УДК 539.3

Г.Т. Сулим[1], д.ф.-м.н., проф., Й.З. Піскозуб[2,3], д.ф.-м.н., доц.
[1]ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Україна;
[2]Краківська Політехніка, Краків, Польща;
[3]Українська академія друкарства, Україна

СТРУКТУРНО-МОДУЛЬНИЙ МЕТОД ФУНКЦІЙ СТРИБКА ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУР З ТОНКИМИ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Heorhiy Sulym[1], Dr, Prof., Yosyf Piskozub[2,3], Dr., Assoc. Prof.
[1]Pidstryhach IAPMM of NAS of Ukraine, Ukraine;
[2]Cracow University of Technology, Poland;
[3]Ukrainian Academy of Printing, Ukraine

STRUCTURALLY MODULAR JUMP FUNCTIONS METHOD FOR INVESTIGATION OF THE DEFORMATION OF A COMPOSITE STRUCTURE WITH THIN RIBBON-LIKE INCLUSIONS

Abstract. The structurally modular jump functions method is developed and used to research the effect of the functional gradient material of a thin ribbon-like interfacial deformable inclusion on the stress-strain state of a piecewise homogeneous linear elastic matrix under the conditions of longitudinal displacement.

Тріщини, оксидні плівки, сульфідні та графітові включення в металах, заповнені газом, рідиною чи твердою субстанцією порожнини є одними із найпоширеніших типів неоднорідної будови матеріалів, які зумовлюють небажану високу концентрацію напружень і, відповідно, знижують надійність та експлуатаційні характеристики виробів. З другого боку тонкі включення також слугують підкріплювальними елементами, що створюють можливість оптимізувати напружено-деформований стан (НДС) інженерних конструкцій за тих чи інших типів їхнього навантажування. Серед найбільш перспективних наукових проектів експерти називають ті, що пов’язані із значним підвищенням продуктивності комп’ютерів, відновленням людських органів з використанням відтворених тканин, отриманням нових матеріалів, створених навіть безпосереднім укладанням заданих молекул чи атомів тощо. Поряд із пошуком засобів реалізації цих проектів в теорії матеріалознавства досі залишається не вирішеною та гостро актуальною проблема подолання труднощів математичного моделювання механіки таких структур. Відтак, на сучасному етапі розвитку механіки твердого деформівного тіла доцільно зосередитися на конструюванні ускладнених конститутивних рівнянь, придатних для вивчення різномасштабних структур, а також на опрацюванні методів дослідження побудованих на їхній основі математичних моделей.

В доповіді зосереджено увагу на описі структурно-модульного методу функцій стрибка, як цілісного комплексу засобів аналітико-числового розв’язування двовимірних задач пружності для ізотропних біматеріалів із тонкими структурно неоднорідними фізично лінійно чи нелінійно деформівними міжфазними неоднорідностями.

Досліджено напружено-деформований стан перерізу безмежного ізотропного масиву, що складається з двох півпросторів з пружними сталими G_1, G_2, площиною xOy, перпендикулярною до напряму z його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини S_k $(k=1,2)$, а межі поділу між ними відповідає вісь абсцис $L \sim x$ (рис.). На ній уздовж відрізка $L' = [-a; a]$

розташоване тонке включення завтовшки $2h \ll a$, механічні властивості якого у різних напрямках можуть різнитися (ортотропія, функціональна ґрадієнтність) і характеризуватися конститутивним рівнянням доволі загального нелінійного вигляду

$$\sigma_{sz}^{in}(x,y) = G_s^{in}(\sigma_{xs}^{in}, \sigma_{xs}^{in}, x, y)\frac{\partial w^{in}}{\partial s}(x,y),\ \{s = x, y\} \quad . \tag{1}$$

Тут монотонна функція $G_s^{in}(\sigma_{xs}^{in}, \sigma_{xs}^{in}, x, y)$ обирається із загальнотеоретичних міркувань чи вимог щодо деформаційної поведінки проектованого функційно-градієнтного матеріалу або є якоюсь апроксимаційною залежністю емпіричних даних.

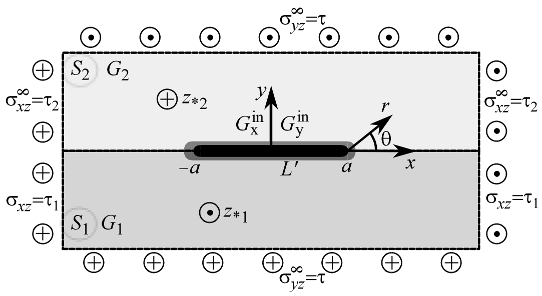

Рис. Геометрична та силова схема задачі

Величина й напрямок дії зовнішніх силових чинників (рівномірно розподілених на нескінченності напружень $\sigma_{yz}^{\infty} = \sum_p \tau_{(p)}(t)$, $\sigma_{xzk}^{\infty} = \sum_p \tau_{k(p)}(t)$, зосереджених сил інтенсивності $Q_k(t) = \sum_p Q_{k(p)}(t)$, гвинтових дислокацій із складовою вектора Бюргерса $b_k(t) = \sum_p b_{k(p)}(t)$ в точках $\varsigma_{*k} \in S_k$ $(k = 1,2)$.) уздовж осі z, що здійснюють поздовжній зсув масиву, змінюються квазістатично за довільним законом у вигляді монотонно змінюваних в часових проміжках $\left[t_{(p-1)}; t_{(p)}\right]$ покрокових послідовностей. Тут (p) — номер кроку навантажування. Напруження на нескінченності повинні в довільний момент часу задовольняти умові $\tau_{2(p)}(t)G_1 = \tau_{1(p)}(t)G_2$, щоб забезпечити прямолінійність межі розділу матеріалів на нескінченності.

Присутність тонкого включення чи тріщини у масиві на межі поділу матеріалів моделюються стрибками компонент векторів напружень і переміщень на L':

$$\begin{gathered}
\left[\sigma_{yz}\right]_{h(p)} \cong \sigma_{yz}^{-} - \sigma_{yz}^{+} = f_{3(p)}(x,t), \\
\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{h(p)} \cong \frac{\partial w^{-}}{\partial x} - \frac{\partial w^{+}}{\partial x} = \left[\frac{\sigma_{xz}}{G}\right]_{h(p)} \equiv \frac{\sigma_{xz}^{-}}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^{+}}{G_2} = f_{6(p)}(x,t),\ x \in L'\ ;
\end{gathered} \tag{2}$$

$$f_{3(p)}(x,t) = f_{6(p)}(x,t) = 0 \text{, якщо } x \notin L' , \tag{3}$$

де t – деякий момент часу, як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний із змінюваністю навантаження. Тут і далі позначено: $[\varphi]_h = \varphi(x,-h) - \varphi(x,+h)$, $\langle\varphi\rangle_h = \varphi(x,-h) + \varphi(x,+h)$; індекси "+" та "–" відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому берегах лінії L.

Контакт між півпросторами уздовж лінії $L'' = L \setminus L'$ та між масивом і берегами включення вздовж L' можна вважати як ідеальним

$$w^{in}(x,\pm h) = w_k(x,\pm h),\ \sigma_{yz}^{in}(x,\pm h) = \sigma_{yzk}(x,\pm h)\ \left(x \in L'\right), \tag{4}$$

так і ковзним

$$\sigma_{yz}^{in}(x,\pm h) = \sigma_{yz2}(x,\pm h) = -\operatorname{sgn}\left(w^{in}(x,\pm h) - w(x,\pm h)\right)\tau_{yz}^{\max}(x),\ \left(x \in L''',\ L''' \subset L'\right), \tag{5}$$

де $\tau_{yz}^{\max}(x) = -\alpha\sigma_{yy}(x)\ \left(\sigma_{yy} < 0\right)$, а α - коефіцієнт тертя. Причому в останньому випадку зона проковзування є апріорі невідомою.

Математична модель тонкого включення подається у вигляді так званих умов взаємодії, які еквівалентні умовам неідеального контакту між прилеглими до включення поверхнями матриці. В основі застосованої методики моделювання впливу тонкого об’єкту лежить схема інтегрування по його об’єму рівнянь опису фізико-механічного стану матеріалу включення з наступним урахуванням малості його товщини та заданих конститутивних залежностей. Побудовано універсальні математичні моделі тонких структурно-неоднорідних лінійно та нелінійно пружних, пружно-пластичних неоднорідностей з урахуванням істотних фізичних механізмів їхнього деформування з урахуванням фізичного масштабу досліджуваних явищ. Рівняння математичної моделі тонкого включення з матеріалу фізично нелінійного, чи градієнтно функційно залежного можна подати у вигляді

$$\begin{cases} G_x^{in}(\bullet)\left\langle \dfrac{\partial w^{in}}{\partial x} \right\rangle_h (x) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-a}^{x}\left[\sigma_{yz}^{in}\right]_h(\xi)d\xi = 0, \\ G_y^{in}(\bullet)\left[w^{in}\right]_h(x) + h\left\langle\sigma_{yz}^{in}\right\rangle_h(x) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

який при застосуванні крайових умов контакту (4), (5) приводить до системи сингулярних інтегральних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Для розв’язування нелінійних задач фрикційного проковзування в умовах багатокрокового навантажування-розвантажування застосовано інкрементальний підхід, розроблено ітераційний алгоритм розв’язування задач за умов апріорі невідомих зон контакту матриці з лінійно, нелінійно пружним чи пружно-пластичним включенням та довільного багатокрокового процесу навантажування-розвантажування, зокрема й циклічного.

Отримані результати розрахунків напружено-деформованого стану в околі різних типів неоднорідностей підтвердили високу міру універсальності запропонованого методу. З єдиних позицій можна досліджувати вплив тонких неоднорідностей практично довільного типу, зокрема й тріщин, на усіх рівнях їхнього фізичного масштабу - в рамках макро-, мезо-, мікро- чи наномеханіки (в геомеханіці, у теорії композитів, механіці руйнування, матеріалознавстві, мікроелектроніці тощо). Поєднання запропонованого підходу із спектакулярними здобутками створеної зусиллями професорів Олега Шаблія та Петра Яснія у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя наукової школи механіки деформівного твердого тіла школи створює широкі можливості для опрацювання нових ефективних методів розрахунку інженерних конструкцій, що забезпечать істотне підвищення їхньої міцності та експлуатаційного ресурсу.