УДК 514.116.3+ 621.3

В.А. Кривень д.ф.-м.н, проф.
Тернонільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Україна

МІРА НЕПАРАБОЛІЧНОСТІ ПОВЕРХНІ, БЛИЗЬКОЇ ДО ПАРАБОЛОЇДА ОБЕРТАННЯ

V.A. Kryven Dr., Prof.

MEASURE OF NON-PARABOLICITY OF A SURFACE APPROXIMATE TO A PARABOLOID OF ROTATION

Abstract. The measure of deviation from parabolicity of the convex smooth surface of rotation Ω, which in the Cartesian coordinate system is described by the equation $z = f(x, y), x^2 + y^2 < R^2$ is introduced. The focus of the paraboloid inscribed in this surface is found in the plane z=R/2. The degree of non-parabolicity is defined as the square of a cirque in the z=R/2 plane, filled with rays which is the locus of the rays reflected from the surface Ω.

Зацікавленість параболічними поверхонями зумовлена також і можливістю застосувань їхніх властивостей у різноманітних тенічних проєктах. Зокрема за ініціативи та прямої участі професора Олега Шаблія науково-технічні розробки з проектування параболічних дзеркальних антен розпочалися у технічному університеті імені Івана Пулюя.

В основі функціонування усіх параболічних антен та їх систем закладена ідея перетворення плоскої електромагнітної хвилі у сферичну (приймальні системи) або навпаки – сферичної у плоску (передавальні). Що більша площа поверхні антени то сильнішим сигнал можна отримати на її виході, однак відхилення від параболічної форми, допущені при виготовлені, монтажу чи експлуатації пристрою, можуть суттєво вплинути на його інтенсивність.

В роботі запропоновано новий підхід до оцінки відхилення поверхні від параболічності, що має переваги над існуючими з огляду на застосування у задачах визначення ефективності антен.

Розглядатимемо опуклі поверхні обертання Ω, які у декартовій системі координат Oxyz описуються рівнянням $\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 < \mathrm{R}^2$, $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ двічі диференційовна в крузі D і задовольняє у ньому таким двом умовам:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0. \tag{1}$$

Поверхня Ω є параболоїдом обертання з фокусом у точці F(0;0;c) якщо $f(x, y) = \frac{1}{4c}(x^2 + y^2), c > 0.$

Функція

$$f(x, y) = f(x^2 + y^2) \in C^2(x^2 + y^2 < R^2). \tag{2}$$

задовольтиме умовам (1), якщо

$$f''^{(t)} > 0, f'(t)t > 0\ (0 < t < R) \tag{3}$$

Параболоїд обертання володіє властивістю фокусування: промені, паралельні його вісі симетрії (оптичній вісі), відбившись від поверхні проходять через фокус параболоїда. Якщо $f(x,y) = \frac{1}{4c}(x^2 + y^2)$, усі паралельні осі аплікат промені, відбишись від поверхні параболоїда, збираються в точці F(0;0;c).

Будемо говорити, що параболоїд обертання вписано у в опуклу поверхню (2) якщо співпадають їхні краї і вершини. У цьому випадку фокус параболоїда називатимемо умовним фокусом поверхні Ω.

Нехай тепер Ω деяка опукла поверхня обертання з умовним фокусом в точці F(0;0;c). Позначимо через D_f область площини $z = c$, у яку попадають усі паралельні осі аплікат промені, відбившись від поверхні Ω.

Означення. Нехай опукла поверхня Ω обертання описується рівнянням $z = f(x^2 + y^2), (x^2 + y^2 < R^2)$. Мірою непараболічності поверхні Ω назвемо $S(D_f)/\pi R^2$.

Уведене тут поняття володіє такою цікавою властивістю.

Нехай

1) Ω_D^fповерхня, що описуються рівняннями $z = f(x,y), (x,y) \in D$ і $f(x,y) \in C^2(D)$ функція, що задовольняє умовам (2).

2) Нехай $\rho(\Omega_D^f, \Omega_D^g) = |S(D_f) - S(D_g)|$.

Тоді M∋ Ω_D^f множина усіх поверхонь Ω_D^f, для яких $c = \mathrm{const}$ з метрикою а якій $\rho(\Omega_D^f, \Omega_D^g)$ є метричним простором.

Аксіоми невід'ємності і симетричності для уведеної метрики очевидні, нерівність трикутника є наслідком нерівності $|S(D_f) - S(D_g)| + |S(D_g) - S(D_u)| \geq |S(D_f) - S(D_u)|$ для $\forall\, f, g, u \in M$.

Для прикладу приведемо результати обчислень міру непараболічності сферичного сегмента Ω: $z = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq r^2$ $(r \leq R)$ (рис.1). Його умовний фокус знайдемо вписавши Ω параблоїд обертання: $z = \frac{x^2+y^2}{R+\sqrt{R^2-r^2}}$. І, отже,

$c = \frac{R+\sqrt{R^2-r^2}}{4}$.

У площині Oxz падаючом променю $x = x_0$ відповідає відбитий $z = R - \sqrt{R^2 - x_0^2} + \frac{2x_0^2 - R^2}{2x_0\sqrt{R^2 - x_0^2}}(x - x_0)$. Отже сферичний сегмент може виконувати функції дзеркальної антени, якщо радіус його основи $r < R/\sqrt{2}$. Тоді міра його непараболічності

$$S = \left(\frac{r(3R\sqrt{R^2 - r^2} - 3R^2 + r^2)}{2(R^2 - 2r^2)R}\right)^2.$$

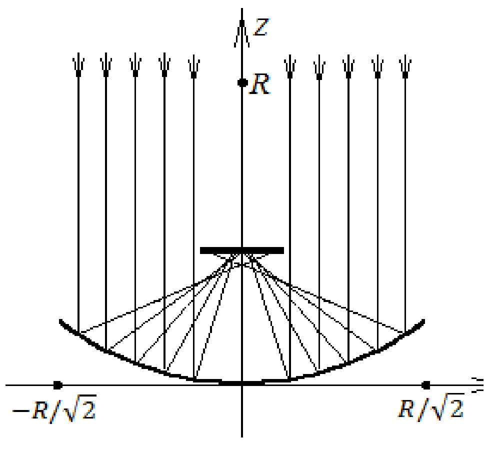

Рис. 1.

Якщо радіус сектора $x_0 = R/\sqrt{2}$ відбитий промінь перпендикулярний до вісі сектора, і тоді міра непараболічності сферичного сегмента стає нескінченно великою.