УДК 539.3

Ю.І. Пиндус, к.т.н., доц., Т.Б. Пиндус, Б.Г.Шелестовський, к.ф.-м.н., доц.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ТИСК ПРУЖНОГО ГАРЯЧОГО ШТАМПА НА ІЗОТРОПНИЙ ШАР ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

Yu.Pyndus, Ph.D., Assoc. Prof., T. Pyndus, B. Shelestovs'kyi, Ph.D., Assoc. Prof.

HOT ELASTIC PUNCH PRESSURE ON THE ISOTROPIC LAYER AT NON-IDEAL THERMAL CONTACT

Abstract. The solution of the axially symmetric contact problem of thermal elasticity concerning circular cylindrical isotropic stamp pressure on elastic isotropic layer taking into account imperfect thermal contact through thin intermediate layer between the stamp and layer is developed in this paper. The method of temperature fields determination in the cylinder and layer as well as the normal contact stresses under given assumptions is developed.

Метою роботи є побудова розв'язку осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск гарячого кругового штампа з плоскою основою на пружний ізотропний шар при неідеальному тепловому контакті через тонкий проміжковий шар та знаходження формул для визначення температури і нормальних контактних напружень.

Розглянемо ізотропний круговий циліндричний штамп радіусом R і довжиною L з плоскою основою, який втискується силою P в пружний шар скінченної товщини H. Усі точки торця циліндра під дією зовнішнього навантаження зміщуються на однакове значення ε. Поверхня шару зовні площадки контакту вільна від зовнішніх зусиль. На площадці контакту дотичні напруження τ_{rz}. На вільному торці циліндра задана постійна температура T_0. Тепловий контакт між тілами здійснюється через тонкий проміжковий шар [1]. Бічні поверхні циліндра теплоізольовані. Теплообмін із зовнішнім середовищем на поверхнях вільного шару відбувається за законом Ньютона. При заданих припущеннях необхідно визначити температурні поля і контактні напруження.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z, центр якої лежить на поверхні шару, а вісь $0z$ спрямована вздовж осі циліндра. Всі величини, які позначені верхнім індексом "1", відносяться до шару, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури, напружень і переміщень мають вигляд:

$$T = T_0, \quad \left(z = L, \ \ 0 \le r \le R\right). \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \left(r = R, \ \ 0 \le z \le L\right). \tag{2}$$

$$\lambda_0^* \Delta\left(T^1 + T\right) + 2\left(\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0, \ \left(z = 0; \ 0 \le r < R\right). \tag{3}$$

$$\lambda_0^* \Delta\left(T^1 - T\right) - 6\left(\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = -12 h_0 \left(T^1 - T\right) = 0.$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\left(T^1 + T\right)}{\partial r} + \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*}\left(\frac{T^1 + T}{2} - T_c\right) = 0, \ \left(z = 0; \ r = R\right). \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\left(T^1 - T\right)}{\partial r} + \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*}\left(\frac{T^1 - T}{2} - T_c^*\right) = 0, \ \left(z = 0; \ r = R\right).$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0, \quad \left(R \le r < \infty; z = 0\right). \tag{5}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0, \quad \left(0 \le r \le \infty; z = -H\right). \tag{6}$$

$$u_z^1 = -\varepsilon, \ \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad \left(z = 0; \ \ 0 \le r \le R\right). \tag{7}$$

$$\sigma_z^1 = 0, \ \ \tau_{rz}^{(1)} = 0, \ \ \left(z = 0; \ R \le r < \infty\right). \tag{8}$$

$$u_z^1 = \tau_{rz}^{(1)} = 0, \ \ \left(z = -H; \ \ 0 \le r < \infty\right). \tag{9}$$

тут λ_z , λ_z^1 коефіцієнти теплопровідності;
H_1^1, H_2^1 – коефіцієнти теплообміну;
$\Delta = \frac{\partial^z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ – оператор Лапласа;
$T_c = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} T_c^0 d\gamma, \ T_c^* = \frac{3}{2\delta^2}\int_{-\delta}^{\delta} \gamma T_c^0 d\gamma, \ 2\delta$ – товщина проміжкового шару;
$\lambda_0^* = 2\lambda_0\delta, \ h_0 = \frac{\lambda_0}{2\delta}, \ \alpha_0^* = 2\alpha_0\delta, \ \lambda_0^*, \ \alpha_0^*$ – коефіцієнти теплопровідності й теплообміну проміжкового шару; h_0 – контактна провідність; T_c^0 – температура зовнішнього середовища; ε – величина вертикального переміщення штампу.

В осесиметричному випадку термопружний потенціал і температурне поле для ізотропного тіла визначаються із рівнянь:

$$\nabla^2\varphi = \alpha_T \frac{1+\sigma}{1-\sigma} T, \quad \nabla^2 T = 0, \tag{10}$$

а температурні напруження і переміщення знаходять за формулами:

$$u_z^{(T)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \ \sigma_z^{(T)} = -2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right), \ \ \tau_{rz}^{(T)} = 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}, \tag{11}$$

де α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення; μ, σ – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона.

Для визначення температурного поля в шарі введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r,z)$ нульового порядку

$$\overline{T^1\left(\xi, z\right)} = \int_0^\infty rT^1\left(r, z\right) J_0\left(\xi, z\right) dr. \tag{12}$$

Застосувавши до другого рівняння (10) інтегральне перетворення Ганкеля і використовуючи його властивості, визначимо $T^1(r,z)$ через довільні функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$:

$$T^1\left(\rho,\zeta\right) = \int_0^\infty \left[\varphi_1\left(\eta\right)e^{\lambda\xi} + \varphi_2\left(\eta\right)e^{-\lambda\zeta}\right] I_0\left(\eta\rho\right) d\eta \,, \tag{13}$$

де $I_0\left(\eta\rho\right)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $\rho = \frac{r}{R}; \ \zeta = \frac{z}{R}; \ \eta = \xi R.$

За допомогою методу Фур’є загальний розв’язок рівняння (10) має вигляд:

$$T\left(r,z\right) = A_0 z + B_0 + D_0\left(r^2 - 2z^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0\left(\beta_k r\right)\left(A_k sh\beta_k z + B_k ch\beta_k z\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} I_0\left(\gamma_k r\right)\left(C_k \sin\gamma_k z + D_k \cos\gamma_k z\right) \tag{14}$$

де A_k, B_k, C_k, D_k , $(k=\overline{0,\infty})$ – довільні постійні; $I_0(\gamma_k r)$ – функція Бесселя І-го роду уявного аргументу; β_k, γ_k – власні значення, які визначаються із граничних умов.

Термопружний потенціал φ визначається із першого рівняння (10) у вигляді:

$$\varphi(\rho,\zeta)=\frac{1}{2}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\alpha_{T^1}\zeta\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\left[\varphi_1(\eta)e^{\lambda\zeta}+\varphi_1(\eta)e^{-\lambda\zeta}\right]I_0(\eta\rho)\,d\eta. \tag{15}$$

Маючи формули температурних напружень і переміщень, можна розв'язати задачу при механічних граничних умовах. Для цього необхідно до величин, обчислених згідно формул (11), додати компоненти напружень і переміщень від бігармонічного потенціалу [2]. Розв'язок задачі теплопровідності приведений у праці [3].

Температурне поле в зоні контакту двох тіл визначається за формулами:

$$T(\rho,0)=T_0-A_0Rl-\sum_{k=1}^{\infty}I_0(\mu_{k\rho})th\mu_k l\cdot A_k\quad(\rho<1),\ T^1(\rho,0)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\beta_k(\rho)\quad(\rho<1) \tag{16}$$

де $a_k=X_kT_0$ $\quad(k=\overline{0,N})$; Y_0, Y_1 знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь [3]

Вимагаючи виконання граничних умов (7-9) прийдемо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\Phi(\eta)$ і $\varphi_1(\eta)$:

$$\int_0^\infty\Phi(\eta)I_0(\eta\rho)\,d\eta=-\frac{\varepsilon}{R}+\int_0^\infty G\big(2\eta h\Phi(\eta)I_0(\eta\rho)\big)d\eta-\alpha_{T^{1\delta}}\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\frac{Q_2(n)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}I_0(\eta\rho)\,d\eta$$
$$(0\le\rho<1). \tag{17}$$

$$\int_0^\infty\eta\Phi(\eta)I_0(\eta\rho)\,d\eta=0\quad(\rho>1), \tag{18}$$

розв'язок яких побудовано числовим методом.

Для визначення контактних напружень під штампом отримано наступні вирази:

$$\sigma_z^1(\rho,0)=\sigma_z^{(P)}(\rho,0)+\sigma_z^{(T)}(\rho,0), \tag{19}$$

$$\sigma_z^{(P)}(\rho,0)=-\frac{p}{2\pi R}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[Y_0^{(1)}+\frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{N}(2k+1)(-1)^kT_{2k+1}(\rho)Y_k^{(1)}\right],\ (\rho<1)\ , \tag{20}$$

$$\sigma_z^{(T_1)}=\alpha_TT_0\frac{x_0}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[Y_0^{(2)}+\frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{N_1}(-1)^k(2k+1)T_{2k+1}(\rho)y_k^{(2)}\right],\ (\rho<1)\ , \tag{21}$$

де $T_{2k+1}(\rho)$ – функція Чебишева; $\sigma_z^{(P)}(\rho,0)$ – силова складова напружень; $\sigma_z^{(T^1)}(\rho,0)$ – температурна складова напружень в шарі.

Література

1. Подстригач Я.С. Условия теплового контакта твёрдых тел. ДАН УССР, серия А, 1963, №7, с.188-192.

2. Грилицкий Д.В., Кизима Я.А. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов:Выща школа. Изд.-во Львовського университета, 1981, 135 ст.

3. Окрепкий Б.С., Шелестовський Б.Г. Визначення температурного поля в системі тіл циліндр-шар. Вісник ТНТУ, 2015, №1, с.288-299.