**УДК 519.63**

**І.О. Баран, к.т.н., доцент**
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ У БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ОБЛАСТЯХ ІЗ НЕІДЕАЛЬНИМ КОНТАКТОМ

**Ihor Baran, Ph.D., Assoc. Prof.**

# MATHEMATICAL MODELING OF HEAT PROCESSES IN MULTICOMPONENT AREAS WITH NON-IDEAL CONTACT

**Abstract.** The problems described by the elliptic equation in the polar coordinate system with the conjugation conditions of non-ideal contact are considered. On the basis of the method of finite elements (FEM), computational algorithms of a higher order of accuracy of their discretization are built. Individual results of solving model examples are given.

Технічні системи, котрі працюють за високих температур з навантаженням різного роду, мають складну, як правило, багатокомпонентну конструкцію. Характерним для таких систем є наявність тонких включень (технологічних швів, теплоізоляційних покриттів і т.п.), які продукують розриви в полях теплових процесів, котрі в них протікають. Оскільки наявна значна складність реальних конструкцій та тих режимів, яким вони піддаються ззовні, проведення якісного дослідження теплових процесів у них є можливим тільки із використанням сучасних методів обчислень і апарату математичного моделювання. Особливістю таких матмоделей є те, що для їх опису необхідно формулювати крайові чи/або початково-крайові задачі, котрі містять також і умови спряження неідеального контакту (УСНК). У своїй більшості це задачі, котрі мають розриви у розв’язках на тих лініях, котрі моделюють власне тонкі включення [1]. Для отримання наближених розв’язків для таких задач використовується метод скінченних елементів (МСЕ).

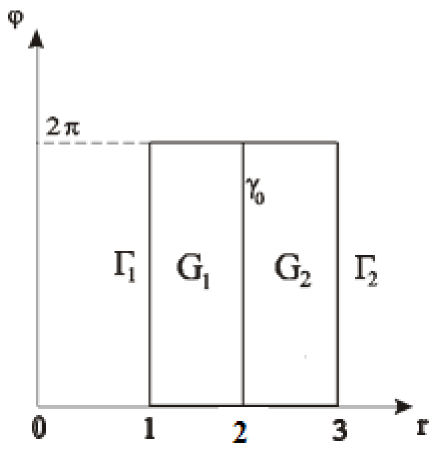
Як модель підземного сховища для зберігання різного роду відходів може бути два аксіальних анізотропних циліндри, котрі з’єднані один із одним тонкими включенням. В цьому випадку формуються задачі поширення теплового потоку для з’єднаних циліндрів. Властиво такі задачі можна звести до знаходження розв’язку еліптичного рівняння з УСНК. Спершу потрібно сформулювати крайову задачу в складній анізотропній області із врахуванням крайових умов та УСНК. На наступному етапі розв’язування за допомогою методики, котра наведена в роботі [1], та отриманих автором результатів в роботі [2], цю задачу необхідно звести до деякої варіаційної задачі пошуку мінімуму функціоналу енергії, що включає УСНК на поверхнях, котрі містять розриви розв’язку. Варто відмітити, що на границі розглядуваної області можливе задання крайових умов різного роду.

Для отримання розв’язку у варіаційній постановці застосовується дискретизація області за допомогою МСЕ. Потрібно відмітити, що записаний функціонал енергії містить параметри крайових умов та УСНК. Умови отримання мінімуму функціоналу призводять до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, котра розв’язується за допомогою розкладу Холецького.

На рисунку наведено модельний приклад у полярних координатах *(r, φ)*. Тут $G = G_1 \cup G_2$ – складений циліндр; $\gamma_0$ – тонке включення. На області $G$ визначено рівняння

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(k_{11}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{k_{12}}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(k_{21}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{k_{22}}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right\}=f,\ \ (r,\varphi)\in G, \qquad (1)$$

де $k_{ij} = k_{ji}(r,\varphi)$ – неперервні на кожній із областей G1, G2. Області G прямокутній декартовій системі координат ($x = r\,cos\varphi,\ y = r\,sin\varphi$) відповідає складене кільце при L2-l2=2π.




Для складеної області G її границя $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ складається з двох кіл

$$\Gamma_1 = \{(r,\varphi): r = l_1,\ l_2 \le \varphi \le L_2 = l_2 + 2\pi\}, \quad (2)$$
$$\Gamma_2 = \{(r,\varphi): r = L_1,\ l_2 \le \varphi \le L_2 = l_2 + 2\pi\}. \quad (3)$$

Точний класичний розв'язок задачі u ($r,\ \varphi$) є наперед відомим для обох частин складеної області. Рішення задачі полягає у отриманні наближеного числового розв'язку $u_k$ , похибка якого буде мінімальною.

З використанням спеціально розробленого програмного забезпечення область з модельного прикладу можна піддати дискретизації елементами, які містять три або шість вузлових точок, котрі містять подвійну нумерацію вузлів на $\gamma_0$. Таким чином для апроксимації можна застосовувати кусково-лінійні (а) або кусково-квадратичні (б) функції МСЕ [1, 2]. Застосування функцій (а) та (б) МСЕ (якщо однакове число вузлів розбиття) видає розв'язки з однаковим порядком точності. Із застосуванням (б) область G з включенням $\gamma_0$ ділилася на 96 трикутників. n=250 – отриманий порядок матриці МСЕ. Після застосування розкладу Холецького півширина нумерації вузлів матриці буде рівною 27. Відносна похибка $\Delta = \left| {(u - u_k)}/{u} \right| \cdot 100\%$ отриманого наближеного числового розв'язку була в такому діапазоні: $6{,}18 \cdot 10^{-6} < \Delta < 7{,}14 \cdot 10^{-2}$.

Наведені результати говорять, що для розв'язування задач, котрі містять УСНК, слушно застосовувати такі обчислювальні алгоритми, в основі яких лежить МСЕ.

**Література**

1 Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наукова думка, 2001. – 606 с.

2. Баран І.О. Високоточні обчислювальні алгоритми та система автоматизованого розрахунку дифузійних процесів в багатокомпонентних середовищах: Дис… канд. техн. наук: 01.05.02. Тернопіль, ТДТУ, 2003.