УДК 593.3

С.В. Ротко, к.т.н., доц., В.В. Шваб'юк к.т.н., доц., А.Б. Мікуліч, магістр
Луцький національний університет, Україна

РОЗРАХУНОК КОМПОЗИТНИХ СТРИЖНІВ НА СТІЙКІСТЬ ЗА НЕКЛАСИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ ЗГИНУ

S.V. Rotko, Ph.D., Assoc. Prof., V.V. Shvabyuk, Assoc. Prof., A.B. Mikulich, M. Sc

CALCULATION OF THE STABILITY OF COMPOSITE RODS ACCORDING TO THE NON-CLASSICAL BENDING MODEL

Abstrakt. The problem of the effect of deformations of transverse shear and transverse compression on the value of the critical stress in the problem of the loss of stability of a transversely isotropic rod is considered. The fourth-order differential equation of the non-classical bending model of rods is applied. Formulas for the critical stress are obtained, as well as numerical results for rods made of different materials.

Проблема втрати стійкості елементів конструкцій (стрижнів, пластин, оболонок) під дією стискувальних навантажень досліджувалася досить давно і грунтовно, починаючи від Л.Ойлера [1], С.П.Тимошенка [2], Ф.Енгессера [3], Ф.С.Ясинського [4] і закінчуючи багатьма сучасними дослідниками: Б.Л.Пелехом [5], О.С.Амбарцумяном [6], О.К. Малмейстером, В.П.Тамужем [7], Ю.М.Тарнопольським та А.В.Розе [8], В.М.Трачем, А.В.Подворним, М.М. Хоружим [9], О.М. Гузем та І.Ю.Бабичем [10] та іншими [11,12]. Авторами [9,10] стійкість ортотропних оболонок досліджувалася на основі рівнянь тривимірної лінеріазованої теорії деформівних елементів – ортотропних оболонок. У працях [5] - [7] розрахунки проводилися із урахуванням тільки деформацій поперечного зсуву, без урахування деформацій поперечного обтиснення. Авторами [11,12] стійкість криволінійних елементів конструкцій та оболонок досліджувалась із застосовувати рівнянь некласичних моделей із урахуванням деформацій поперечного зсуву та поперечного обтиснення.

Розглядається задача стійкості трансверсально-ізотропного стрижня перерізом $2h\times t$ та довжиною l під дією стискуючої сили F у напрямку осі $\boldsymbol{x}$. На відміну від зсувних теорій згину типу С.Тимошенка, для отримання розв'язку задачі скористаємося рівнянням згину та залежностями з [11,12]. Для повного задоволення усіх граничних умов обпирання на кінцях стрижня необхідно використовувати диференційне рівняння четвертого порядку уточненої моделі [12]:

$$\frac{d^4v}{dx^4}=\frac{q}{EI_{\min}}-\frac{\varepsilon_1 t^2}{4EI_{\min}}\cdot\frac{d^2q}{dx^2}-\frac{\varepsilon_2 t^4}{64EI_{\min}}\frac{d^4q}{dx^4}, \tag{1}$$

де параметри: $\varepsilon_1=\frac{1}{10}\left(4\frac{E}{G'}-3\nu''\right)$; $\varepsilon_2=0,2\left(\frac{E}{E'}-\nu''\frac{G'}{E'}\right)$, $I_{\min}=\frac{1}{6}ht^3$ - мінімальний осьовий момент перерізу стрижня; v - переміщення у напрямку поперечної осі $\boldsymbol{y}$; $q(x)=-\frac{d^2M}{dx^2}$ – диференціальна залежність між розподіленим навантаженням та згинальним моментом.

Вважаючи, що за такого виду навантаження згинальний момент $M(x)$ у стрижні буде пропорціональним до прогину $v(x)$: $M(x)=Fv(x)$, диференціальне рівняння (1) можна записати, із точністю до двох сталих інтегрування, що приймаються рівними нулю, у наступному вигляді:

$$\frac{d^4v}{dx^4} - 2a^2 \cdot \frac{d^2v}{dx^2} - k^4 v = 0, \tag{2}$$

де $a^2 = \frac{1}{2b^2}(1 - \frac{\varepsilon_1 t^2 F}{4EI_{\min}})$; $b^2 = \frac{F\varepsilon_2 t^4}{64EI_{\min}}$; $k^4 = \frac{F}{b^2 EI_{\min}} = \frac{64}{\varepsilon_2 t^4}$.

Загальний інтеграл рівняння (2), який знаходяться із урахуванням чотирьох граничних умов на кінцях стрижня: $v(0) = v''(0) = 0$ і $v(l) = v''(l) = 0$, можна записати так:

$$v(x) = Ash\alpha x + B\sin\beta x. \tag{3}$$

Тут $\alpha = \sqrt{\sqrt{a^4 + k^4} + a^2}$; $\beta = \sqrt{\sqrt{a^4 + k^4} - a^2}$.

У зв'язку з тим, що у розв'язку (3) коефіцієнти A і B не можуть дорівнювати нулеві, то мусить дорівнювати нулеві визначник цієї системи, тобто $(\beta^2 - \alpha^2)sh\alpha l \sin\beta l = 0,$ або $\sin\beta l = 0$. Отже, необхідно, щоб $\beta l = n\pi$, а $\beta^2 = n^2\pi^2 / l^2$ або $\sqrt{a^4 + k^4} - a^2 = n^2\pi^2 / l^2$. Остання залежність спрощується до виразу:

$$k^4 = n^4\pi^4 / l^4 + 2n^2\pi^2 a^2 / l^2 \ . \tag{4}$$

Підставивши в останню рівність замість параметрів k^4, a^2 їх значення, отримаємо

$$F = EI_{\min} \frac{n^2\pi^2}{l^2}\left(1 + \frac{\varepsilon_1 t^2}{4}\frac{n^2\pi^2}{l^2} - \frac{\varepsilon_2 t^4}{64}\frac{n^4\pi^4}{l^4}\right)^{-1}. \tag{5}$$

Поступаючи аналогічно, як і у першому випадку, для визначення найменшого, критичного значення сили $F_{кр}$, покладемо параметр $n = 1$ і отримаємо формулу для критичної сили, як функцію від гнучкості λ:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}\left(1 + 3\varepsilon_1\frac{\pi^2}{\lambda^2} - \frac{9}{4}\frac{\varepsilon_2\pi^4}{\lambda^4}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Тут $\lambda = l / i_{\min}$; $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$; $A = 2h \times t.$

Здійснюючи аналіз формули (6), можна прийти до висновку, що вплив поправок від поперечного зсуву та поперечного обтиснення (зокрема, відношення E / E') на величину критичної сили $F_{кр}$ є взаємопротилежним. Одночасно, при великих гнучкостях, вплив поперечного обтиснення може бути набагато нижчим від поправок, котрі дає поперечний зсув.

Формула для нормального напруження $\sigma_{кр} = F_{кр} / A$ на базі формули (6) має вигляд:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\left(1 + 3\varepsilon_1\frac{\pi^2}{\lambda^2} - \frac{9}{4}\frac{\varepsilon_2\pi^4}{\lambda^4}\right)^{-1}. \tag{7}$$

У таблиці наводяться числові дані підрахунків для відношень $\sigma_{кр} / \sigma_{кр}^e$ за формулою (7) для матеріалів: для ізотропного матеріалу $E / E' = 1$; $G' / E' = 0,38$; для дерева $E / G' = 20$; $E / E' = 15$; $G' / E' = 3 / 4$, для органопластика $E / G' = 36,1$; $E / E' = 18,4$;

$G'/E' = 0,51$, залежно від гнучкості λ. Коефіцієнт Пуассона для цих матеріалів приймався рівним $\nu = \nu'' = 0,3$.

Таблиця

Значення відношень $\sigma_{кр} / \sigma_{кр}^{e}$ за формулою (7)

λ	20	40	60	100
метал	0,934	0,983	0,992	0,997
дерево	0,632	0,872	0,939	0,977
орг. пластик	0,486	0,790	0,894	0,959

Із підрахунку даних та аналізу таблиці видно, що врахування поправок від деформацій поперечного зсуву та обтиснення може бути істотним тільки при $\lambda \leq 40$, а також коли $E/G' \geq 20$. Для ізотропних матеріалів названі поправки є незначними. Додатковий аналіз підрахунків дозволяє зробити висновок, що уточнення у формулі (7), із множником ε_2, для анізотропних матеріалів дає поправки до даних у таблиці з точністю до другого, третього знаків після коми, а для ізотропного матеріалу (металу) вони є абсолютно незначними (четвертий знак після коми).

Література

1. Euler L. Sur la force des colonnes Mémoiri de l'Akadémie Royale des sciences et belles letres avec Mémoiris, tirés des Régistres de celte Akadémie, Berlin, 1759, vol. 13, pp. 252-282.
2.Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971.
3. Engesser F. Die Knickfestigkeitgerader Stäbe. Zentralblatt der Bauverwaltung. 1891, Bd. 11, № 49, SS. 483-486.
4. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. М.-Л. Гостехиздат, 1952, стр. 11- 137.
5. Пелех Б.Л. Теория оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. К.: Наук. думка, 1973. 246 с.
6. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.7. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. 3-е изд. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
8. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1969. 276 с.
9. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія. К.: Каравела, 2019. 274 с.
10. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. Т.4. Киев: Наук. думка. 1985. 280 с.
11. Шваб'юк В.І, Ротко С.В. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини / монографія. Луцьк, 2015. 264 с.
12. Шваб'юк В.І, Ротко С.В., Шваб'юк В.В. Математичні моделі деформування композитних плит і балок: Контактна взаємодія із штампами та основами. Вплив тріщин / монографія. Луцьк: Вежа-Друк, 2022. 804 с.