УДК 534.1
Ю.Б. Гладьо, к.т.н., доцент
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

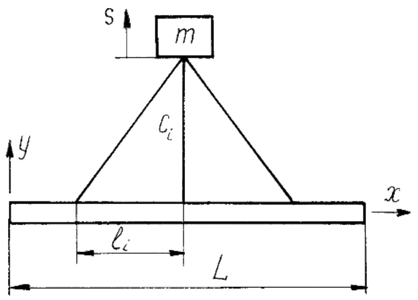
ОРТОГОНАЛЬНІСТЬ ВЛАСНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ ДЛЯ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ "БАЛКА - КАНАТИ - ЗОСЕРЕДЖЕНА МАСА"

Yu. Hlado, Ph.D, Assoc. Prof

ORTHOGONALITY OF NATURAL VIBRATION FORM FOR ELASTIC SYSTEM "BEAM - LINKS - CONCENTRATED MASS"

Abstract. An oscillating system consisting of a concentrated mass and an elastic weighted beam connected by a system of weightless elastic ropes is considered. A specific type of orthogonality of eigenforms with a displacement caused by a concentrated mass has been found. The obtained result makes it possible to decompose the initial conditions and loads acting on the system into a series.

Знаходження ортогональних функцій при розв'язку задач динаміки систем з розподіленими параметрами дозволяє розкласти зовнішні збудження та початкові умови в нескінченний ряд по шуканих ортогональних функціях. Розглянемо випадок коливальної системи, що складається із зосередженої маси, що імітує механізм підйому, та пружної вагомої балки (вантажу), зв'язаних за допомогою системи невагомих пружних канатів, як зображено на малюнку.



Відомо [1, 2], що поперечні коливання балки, яка складається із кількох ділянок, на кожній із них можуть бути записані, згідно методу Фур'є, у вигляді нескінченного ряду

$$y_i(x_i, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, Y_{ik}(x_i) \qquad (1)$$

Тоді рівняння для визначення власних форм Y_{ik} на кожній i -й ділянці балки матиме вигляд

$$\frac{d^4 Y_{ik}}{dx_i^4} - \frac{\lambda_k^4}{L^4} Y_{ik} = 0. \qquad (2)$$

де λ_k - власне число k -ї форми коливань.

Граничні умови та умови спряження ділянок передбачають вільні кінці (3) - відсутність згинного моменту та перерізуючої сили, а також рівності прогинів, кутів повороту та згинних моментів на границях ділянок (4), на відміну від цього перерізуюча сила має стрибок при переході з ділянки на ділянку на велчину зусилля в пружному канаті (5):

$$Y''_{1,k}(0) = 0;\ Y'''_{1,k}(0) = 0;\ Y''_{n+1,k}(l_{n+1}) = 0;\ Y'''_{n+1,k}(l_{n+1}) = 0; \qquad (3)$$
$$Y_{i,k}(l_i) = Y_{i+1,k}(0);\ Y'_{i,k}(l_i) = Y'_{i+1,k}(0);\ Y''_{i,k}(l_i) = Y''_{i+1,k}(0); \qquad (4)$$

$$Y'''_{i,k}(l_i) - \frac{C_i}{EJ}[Y_i(l_i) - S_k] = Y'''_{i+1,k}(0). \quad (5)$$

де E та J - відповідно, модуль пружності та момент інерції перерізу балки,
S_k - коефіцієнт розкладу коливань приєднаної маси m у нескінчений ряд
$S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k T_k$

Власні коливання маси m на кожній із власних частот записуються у вигляді наступного рівняння [3]

$$mS_k\omega_k^2 + \sum_{i=1}^{n} C_i\left[Y_{i,k}(l_i) - S_k\right] = 0;$$

де $\omega_k^2 = \frac{\lambda_k^4 EJ}{\rho L^4}$ - цей вираз пов'язує власні числа і частоти коливань [3].
Звідси коефіцієнти розкладу визначаються

$$S_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i Y_i(l_i)}{\sum_{i=1}^{n} C_i - m\omega_k^2}\ .$$

Дослідження ортогональності власних форм виявило, що власні форми не є ортогональними, тобто

$$\int_0^L Y_k Y_j dx \neq 0,$$

Розклад у ряд Фур'е за звичайним методом неможливий внаслідок неортогональності власних форм коливань балки. Знайдено специфічний тип ортогональності - ортогональність власних форм із зміщенням, що спричиняється зосередженою масою, виду:

$$\int_0^L Y_k\left(Y_j - S_j\right)dx = 0,$$

Як показало дослідження ортогональними між собою виявились дві системи функцій Y_k та $\left(Y_j - S_j\right)$, тобто кожен елемент однієї системи функцій ортогональний з довільним елементом іншої.

У цьому випадку розклад довільної функції $f(x)$ в ряд за власними функціями Y_k може бути записаний:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^L f(x)(Y_k - S_k)dx}{\int_0^L Y_k(Y_k - S_k)dx} Y_k. \quad (6)$$

Згідно виразу (6) можливо розкласти у вигляді нескінченого ряду за власними числами початкові умови та зовнішні навантаження, що діють на систему. Отриманий результат застосовується для визначення зусиль та переміщень в пружних системах вказаного типу.

Література

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М: Наука, 1967. 444 с.
3. Гладьо Ю.Б. Колебания упругосвязанных балки и сосредоточенной массы. Київ: Проблемы прочности, 1984, №5, С. 64-66.