УДК 539.3

В.М. Михайлишин.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ НАГРІВАННЯМ ТОНКИХ КРУГЛИХ ДИСКІВ З МЕТОЮ СТВОРЕННЯ ЗАДАНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ОБМЕЖЕННЯХ НА НАПРУЖЕННЯ

V.M.Mykhailyshyn

OPTIMUM CONTROL OF HEATING OF THIN CIRCULAR DISCS TO CREATE A GIVEN TEMPERATURE FIELD UNDER STRESS CONSTRAINTS

Abstract. The problem of finding the power of heat sources, which is necessary to create a temperature field close to the given one in a given time in a round plate, with minimal energy consumption and stress restrictions, is considered.

Розглядається задача знаходження потужності теплових джерел, необхідних для нерівномірного за радіусом нагріву тонкої круглої пластинки за заданий час до деякої температури $\theta_з(r)$ при мінімальних енергозатратах, причому термообробка повинна задовольняти деякому обмеженню (наприклад гарантується робота матеріалу в пружній області).

Припускається, що розподіл теплових джерел і умови взаємодії пластинки з зовнішнім середовищем симетричні відносно серединної площини, так що можна ввести середні за товщиною температуру і потужність теплових джерел, а напружено деформований стан вважати плоским. Основні рівняння прямої задачі для випадку конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем на лицьових поверхнях пластини наступні

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial T}{\partial x}-m^2T-\frac{\partial T}{\partial \tau}+w=0;$$
$$\frac{\partial s_r}{\partial x}+\frac{s_r-s_\varphi}{x}=0;\quad e_r=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad e_\varphi=\frac{u}{x};$$
$$s_r=G_*\left[e_r+\nu e_\varphi-\alpha(1+\nu)\theta_c(1+T)\right],$$
$$s_\varphi=G_*\left[e_\varphi+\nu e_r-\alpha(1+\nu)\theta_c(1+T)\right],$$

де позначено

$$T=\frac{(T^*-\theta_c)}{\theta_c}, w=\frac{w^*R^2}{2\lambda h}, T^*=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\theta dz, w^*=\int_{-h}^{h}W dz,\ \ m^2=\frac{\alpha R^2}{\lambda h}, \tau=\frac{at}{R^2},$$
$$x=\frac{r}{R}, u=\frac{U}{R}, s_{r,\varphi}=\frac{\sigma_{r,\varphi}}{\sigma_0}, G_*=\frac{2G}{\sigma_0(1-\nu)},$$

$\theta(z,x,\tau), W(z,x,\tau) -$ температура і потужність теплових джерел; $\lambda, a, \alpha -$ коефіцієнти теплопровідності, температуропровідності і тепловіддачі; $2h, R-$ товщина і радіус пластинки; $\theta_c -$ температура зовнішнього середовища; $U, \sigma_r, \sigma_\varphi -$ радіальне переміщення, радіальне і окружне напруження в пластинці. Початкові і граничні умови прямої задачі мають вигляд

$$T(x,\tau)|_{\tau=0}=0;\ \ T(x,\tau)|_{x=0}<\infty;\ \ \left(\frac{\partial T}{\partial x}+kT\right)\Big|_{x=1}=0;\ \ \left(k=\frac{\alpha R}{\lambda}\right);$$
$$u(x,\tau)|_{x=0}=0;\ \ s_r(x,\tau)|_{x=0}=s_\varphi(x,\tau)\big|_{x=0};\ \ s_r(x,\tau)|_{x=1}=0.$$

Приймаємо наступний функціонал якості

$$I = \int_0^{\tau^*} [T(x,\tau^*) - T_3(x)]^2 x dx + \int_0^{\tau^*}\int_0^1 w^2 x dx d\tau \to min,$$

де τ^* − безрозмірний час нагріву. Обмеження на напруження приймаємо у вигляді

$$s_r^2 - s_r s_\varphi + s_\varphi^2 \le 1.$$

Розв'язок поставленої задачі шукаємо методом множників Лагранжа. Обмеження у вигляді нерівності шляхом введення додаткової функції керування $\psi(x,\tau)$ представляємо у вигляді рівності

$$s_r^2 - s_r s_\varphi + s_\varphi^2 - 1 + \psi^2 = 0$$

і записуємо необхідну умову екстремуму розширеного функціонала задачі. В результаті отримуємо наступну спряжену задачу

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} - m^2\overline{T} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial \tau} + G_*\alpha\theta_c(1+\nu)(\overline{e}_r + \overline{e}_\varphi) = 0;$$

$$\overline{e}_r = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \overline{\psi}(2s_r - s_\varphi), \qquad \overline{e}_\varphi = \frac{\overline{u}}{x} - \overline{\psi}(2s_\varphi - s_r);$$

$$\overline{s}_r = G_*(\overline{e}_r + \nu\overline{e}_\varphi), \qquad \overline{s}_\varphi = G_*(\overline{e}_\varphi + \nu\overline{e}_r); \;\; \frac{\partial \overline{s}_r}{\partial x} + \frac{\overline{s}_r - \overline{s}_\varphi}{x} = 0;$$

$$\psi \cdot \overline{\psi} = 0; \;\; \overline{T}(x,\tau)\Big|_{x=0} < \infty;$$

$$\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + k\overline{T}\right)\Bigg|_{x=1} = 0; \;\; \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + k\overline{T}\right)\Bigg|_{x=1} = 0; \;\; w = -\frac{1}{2}\overline{T}.$$

$$\overline{T}(x,\tau^*) = 2[T(x,\tau^*) - T_3(x)]; \;\; \overline{u}(x,\tau)|_{x=0} < \infty; \;\; \overline{s}_r(x,\tau)|_{x=1} = 0.$$

Аналітичний розв'язок спряженої і прямої задач можна знайти, поклавши в рівнянні доповняльної нежорсткості спряженої задачі $\overline{\psi} = 0$, що означає не врахування обмеження на напруження. Знайдений розв'язок наступний

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} C_n J_0(\mu_n x) e^{(\mu_n^2 + m^2)\tau}; \;\; T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n sh[(\mu_n^2 + m^2)\tau] J_0(\mu_n x)}{2(\mu_n^2 + m^2)};$$

$$C_n = \frac{2a_n(\mu_n^2 + m^2)}{sh[(\mu_n^2 + m^2)\tau^*] + (\mu_n^2 + m^2)e^{(\mu_n^2 + m^2)\tau^*}};$$

$$s_r = G_* \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \left\{ (\mu_n - 1)J_0(\mu_n x) - \frac{1-\nu}{x} J_1(\mu_n x) - \left[(\mu_n - 1) - \frac{k(1-\nu)}{\mu_n}\right] J_0(\mu_n) \right\};$$

$$s_\varphi = G_* \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \left\{ (\nu\mu_n - 1)J_0(\mu_n x) + \frac{1-\nu}{x} J_1(\mu_n x) - \left[(\mu_n - 1) - \frac{k(1-\nu)}{\mu_n}\right] J_0(\mu_n) \right\};$$

$$u = \alpha\theta_c x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau) \left\{ J_1(\mu_n x) - \frac{x}{1+\nu}\left[(\mu_n - 1) - \frac{k(1-\nu)}{\mu_n}\right] J_0(\mu_n) \right\};$$

$$B_n(\tau) = \frac{C_n \alpha\theta_c(1+\nu) sh[(\mu_n^2 + m^2)\tau]}{2(\mu_n^2 + m^2)}; \;\; a_n = \frac{2\mu_n^2}{(\mu_n^2 + m^2)J_0^2(\mu_n)} \int_0^1 x T_3(x) J_0(\mu_n x) dx.$$

Власні числа μ_n задачі є додатними коренями рівняння

$$kJ_0(\mu_n) - \mu_n J_1(\mu_n) = 0.$$

Числові розрахунки для деяких випадків розподілу $\theta_3(r)$ показали задовільне співпадання температури в заданій області з необхідною і при цьому обмеження на напруження в цих випадках виконувалися.