

УДК 539.3

М. І. Махоркін<sup>1,2</sup>, к. ф.-м. н., доц., І. М. Махоркін<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., ст. н. сп.<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН, Україна;<sup>2</sup>Національний університет "Львівська політехніка", Україна.**ВИЗНАЧЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ НАПРУЖЕНЬ В ОРТОТРОПНОМУ КОМПОЗИТНОМУ КЛИНІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ**

М. І. Makhorkin, Ph. D., Assoc. Prof., I. M. Makhorkin Ph. D., Senior Research Officer

**DETERMINATION OF THE STRESS SINGULARITY IN ORTHOTROPIC COMPOSITE WEDGE UNDER ANTI-PLANE DEFORMATION**

The antiplane stress state of a composite anisotropic wedge is considered. Based on the use of the apparatus of generalized functions and Mellin transform, an algorithm for constructing expressions of the stress-strain state in in this wedge is proposed. The singularity of stresses in two- and three-component orthotropic wedges is studied.

Розглянуто антиплоский напружений стан складеного анізотропного клину, який утворено сполученням довільної кількості різнорідних клинів, виготовлених із матеріалів з циліндричною анізотропією. Подібна задача для двохкомпонентного клину розглянута у роботі [1]. Запропоновано алгоритм побудови виразів, що описують напружено-деформований стан в композитному клині, складеному з довільної кількості елементів. Даний алгоритм ґрунтується на використанні апарату узагальнених функцій і перетворення Мелліна та успішно використовувався при вивченні багатоклинових систем, елементи яких виготовлені з ізотропних матеріалів.

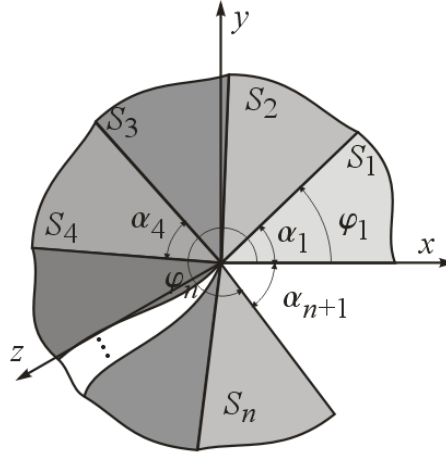


Рис. 1

Анізотропний клин (рис. 1) складено із довільної кількості  $n$  різнорідних клинів  $S_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  з кутами розхилу  $\alpha_i$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 2\pi$  виконаних із ортоотропних матеріалів з циліндричною анізотропією, з'єднаних по своїх бокових поверхнях. Задачу з'ясування напружено-деформованого стану такого клину розв'язуватимемо в циліндричній системі координат  $(\rho, \varphi, z)$ , вважаючи при цьому, що зсув відбувається у напрямку осі  $Oz$ , початок якої збігається із вершиною композитного клину, а площина відліку кута (площина  $\varphi = 0$ ) збігається з його відповідною боковою поверхнею. На бічних сторонах

клин (  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \varphi_n$  ), задані умови першої, другої або змішаної задачі теорії пружності. Поверхням з'єднання суміжних клинів  $S_j$  та  $S_{j+1}$   $j = \overline{1, n-1}$  відповідають поверхні  $\varphi_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j$ .

Використовуючи методики постановки узагальненої задачі спряження для багатоклинової системи [2] задача визначення напружено-деформованого стану анізотропного пружного композитного клина зведена до відшукування розв'язку частково виродженого диференціального рівняння

$$\rho^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} = \sum_{i=1}^{n-1} C_1^i(\rho) \delta'_+(\varphi - \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} C_2^i(\rho) \delta_+(\varphi - \varphi_i), \quad (1)$$

з відповідними крайовими умовами першої, другої чи змішаної задачі теорії пружності.

$$\text{Тут } C_1^i(\rho) = 0, \quad C_2^i(\rho) = - \left. \frac{b_{1i+1} - b_{1i}}{b_{1i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_i+1}, \quad d = d_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (d_{i+1} - d_i) S_+(\varphi - \varphi_i),$$

$$d_i = \frac{2b_{2i}}{b_{1i}}, \quad b_{1i} = \frac{(a_{44})_i}{(a_{44})_i^2 - (a_{45})_i^2}, \quad b_{2i} = - \frac{(a_{45})_i}{(a_{44})_i^2 - (a_{45})_i^2}; \quad a_{mn} - \text{пружні сталі } (m, n = \overline{1, 6}) \quad [1,$$

3],  $S_+(x)$  – одинична функція Гевісайда;  $\delta_+(x) = S'_+(x)$  – дельта функція Дірака.

Застосувавши до рівняння (1) перетворення Мелліна отримаємо в просторі зображень таке диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \varphi^2} - \rho d \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} + p^2 \tilde{w} = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_2^i(\rho) \delta_+(\varphi - \varphi_i), \quad (2)$$

$$\text{де } \tilde{C}_2^i(\rho) = - \left. \frac{b_{1i+1} - b_{1i}}{b_{1i+1}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_i+1}.$$

Розв'язок рівняння (2), а відповідно і зображення за Мелліном поля переміщень матиме вигляд

$$\tilde{w} = \tilde{w}_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{w}_{i+1} - \tilde{w}_i) S_+(\varphi - \varphi_i), \quad (3)$$

$$\text{де } \tilde{w}_i = \left( A_i \cos[a_i^* p \varphi] + B_i \sin[a_i^* p \varphi] \right) e^{p d_i^* \varphi}, \quad d_i^* = \frac{(a_{45})_i}{(a_{44})_i} < 1, \quad a_i^* = 1 - (d_i^*)^2.$$

Для визначення сталих  $A_i, B_i$   $i = \overline{2, n}$  отримано такі рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= \frac{1}{a_{i+1}^* b_{1i+1}} e^{p(d_i^* - d_{i+1}^*) \varphi_i} \left\{ a_{i+1}^* b_{1i+1} \cos[pa_{i+1}^* \varphi_i] \left( A_i \cos[pa_i^* \varphi_i] + B_i \sin[pa_i^* \varphi_i] \right) + \right. \\ &+ \left[ a_i^* b_{1i} \left( A_i \sin[pa_i^* \varphi_i] - B_i \cos[pa_i^* \varphi_i] \right) - \right. \\ &\left. \left. - (b_{1i} d_i^* - b_{1i+1} d_{i+1}^*) \left( A_i \cos[pa_i^* \varphi_i] + B_i \sin[pa_i^* \varphi_i] \right) \right] \sin[pa_{i+1}^* \varphi_i] \right\}, \\ B_{i+1} &= \frac{1}{a_{i+1}^* b_{1i+1}} e^{p(d_i^* - d_{i+1}^*) \varphi_i} \left\{ a_i^* b_{1i} \cos[pa_{i+1}^* \varphi_i] \left( B_i \cos[pa_i^* \varphi_i] - A_i \sin[pa_i^* \varphi_i] \right) + \right. \\ &+ \left( \cos[pa_{i+1}^* \varphi_i] \left( b_{1i} d_i^* - b_{1i+1} d_{i+1}^* \right) + a_{i+1}^* b_{1i+1} \sin[pa_{i+1}^* \varphi_i] \right) \times \\ &\left. \times \left( A_i \cos[pa_i^* \varphi_i] + B_i \sin[pa_i^* \varphi_i] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

За допомогою співвідношень (4) розв'язок (3) буде залежати лише від двох сталих  $A_1$  та  $B_1$ , для визначення яких використовуємо відповідні крайові умови.

Отож напружено-деформований стан клину описуватиметься такими поданнями:

$$w(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p} dp,$$

$$\tau_{\varphi z}(r, \varphi) = \frac{b_1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\partial \tilde{w}(p, \varphi)}{\partial \varphi} r^{-p-1} dp - \frac{pb_2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p-1} dp,$$

$$\tau_{rz}(r, \varphi) = \frac{b_2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\partial \tilde{w}(p, \varphi)}{\partial \varphi} r^{-p-1} dp - \frac{pb_1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{w}(p, \varphi) r^{-p-1} dp.$$

де  $p$  – корені характеристичних рівнянь.

У випадку двохелементного композитного клину характеристичні рівняння, залежно від крайових умов на берегах вирізу мають такий вигляд:

для першої крайової задачі –

$$\left\{ p \left( a_2^* b_{11} \left( (a_1^*)^2 + d_1^2 \right) \cos \left[ a_2^* p (\varphi_2 - \varphi_1) \right] \sin \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[ (a_1^*)^2 b_{11} d_2 + d_1 \left( b_{11} d_1 d_2 - b_{12} \left( (a_2^*)^2 + d_2^2 \right) \right) \right] \sin \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] \right) \sin \left[ a_2^* p (\varphi_1 - \varphi_2) \right] \right\} = 0,$$

для другої крайової задачі –

$$\left\{ \left( a_1^* b_{11} \cos \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] + (b_{11} d_1 - b_{12} d_2) \sin \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + a_2^* b_{12} \cos \left[ a_2^* p (\varphi_2 - \varphi_1) \right] \sin \left[ a_1^* p \varphi_1 \right] \right) \sin \left[ a_2^* p (\varphi_2 - \varphi_1) \right] \right\} = 0.$$

Використовуючи описану методику, отримано співвідношення для випадку систем складених із двох та трьох клинів. Здійснено дослідження залежності порядку сингулярності напружень в околі вершини двохкомпонентного композитного клина від механічних та геометричних характеристик його складових.

### Література

1. Акопян В. Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. – Ереван: Гитутюн, 2014, 322 с
2. Makhorkin M., Makhorkina T., & Pukach P. (2021). Математичне моделювання напружено-деформованого стану композитних клиноподібних елементів конструкцій. Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження, (24), 121-130.  
<http://agroengineering.online/index.php/agro-research/article/view/162>
3. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропных тел. – М.: Наука, 1977, 416 с.