : підручник О. А. Борисенко. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2007. – 255 с.
11. Ядренко М. Й. Дискретна математика : навч. посіб. М. Й. Ядренко. – К. : ВПЦ "Експрес", 2003. – 244 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Курс лекцій з дисципліни
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
розділ «ТЕОРІЯ ГРАФІВ»

для студентів факультету
«Комп'ютерно- інформаційних систем і програмної інженерії»

Укладачі: Надія КРИВА
Наталія БЛАЩАК

Підписано до друку ___________ Формат 60х84 1/16. Ум. др. арк. 1. Друк лазерний. Замовлення № _____. Наклад 10 пр.
Віддруковано у видавництві ТНТУ.