**УДК 330.43+336.764.2**

**В. С. Янішевський, к. ф.-м. н., доц.**
Національний університет "Львівська політехніка", Україна

# ФРАКТАЛЬНИЙ БРОУНІВСЬКИЙ РУХ В МОДЕЛЯХ ФІНАНСОВОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

**V. S. Yanishevskyi, Ph. D., Assoc. Prof.**

# FRACTAL BROWNIAN MOTION IN FINANCIAL ENGINEERING MODELS

**Abstract**. The Gaussian measure of fractal Brownian motion (FBM) was analyzed and a one-point probability density based on it and the Fokker-Planck (FP) equation for it were found. A general solution of the FP equation for the conditional probability density of the FBI in the form of a functional integral has been found. Based on the Gaussian measure with a modified covariance, the conditional probability density for the stochastic equation (with the FBI as a base) is determined and presented in the form of a functional integral.

У побудові багатьох стохастичних моделей фінансової інженерії базову роль відіграє броунівський рух [1, 2]. Зокрема геометричний броунівський рух який використовується для моделювання еволюції цін фінансових активів [1]. Розглядаються також моделі на основі фрактального броунівського руху (ФБР) в якості базового [3, 4, 5]. Досліджувались як властивості ФБР так і його застосування для ряду прикладних задач. Зокрема, наведено узагальнення формули Іто для ФБР, на її основі отримано рівняння Фоккера-Планка (ФП) для густини умовної ймовірності. Зазначене рівняння ФП застосовувалося для узагальнення формули Блека-Шоулза для ціни опціону [6, 7].

В даній роботі отримано розв'язок рівняння ФП для густини умовної ймовірності у випадку ФБР у вигляді функціонального інтегралу. Такий же розв'язок отримано з використанням гаусової міри ФБР, при цьому визначена умова, коли знайдені розв'язки співпадають.

ФБР $B(\tau)$ на часовому інтервалі $\tau \in [0, t]$ визначають як гаусовий процес з нульовим середнім $< B(\tau) >= 0$ та коваріацією [3, 4, 5]

$$R_H(\tau, s) = \frac{1}{2}(\tau^{2H} + s^{2H} - |\tau - s|^{2H}). \quad (1)$$

На основі (1) отримаємо властивості: $< B(\tau)B(s) >= R_H(\tau, s), < B(\tau)^2 >= \tau^{2H}$. Тут $s, \tau \in [0, t], 0 < H < 1$. З формули (1) для $H = \frac{1}{2}$ отримаємо коваріацію для броунівського руху

$$R(\tau, s) = \frac{1}{2}(\tau + s - |\tau - s|) = \min(\tau, s).$$

Відмінною властивістю ФБР, зокрема для $H > \frac{1}{2}$, є довгочасова залежність між приростами

$$r(n) =< B(1)(B(1 + n) - B(1)) >, \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \to \infty.$$

Для броунівського руху ($H = \frac{1}{2}$) отримаємо $r(n) = 0$ для $\forall n > 1$.

Оскільки ФБР є гаусовим процесом з коваріацією (1) йому відповідає гаусова міра. Розглянемо певну дискретну реалізацію процесу ФБР на проміжку $[0, t]$ і задамо розбиття часового інтервалу $(0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t)$. Цьому розбиттю співставимо випадковий вектор значень ФБР $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n)$. Тоді густина ймовірності розподілу $n$ - вимірного випадкового вектора $\mathbf{B}$ (гаусова міра) визначається виразом

$$\mu(\mathbf{B}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\det\hat{R}^{-1}}\exp(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} B_i\hat{R}_{ij}^{-1}B_j). \quad (2)$$

Тут $R_{ij}^{-1}$ позначають елементи матриці оберненої до коваріаційної матриці $\hat{R}$: $\hat{R} = \| R_{ij} \|, i,j = 1 \dots n, R_{ij} = R_H(t_i, t_j)$.

Густину умовної ймовірності для ФБР визначимо на основі міри (2) наступним інтегралом

$$P(B,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\mathbf{B}) \delta(B - B_n) \prod_{i=1}^{n} dB_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_H(t)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{B^2}{R_H(t)}}, \quad (3)$$

Тут введено позначення для діагональних елементів $R_H(t) \equiv R_H(t,t) = t^{2H}$ матриці коваріації (1). Очевидно, густина умовної ймовірності (3) задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial P(B,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} R'_H(t) \frac{\partial^2 P(B,t)}{\partial B^2}. \quad (4)$$

Відомо також, що ФБР не є марківським процесом і також не є мартингалом. Тому для ФБР звичне стохастичне числення як у випадку броунівського руху не застосовне. Для стохастичної величини $r(\tau)$, яка задається стохастичним рівнянням [4-7]

$$dr(\tau) = A(r(\tau))d\tau + \Sigma(r(\tau))dB(\tau), \quad (5)$$

для густини умовної ймовірності стохастичного процесу (5) отримано рівняння ФП [3-5]

$$\frac{\partial P(t,r)}{\partial t} = \frac{1}{2} R_{H'}(t) \frac{\partial^2 \Sigma(r)^2 P(t,r)}{\partial r^2} - \frac{\partial A(r) P(t,r)}{\partial r}. \quad (6)$$

У випадку $A(r(\tau)) = 0, \Sigma(r(\tau)) = 1$ ми отримуємо ФБР і рівняння (4). Зрозуміло також, що для $H = 1/2$ отримаємо $R_{H'}(t) = 1$ і рівняння ФП (6) переходить у відповідне рівняння для броунівського руху [1, 2].

Розв'язки рівняння (6) розглядались для ряду випадків стохастичних рівнянь, що є узагальненням рівняння Блека-Шоулза в моделі опціонів [1]. Загальний розв'язок рівняння (6) у вигляді функціонального інтегралу наведено в додатку.

В той же час, рівняння ФП (6) неможливо отримати на основі гаусової міри (2). Для того, щоб встановити відповідну гаусову міру (матрицю $\hat{R}$) пов'язану з рівнянням ФП (6) та його розв'язком (11), запишемо коваріацію (1) у тотожному вигляді

$$R_H(t,s) = \min(R_H(t), R_H(s)) + \frac{1}{2}(|R_H(t) - R_H(s)| - R_H(|t-s|)),$$

де $R_H(t) = t^{2H}$.

Покажемо, що рівняння ФП (6) відповідає стохастичному процесу з коваріацією

$$\tilde{R}_H(t,s) = \min(R_H(t), R_H(s)). \quad (7)$$

Для цього використаємо гаусову міру записану через прирости ФБР $d\mathrm{B} = \{B_1, B_2 - B_1, \dots, B_n - B_{n-1}\}$. Тоді для відповідної матриці гаусової міри отримаємо

$$(\delta^2 \tilde{R})_{ij} = R'_H(t_{i-1}) dt_i \delta_{ij}, (i,j \in 1, \dots, n).$$

В результаті гаусову міру для стохастичного процесу з коваріацією (7) запишемо у вигляді

$$\tilde{\mu}(d\mathbf{B}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{dB_i}{\sqrt{2\pi R'_H(t_{i-1}) dt_i}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{dB_i^2}{R'_H(t_{i-1}) dt_i}\right). \quad (8)$$

Відповідно у границі $n \to \infty, \max(dt_i) \to 0$ в неперервному випадку міру (8) запишемо у вигляді

$$d\tilde{\mu}(B) = \mathcal{D}_H B(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{B(\tau)}{d\tau}\right)^2 \frac{d\tau}{R'_H(\tau)}\right), \mathcal{D}_H B(\tau) = \prod_\tau \frac{dB(\tau)}{\sqrt{2\pi R'_H(\tau) d\tau}}. \quad (9)$$

Очевидно, що у випадку $H = \frac{1}{2}$ міра (9) співпадає з мірою Вінера для броунівського руху. Таким чином, коваріація (7) задає стохастичний процес з властивостями: $< B(\tau)B(s) >= \min(R_H(t), R_H(s)), < B(\tau)^2 >= R_H(t)$. Прирости стохастичного процесу незалежні $< \big(B(s_2) - B(s_1)\big)\big(B(t_2) - B(t_1)\big) >= 0, s_1 < s_2 < t_1 < t_2$, і відповідно $< dB(t)^2 >= R'_H(t) dt$.

На основі міри (9) можна побудувати міру для стохастичного процесу $r(\tau)$ стохастичного рівняння (5) способом наведеним у [8]. Виконуючи необхідні обчислення (деталі див. також в [8]) для густини ймовірності отримаємо представлення функціональним інтегралом, який наведений в формулах (11), (12) і (13). Таким чином рівняння ФП (6) відповідає наближенню (7) для коваріаційної матриці фрактального броунівського руху.

**Додаток**

Рівняння (11) перепишемо виконуючи заміну часової змінної $\tau = R_H(t)$. Тоді рівняння (11) запишемо в залежності від "часової змінної" $\tau$ у вигляді

$$\frac{\partial \tilde{P}(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Sigma(r)^2 \tilde{P}(r,\tau)}{\partial r^2} - \frac{\partial \tilde{A}(r,\tau)\tilde{P}(r,\tau)}{\partial r}, \quad (10)$$

де позначено $\tilde{P}(r,\tau) = P(r,t), \tilde{A}(r,\tau) = \frac{A(r)}{2H\tau^{1-\frac{1}{2H}}}$. Розв'язок рівняння ФП (10) на часовому інтервалі $[0,\tau]$ (відповідає інтервалу $[0,t]$), розглядаємо випадок $\frac{1}{2} < H < 1$) у формі функціонального інтегралу знайдений у [8].

Повертаючись до часової змінної $t$ отримаємо вираз для розв'язку рівняння Фоккера-Планка (6) для густини ймовірності у вигляді функціонального інтегралу

$$P(r, r_0, t) = \sqrt{\frac{\Sigma(r_0)}{\Sigma(r)^3}} \int_{r_0}^{r} \mathcal{D}r(\tau) \exp(-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\dot{r}(\tau) - A(r(\tau)))^2}{R'_H(\tau)\Sigma(r(\tau))^2} d\tau - \int_0^t u(r(\tau)) d\tau), \quad (11)$$

де $u(r(\tau)) = \frac{1}{2}A'(r(\tau)) - A(r(\tau))\frac{\Sigma'(r(\tau))}{\Sigma(r(\tau))} + R'_H(\tau)\frac{1}{8}(\Sigma'(r(\tau))^2 - 2\Sigma(r(\tau))\Sigma''(r(\tau)))$, (12)

а також елемент міри в (11) рівний

$$\tilde{\mathcal{D}}r(\tau) = \prod_\tau \frac{dr(\tau)}{\sqrt{2\pi R'_H(\tau)\Sigma(r(\tau))^2 d\tau}}. \quad (13)$$

**Література**

1. Yuh-Dauh Lyuu. Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms. Cambridge University Press, 648 p. (2004).
2. C. Gardiner. Handbook of Stochastic Methods - For Physics, Chem, Nat. Sciences. Springer, 417 p. (2004).
3. Umarov Sabir, Hahn Marjorie G. Kobayashi Kei. Beyond the triangle: Brownian motion, Ito calculus, and Fokker-Planck equation: fractional generalizations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 177 p. (2018).
4. Ivan Nourdin. Selected Aspects of Fractional Brownian Motion. Springer-Verlag Italia, 133 p. (2012).
5. Nualart D. The Malliavin Calculus and Related Topics. 2nd edition, Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 381 p. (2006).
6. A. A. Araneda. The fractional and mixed-fractional CEV model. Journal of Computational and Applied Mathematics **363**: pp. 106–123 (2020).
7. Axel A. Araneda. European option pricing under generalized fractional Brownian motion. Preprint arXiv:2108.12042v1[q-fin.MF] (2021)
8. Yanishevskyi V. S., Baranovska S. P. Path integral method for stochastic equations of financial engineering. Mathematical Modeling and Computing, 9 (1), 166–177 pp. (2022).