УДК 517.51
М.В.Приймак, докт. техн. наук, проф.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ ТА ОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ ТАКИХ ФУНКЦІЙ

M,V.Pryimak. Dr., Prof.

PERIODIC FUNCTIONS WITH A VARIABLE PERIOD AND ORTHOGONAL SYSTEMS OF SUCH FUNCTIONS

Abstract. The earlier introduced concept of a function with a variable period as the periodic function generalization has been taken into consideration. The properties of the above-mentioned functions have been studied and a number of examples have been given. An orthogonal system of trigonometric functions with a variable period has been constructed and a generating differential equation has been derived for such system.

В Господа один день – як тисяча років,
а тисяча років – як один день.
(2 ап. Петра, 3:8)

1. Вступ. В природі зустрічаються багато періодичних (ритмічних коливних) сигналів, періоди яких вже не є постійними, а певним чином змінюються. Наглядним прикладом є електрокардіограми (ЕКГ), отримані під час чи після дії на організм пацієнта фізичного навантаження. На рис. 1 наведені два відрізки ЕКГ, кожний тривалістю 3 сек., взяті через 60 сек. (верхній графік) та 90 сек. (нижній графік) після дії навантаження. Аналізуючи графіки, видно, що форма ЕКГ приблизно повторюється, але при цьому період повторюваності змінюється, а саме збільшується, що відповідає зменшенню частоти пульсу.

Рис. 1. Відрізки електрокардіограми, взяті через 60 та 90 секунд після дії фізичного навантаження.

Подібною до ЕКГ буде поведінка спірограми, Прикладами таких сигналів є звучання сирени повітряної тривоги, сирени швидкої допомоги, робота двигунів в перехідних режимах при зміні зовнішнього навантаження. За даними Міжнародної служби обертання Землі добовий період її обертання є змінним.

Наявність сигналів із змінним періодом ставить природнє запитання, як вивчати подібні сигнали. Огляд літературних джерел показує, що ні **теорії**, ні загальних **аналітичних методів** дослідження таких сигналів до останнього часу **не існувало**.

2. Загальний підхід до аналітичного вивчення сигналів із змінним періодом.

Досвід багатьох науковців свідчить, що для дослідження сигналів аналітичними та обчислювальними методами надзвичайно плідним вважається підхід, суть якого зводиться до тріади «**модель-алгоритм- програма**» [1, стр.8-9]. Згідно цього підходу на **першому** етапі вибирається **модель** сигналу, що відображає в математичній формі найважливіші його властивості. На **другому** етапі на основі моделі розробляється **алгоритм** дослідження сигналів, на **третьому** – створюється відповідне **програмне** забезпечення обробки сигналів. Основним в цьому підході є, безумовно, перший етап –

обґрунтування моделі, оскільки від вдалого вибору моделі залежить успішність розв’язків наступних задач тріади. Що стосується сигналів із змінним періодом, то вперше модель була запропонована в [2].

3. Означення періодичної функції із змінним періодом (ПФЗП).

Функція $f(x)$ дійсного аргументу $x \in I \subseteq R$ називається **періодичною із змінним періодом,** якщо існує така диференційовна функція $T(x) > 0$, що для всіх $x \in I$ таких, що $x + T(x) \in I$, виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)). \tag{1}$$

Функцію $T(x)$ будемо називати змінним періодом.

Із (1) при $T(x) = T = const$ випливає, що f є звичайною періодичною функцією з періодом T. Приклад графіка $T(x)$ показано на рис. 2.

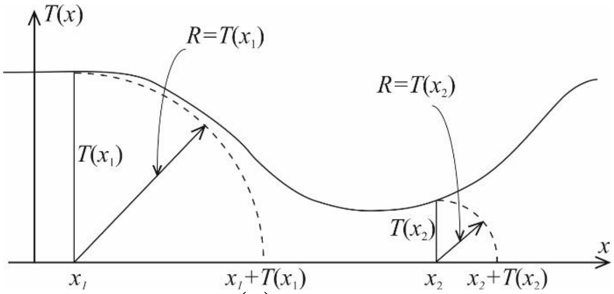

Рис. 2. Змінний період $T(x)$, його значення в точках x_1 і x_2.

4. Деякі властивості змінного періоду.

4.1. Похідна змінного періоду задовольняє умові: $T'(x) > -1$.

4.2. Відомо, що для періодичної функції $g(x)$ з постійним періодом T виконується рівність $g(x) = g(x+T) = g(x-T)$. Для функції $f(x)$ із змінним періодом $T(x)$ аналогічна рівність $f(x) = f(x+T(x)) = f(x - T(x))$ в загальному не виконується. Тому для випадку, коли аргумент x зменшується, змінний період позначимо через $T^-(x)$. При цьому виконується рівність

$$f(x) = f\left(x - T^-(x)\right).$$

Можна показати, що періоди $T(x)$ і $T^-(x)$ взаємопов’язані:

$$T(x) = T^-(x + T(x)), \quad T^-(x) = T\left(x - T^-(x)\right).$$

5. Приклади ПФЗП та їх змінні періоди. Найпростішими ПФЗП є тригонометричні функції $\sin x^{\alpha}, \cos x^{\alpha}, \alpha > 0, \alpha \neq 1, x \in I$. На рис. 3 зображений графік функції $\sin x^{3/4}$ (неперервна лінія), та для порівняння графік функції $\sin x$ (пунктирна лінія).

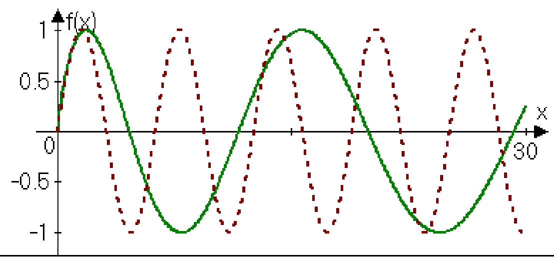

Рис. 3. Функція $\sin x^{3/4}$ – неперервна лінія, $\sin x$ – пунктирна лінія.

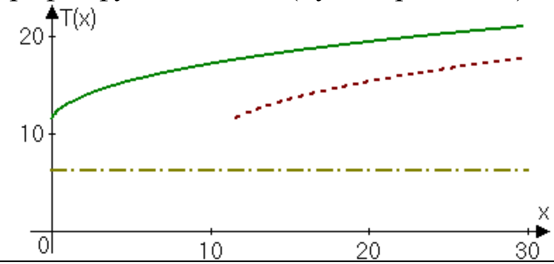

Рис. 4. Змінні періоди для функції $\sin x^{3/4}$: $T(x)$ – неперервна лінія; $T^-(x)$ – пунктирна лінія. Період $T = 2\pi$ для функції $\sin x$ – штрих-пунктирна лінія

Твердження. Для функцій $\sin x^{\alpha}$ та $\cos x^{\alpha}$, $\alpha > 0, x \ge 0$, їх змінні періоди $T_{\alpha}(x)$ та $T_{\alpha}^{-}(x)$ визначаються формулами:

$$T_{\alpha}(x) = -x + \left(x^{\alpha} + 2\pi\right)^{1/\alpha},\ x \ge 0, \quad T_{\alpha}^{-}(x) = x - \left(x^{\alpha} - 2\pi\right)^{1/\alpha},\ x \ge T_{\alpha}(0).$$

Як приклад, для функції $\sin x^{3/4}$, $x \ge 0$, її змінні періоди

$$T(x) = -x + \left(x^{3/4} + 2\pi\right)^{4/3},\ x \ge 0,\ T^{-}(x) = x - \left(x^{3/4} - 2\pi\right)^{4/3},\ \ x \ge (2\pi)^{4/3}.$$

Графіки періодів показані на рис. 4.

6. Ортогональна система тригонометрична функцій із змінним періодом. В роботах [2-4] сформульована

Теорема 1. Тригонометрична система функцій

$$\sin mx^{\alpha},\ \cos mx^{\alpha},\ x \ge 0,\ \alpha > 0,\ m = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

із змінним періодом $T_{\alpha}(x) = -x + \left(x^{\alpha} + 2\pi\right)^{1/\alpha}$, $x \ge 0$, є ортогональною з ваговою функцією $\rho_{\alpha}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ в просторі $L_{\rho}^{2}(x, x + T_{\alpha}(x))$, норма кожної із функцій системи (2) рівна $\sqrt{\pi}$.

Звернемо увагу, що довжина інтервалу ортогональності $(x, x + T_{\alpha}(t))$, який фігурує у виразі $L_{\rho}^{2}(x, x + T_{\alpha}(x))$, вже не є постійною, а змінюється у відповідності до значення періоду $T_{\alpha}(x)$.

7. Узагальнені тригонометричні функції із змінним періодом. Узагальненням тригонометричних функцій $\sin x^{\alpha}, \cos x^{\alpha}, x \ge 0, \alpha > 0$, є функції [3]

$$\sin g(x),\ \cos g(x),\ x \in I\,, \tag{3}$$

де $g(x)$ – строго зростаюча (спадна) диференційовна функція, Для функцій (3) їх змінні періоди

$$T_{g}(x) = -x + g^{-1}[g(x) + 2\pi]. \quad T_{g}^{-}(t) = x - g^{-1}[g(x) - 2\pi].$$

Теорема 2. Система функцій

$$\sin mg(x), \cos mg(x),\ x \in I,\ m = 1,2,\ldots$$

є ортогональною в просторі $L_{\rho}^{2}(x, x + T_{g}(x)),\ x \in I$, з ваговою функцією $\rho(x) = g'(x)$, при цьому норма кожної із функцій цієї системи рівна $\sqrt{\pi}$.

8. Диференціальне рівняння тригонометричних функцій із змінним періодом. Функції $y(x) = \sin g(x)$, $y(x) = \cos g(x),\ x \in I$, задовольняють однорідному диференціальному рівнянню другого порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' - \frac{g''}{g'}y' + (g')^{2}y = 0\,, \tag{4}$$

У випадку, коли $g(x) = x^{\alpha}$, диференціальне рівняння набуває вигляду:

$$y'' - \frac{\alpha - 1}{x}y' + \left(\alpha\, x^{\alpha-1}\right)^{2}y = 0\,.$$

9. Приклади функцій із змінним періодом в математичній літературі. В наукових джерелах зустрічаються приклади функцій, які з точки зору цієї роботи є ПФЗП.

9.1. Одна із них – це функція

$$f(x)=\begin{cases}\sin {}^{1}\!/\!_{x}=\sin x^{-1} & при\ x\neq 0,\\ 0 & при\ x=0.\end{cases}$$

Проте ця функція розглядається (наприклад, в [5, с. 106]) лише як приклад функції, для якої точка $x=0$ є точкою розриву другого роду.

9.2. В роботі [6, с.283, 284] її автор **Лузін М.М** на прикладі функцій

$$\cos x^2,\ \sin x^2 \quad \text{та} \quad \cos x^{1/3},\ \sin x^{1/3}$$

лише констатує, що функції $\cos x^2, \sin x^2$ коливаються «дещо швидко», а функції $\cos x^{1/3}$, $\sin x^{1/3}$ коливаються «дещо повільно».

9.3. Ще один приклад ПФЗП – це многочлени Чебишова $T_n(x)=\cos(n\arccos x), n=1,2,\ldots$ З позицій цієї роботи многочлен Чебишова – це тригонометричні функції типу $\cos g(x)$, для яких $g(x)=n\arccos x$ із областю визначення $I=[-1,1]$. Запишемо диференціальне рівняння, якому задовольняють многочлени T_n. Оскільки для функції $g(x)=n\arccos x$ її перша похідна $g'(x)=n(1-x^2)^{-1/2}$, друга похідна $g'''(x)=nx(1-x^2)^{-3/2}$, то підставивши їх в (4), отримаємо диференціальне рівняння для многочленів T_n:

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0. \tag{5}$$

В літературних джерелах, де розглядаються ортогональні многочлени, наприклад, в [7], диференціальне рівняння (5) не отримується (як в нашому випадку для ПФЗП), а навпаки, використовується (як наперед задане) для отримання многочленів Чебишова. При цьому також використовують також рівняння Пірсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{p_0+p_1x}{q_0+q_1x+q_2x^2}.$$

При певних умовах на коефіцієнти p_0, p_1, q_0, q_1, q_2 розв'язки $h(x)$ цього рівняння є ваговими функціями відповідних їм ортонормованих многочленів Чебишова.

9.4. Функції із змінним періодом зустрічаються при знаходженні розв'язку диференціального рівняння Ейрі $y''-xy=0$ [8].

Література.

1. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
2. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – №2. – С. 143-152.
3. Приймак М.В. Ортогональні системи періодичних функції із змінним періодом. // Матеріали одинадцятої наукової конференції ТНДУ Івана Пулюя, 2007. – С. 72.
4. Приймак М.В. Функції із змінним періодом // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Математика, механіка. Випуск 2(36) 2016. – С.14-16
5. Фролов Н.А. Теория функций действительного переменного. М., 1961. – 172 с.
6. Лузин Н.Н. Собрание сочинений. Т.3. М.: Изд-во АН СССР. – 508 с.
7. Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. – 416 с.
8. Математическая энциклопедия, т. 5. – М.: Сов. энцикл., 1985. – 1248 с.