УДК 519.2:621.391

М.В. Приймак, д. т. н., проф.; Б.Б.Млинко, к. т. н., доц.
Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Україна

ПЕРІОДИЧНІ ЛАНЦЮГИ МАРКОВА ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ В ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ

M.V. Pryimak, Dr., Prof., B.B.Mlynko, Ph.D., Assoc. Prof.

PERIODIC MARKOV CHAINS AND THEIR APPLICATION IN THE PROBLEMS OF ELECTRIC POWER INDUSTRY

Abstract. It is pointed out that in order to describe and study processes (signals, phenomena), which are of random nature, it is advisable to distinguish particular types of processes, to specify their models and on this basis to develop methods and algorithms for their analysis. One of such models is Markov chain. We consider a new class of chains - periodic Markov chains, methods of their processing and application in electric power industry for forecasting power consumption loads.

1. Вступ. При вивченні явищ природи, процесів техніки, економіки, дослідженні різноманітних сигналів, доводиться їх опис проводити за допомогою випадкових процесів $\xi(t), t \in I$, чи послідовностей $\xi_n, n = 1,2,\dots N$. Загальний метод математичного опису випадкових процесів полягає в наступному/ Для будь-якого додатного числа n і довільних моментів часу $t_1, t_2, \dots, t_n$ вважаються відомими функції розподілів

$$F(t_1,\dots,t_n; x_1,\dots,x_n) = P(\xi(t_1) < x_1,\dots,\xi(t_n) < x_n).$$

Пропонований метод опису випадкових процесів універсальний і дозволяє у принципі з'ясувати всі особливості поведінки процесу у часі. Проте цей спосіб дуже громіздкий. Тому для отримання певних результатів доцільно використовувати інший підхід: виділяти частинні типи випадкових процесів, що приймаються як моделі реальних явищ, і для них розробляти як аналітичний апарат їх дослідження так і відповідні методи статистичного аналізу. У зв'язку з різними реальними процесами виділено кілька класів випадкових процесів.

Серед різних класів випадкових процесів особливого значення набули **ланцюги Маркова і марковські процеси**. Ці моделі дозволяють враховувати характерну для багатьох стохастичних систем (сигналів) так звану **ланцюгову залежність**, яку прийнято називати **марківською властивістю**. Розкриваючи суть марковості на описовому рівні, іноді говорять, що коли відомий «теперішній» стан системи, то ніяка додаткова інформація про поведінку системи **в минулому** не впливає на ймовірнісні характеристики, які керують (описують) поведінкою системи в майбутньому. Більш коротко властивість марковості характеризують ще так: «майбутнє» системи не залежить від «минулого», якщо відоме «теперішнє».

2. Поняття ланцюга Маркова. Для означення ланцюга Маркова скористаємося такою схемою [1]. Нехай деяка система S в процесі її функціонування змінює свій стан (положення). Будемо вважати, що зміна стану відбувається в цілочисельні моменти часу $n = 0,1,2,\dots$, а можливі стани x_i системи S утворюють множину X, яка є не більше, ніж зліченною. Для спрощення можливі стани x_i ототожнимо із послідовністю натуральних чисел: $x = 1,2,3,\dots$. Серед реальних систем важливий клас утворюють системи, в яких переходи із стану в стан здійснюються випадково. При цьому ймовірність переходу системи із одного фіксованого стану в інший в даний момент часу не залежить від того, як вела себе система в попередні моменти. Такі системи називають марковськими.

Щоб навести означення ланцюга Маркова, спочатку розглянемо послідовність випадкових величин ξ_n, $n = 0,1,2,..$, які описують стани функціонуючої стохастичної системи в моменти часу $n = 0,1,2,...$, і приймають значення із «дискретного» фазового простору, який співпадає з множиною натуральних чисел $X = 0,1,2,...$, тобто ξ_n – цілочисельні величини.

Визначення 1. Послідовність ξ_n, $n = 0,1,2,..$ називається **ланцюгом Маркова**, якщо для всіх $n \geq 1$ умовна ймовірність

$$P(\xi_n = j | \xi_0 = k,...,\xi_{n-2} = l, \xi_{n-1} = i) = P(\xi_n = j | \xi_m = i) \overset{df}{=} p_{i,j}(n). \qquad (1)$$

Числа i, j, k, l належать фазовому просторові X , тобто є невід'ємними і цілими.

Перехідні ймовірності $p_{ij}(n)$ в сукупності утворюють матрицю переходів

$$\Pi(n) = \| p_{ij}(n) \|, \; i, j \in X, \; n = 0,1,....$$

Аналізуючи (1), видно, що для повного задання ланцюгів Маркова достатньо знати лише двомірний розподіл. Це властивість значно спрощує вирішення ряду задач теоретичного і прикладного характеру.

Із ланцюгів Маркова виділено важливий клас – однорідні ланцюги.

Визначення 2. Ланцюг ξ_n, $n = 0,1,...$, називається **однорідним,** якщо перехідні ймовірності $p_{ij}(n)$ не залежать від n, тобто $p_{ij}(n) = p_{ij}$. Звідси видно, що однорідний ланцюг визначається лише однією матрицею переходів $\Pi = \| p_{ij} \|$.

3. Періодичні ланцюга Маркова.

Однорідні ланцюги Маркова є вдалою моделлю для систем, що функціонують в стаціонарному режимі. Проте результати досліджень багатьох стохастичних систем показують, що крім марковості принциповою особливістю їх функціонування є **стохастична періодичність**. Яскравим прикладом такої поведінки є графіки споживання електроенергії, які ще називають графіками енергонавантажень. Для прикладу на рисунку 1 показано графік енергоспоживання навантаження для Київенерго для п'яти робочих дні грудня одного із минулих років.

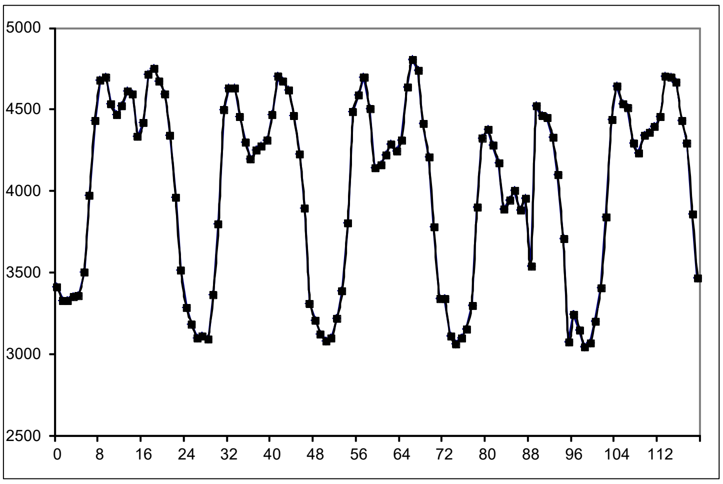

Рисунок1. Графік навантаження Київенерго за п'ять робочих днів грудня одного із минулих років

Важливою задачею дослідження енергонавантажень є розрахунок їх прогнозних значень. Для вирішення цієї задачі може бути використаний новий клас ланцюгів – періодичні ланцюги Маркова, вперше введені та розглянуті в роботах [2-4].

Визначення 3. Ланцюг Маркова ξ_n, $n = 0,1,\ldots$, називається **періодичним**, якщо періодичними є його ймовірності переходів, тобто існує ціле $L > 1$, що

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(n + L), i, j \in X ,$$

де i, j – стани, $i, j \in X$.

Очевидно, що для періодичного ланцюга Маркова його матриці переходів $\Pi(n) = \left|p_{ij}(n)\right|$ теж змінюються періодично з цим же періодом L :

$$\Pi(n) = \Pi(n + L), n = 0,1,\ldots$$

Із означення також випливає, що періодичний ланцюг визначається першими L матрицями переходів

$$\Pi(0) ,\ldots,\Pi(k) ,\ldots,\Pi(L - 1).$$

Важливо, що для періодичних ланцюгів Маркова мають місце певні властивості однорідності. Доведена теорема, суть якої полягає в наступному. Вкладена по відношенню до періодичного ланцюга послідовність,, елементи якої взяті через період L , є однорідним ланцюгом Маркова. На цій основі розроблені аналітичні та статистичні методи дослідження періодичних ланцюгів Маркова [4-6], що дозволяють вирішувати певні задачі як аналітичного характеру так і прикладного спрямування:

- Знаходження оцінок матриць переходів періодичних ланцюгів Маркова.
- Імітаційне моделювання періодичного ланцюга Маркова.
- Розрахунок прогнозних значень періодичних ланцюгів Маркова та використання методів прогнозу в електроенергетиці для прогнозу графіків електроспоживання, оптимізації функціонування енергосистем.

Література

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1969. - 400 с.
2. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис… докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.
3. Приймак М.В. Марківські періодичні процеси // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 3. – С. 17-21.
4. Приймак М.В. Періодичні ланцюги Маркова в задачах статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень // Технічна електродинаміка. – 2004. – №2. – С. 3-7.
5. Приймак М., Прошин С. Елементи однорідності для періодичних ланцюгів Маркова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – Том 14 – № 2. – С. 114-123.
6. Приймак М.В. Прошин С.Ю. Оцінювання матриць переходів періодичних ланцюгів Маркова // ISSN 1990-5548 Електроніка та системи управління. – 2009. – №3(21). – С. 26-33.