

УДК 621.01, УДК 517.94

М. І. Ігнатишин¹, к. т. н., доц., Я. М. Пелех², к. ф.-м. н., доц.,М. С. Михайлишин³, к. ф.-м. н, доц.¹ Мукачівський державний університет, Україна² Національний університет "Львівська політехніка", Україна³ Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНІМАЦІЯ НЕЛІНІЙНОГО ПРУЖНОГО ГАСНИКА КОЛИВАНЬ

М. І. Ihnatyshyn, Ph.D., Assoc. Prof., Ya. M. Pelekh, Ph.D., Assoc. Prof.

M. S. Mykhailyshyn, Ph.D., Assoc. Prof.

STUDY AND ANIMATION OF NONLINEAR ELASTIC DAMPER OF OSCILLATIONS

Abstract. A mathematical model and animation of the dynamic system of the passive spring damper of oscillations was built. The effect of the spring dynamic absorber was calculated using the proposed method with two-sided estimation of the local error. These calculation formulas make it possible to obtain an approximation to the exact solution from above and below, as well as to calculate the value of the main term of the local error.

Побудовано математичну модель та анімацію динамічної системи пасивного пружинного гасника коливань. Розраховано дію пружинного динамічного поглинача із застосуванням запропонованого методу з двосторонньою оцінкою локальної похибки.

Математичне моделювання гасників коливань є актуальною задачею [1-3]. Розглядається ресора важільного типу (Рис.1).

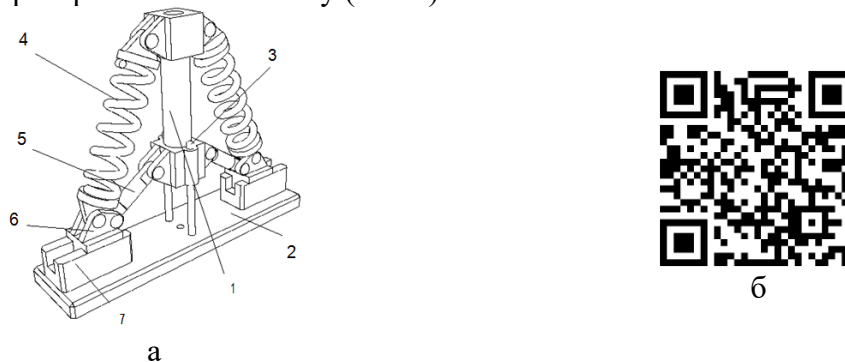


Рис.1. Ресора важільного типу (а – конструкція, б – за QR-кодом анімація математичної моделі ресори в Mathcad) .

Ресора містить рухому (1) і нерухому (2) платформи, які переміщуються одна відносно іншої вздовж напрямних (3), між якими для утворення пружного зв'язку встановлено циліндричні пружини (4) стискання. Керування пружними характеристиками здійснюється завдяки механічній системі управління у вигляді шарнірноважільного механізму. Вона складається з важеля (5), який одним кінцем контактує з рухомою платформою (1), а іншим з повзуном (6), на якому у свою чергу закріплений один з кінців пружини стискання (4), інший кінець якої контактує з рухомою платформою (1). Сам повзун переміщується вздовж напрямної, закріпленої на нерухомій платформі (2) і обумовлює реалізацію необхідного знакозмінного переміщення одного з кінців пружини для зміни кута нахилу її осі відносно головної осі пристрою. Верхня частина рухомої платформи може бути опорою для маси m . При побудові фізико-

математичної моделі ресори вважаємо, що маса m значно більша важільно-пружинної конструкції ресори і на масу m діє періодична збуджуюча сила. Диференціальне рівняння, що описує рух ресори важільного типу є нелінійним і має вигляд:

$$\ddot{y} + \omega_n^2(y) \cdot a + 2 \cdot r \cdot v = f(t) \quad (1)$$

де $\ddot{y} = a$ – прискорення вертикального руху; початкові умови $y = 0, v = 0$.

Перетворимо рівняння руху другого порядку в систему двох рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -\omega_n^2(y) \cdot a - 2 \cdot r \cdot v + f(t) \end{cases} \quad (2)$$

де $f(t) = \frac{A}{m} \cdot \sin(\omega t)$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\omega = 2\pi\nu$; $r = \frac{\beta}{2m}$.

Значення локальної власної частоти коливань важільної ресори має вигляд:

$$\omega_n(y) = \omega_0 \cdot \sqrt{n \cdot \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ad + 2ay}} \right)} \quad (3)$$

Метод третього порядку точності. Розглянемо задачу (2) в більш загальній постановці, а саме як систему нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\bar{y}'(x) = \bar{f}(x, \bar{y}), \quad \bar{y}(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \quad (4)$$

де $[x_0, x_0 + L] \subset R, \quad y(x) \in R^S,$

$\bar{f}: [x_0, x_0 + L] \times R^S \rightarrow R,$

Для зменшення громіздкості записів, представимо наближені розв'язки задачі (4) у скалярному випадку, оскільки на системи рівнянь вони переносяться покомпонентно. Використовуючи теорію побудови однокрокових методів, наближений розв'язок задачі (4) шукаємо у вигляді ланцюгового дробу [4]:

$$y_{n+1}^{[k,l]} = y_n / D_n^{[k,l]}, \quad (5)$$

де

$$D_n^{[k,l]} = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1} + \frac{d_{k,1}}{1} + \dots + \frac{d_{k,l-1}}{1+d_{k,l}}. \quad (6)$$

Вирази для $d_{k,l}$ у випадку $k+l=3$ ($k=1,3; l=0,2$) мають вигляд:

$$\begin{aligned} d_{0,0} = 1, \quad d_{i,0} = -\sum_{m=1}^i d_{i-m,0} \sigma_m / y_n, \quad i=1,2,3; \quad d_{2,1} = -d_{3,0} / d_{2,0}, \quad d_{1,2} = d_{2,1} - d_{1,1}, \\ \sigma_m = h \cdot \sum_{i=1}^3 a_{mi} k_i, \quad k_i = f(x_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут h – крок інтегрування, a_{ij} ($i, j=1,3$), $\alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ – параметри. Наведемо одну з множин значень параметрів, при яких $y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[k,l]} = O(h^4)$:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = 2/3, \quad \beta_{32} = 2/3, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_{31} = -\beta_{32}, \quad a_{11} = 1, \quad a_{12} = a_{13} = 0, \\ a_{21} = -3/4, \quad a_{22} = 3/4, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = -1/(4\beta_{32}), \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 1/(4\beta_{32}), \end{aligned} \quad (8)$$

де $\beta_{32} \neq 0$ – параметр.

Метод з двосторонньою оцінкою локальної похибки. Значення параметрів, які дають двосторонню оцінку локальної похибки, такі:

$$a_{11} = 1, \quad a_{21} = -\frac{3}{4}(1 + \omega^{[\pm]}), \quad a_{22} = \frac{3}{4}(1 + \omega^{[\pm]}), \quad a_{31} = \frac{3}{4}\omega^{[\pm]} - a_{33}, \quad a_{32} = -\frac{3}{4}\omega^{[\pm]}, \quad (9)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{3}, \alpha_3 = 0, \beta_{21} = \frac{2}{3}, \beta_{31} = -\frac{1}{4a_{33}}, \beta_{32} = \frac{1}{4a_{33}}, a_{33} - \text{параметр } (a_{33} \neq 0).$$

Локальна похибка цих формул при $(k = 3, l = 0)$ має вигляд:

$$R^{[3,0]} = \omega^{[\pm]} h^3 \cdot f \cdot Df / (y_n - hf) + O(h^4) = \omega^{[\pm]} h^2 \cdot k_1 \cdot \sum_{i=1}^3 a_{3i} k_i / y_{n-1} + O(h^4).$$

Зауважимо, що запропоновані формули третього порядку точності і відповідні їм двосторонні розрахункові формули другого порядку точності містять в собі одні і ті ж значення параметрів $\alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$. Це означає, що використовуючи лише три звертання до правої частини диференціального рівняння (4) маємо і метод третього порядку точності і два двосторонні наближення другого порядку до точного розв'язку, а також явну оцінку головного члена локальної похибки.

Результати розрахунків. З Рис.2 видно, що локальна власна частота коливань $\omega_n(y)$ має граничне значення $\omega_{n\max} = 1,813 \text{ c}^{-1}$ при максимальній амплітуді $y_{\max} = 0,261 \text{ м}$ і менша від $\omega(y) = 3,77 \text{ c}^{-1}$ – частоти зовнішньої сили та $\omega_0(y) = 3,873 \text{ c}^{-1}$ – власної частоти коливань пружної системи без важелів.

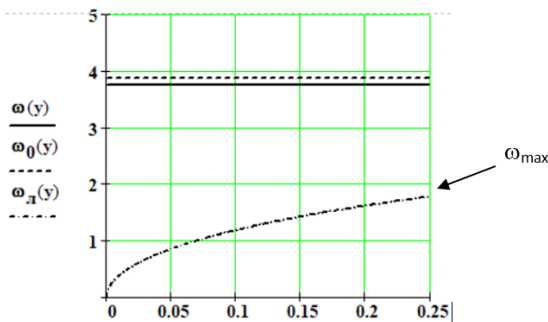


Рис. 2. Залежність локальної власної частоти коливань $\omega_n(x)$ від миттєвого значення амплітуди рухомої платформи.

Максимальна амплітуда коливань не перевищує 0,25 м, рис.2., резонанс неможливий оскільки $\omega_n(y) < \omega(y)$ – частота зовнішньої збурюючої сили.

Подальше дослідження передбачає розгляд різних варіантів гасіння коливань з застосуванням двосторонніх методів, наприклад, при ударах, вібраціях з різним характером та законом сил опору зовнішнього середовища.

Література

1. Сидоренко І.І., Ткачов А.В., Ткачов О.А. Визначення вільних коливань маси пасивного динамічного гасника з додатковою механічною структурою // Вісник ХНАДУ, 2016, вип.74. - С. 94-99.
2. Парашук Д. Л., Зіркевич В. М., Грубель М. Г. Моделювання динаміки гасника коливань із керованою частотою // Науковий вісник НЛТУ України, 2021, т. 31, № 1. - С.105-108.
3. Сидоренко І.І., Гутиря С.С., Аتماжов С.В. Нелінійний динамічний вібропогашувач з механічним зворотним зв'язком // Труды Одесского политехнического университета, 2010, вып. 1(33)–2(34). - С. 28-31.
4. Пелех Я.М., Кунинець А.В., Берегова Г.І., Магеровська Т.В. Методи розв'язування початкової задачі з двосторонньою оцінкою локальної похибки. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. - 2021, Вип.33. – С. 88-92.