УДК 531
В. Федоров, к.т.н., доц.
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ ПОШКОДЖУВАНОСТІ МАТЕРІАЛІВ

V. Fedorov, Ph.D, Assoc. Prof.
National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»

MATHEMATICAL MODELING OF THE EVOLUTIONARY DAMAGEABILITY OF MATERIALS

Abstract. The problem of constructing the evolutionary damageability equation is conosidered. It is proved that if the damageability function in the Kachanov model is factorized , then this model gives the same rupture moment as the Palmgren-Miner rule, which is at variance with experiments. To construct a non-factorized damageability function, a method based on its potential representation has been developed.

Еволюційне руйнування матеріалу викликається тривалою дією $L(\xi)$ на нього таких факторів, як, наприклад, напруження (тривале руйнування), амплітуда напруження (багатоциклове втомне руйнування) або амплітуда деформації (малоциклове втомне руйнування). Тривалість ξ дії - це час (тривале руйнування) або кількість циклів навантаження (втомне руйнування). Момент руйнування x_R — це, відповідно, час або кількість циклів, через яку матеріал руйнується. Така уніфікація термінології та позначень допустима й необхідна, оскільки математичні моделі пошкоджуваності різної фізичної природи ідентичні.

Відомо, що при еволюційному руйнуванні момент руйнування є функціоналом протоколу дії:

$$x_R = X[L(\xi)],\ 0 \le \xi \le x_R. \tag{1}$$

Для прогнозування моменту руйнування при заданому протоколі дії необхідно побудувати цей функціонал, адекватний експериментальним даним. Найпростішими є випробування матеріалів при стаціонарних діях

$$L(\xi) = L = const, \tag{2}$$

результатом яких є функція, крива еволюційної міцності $x_R = X_R(L)$. У відповідних областях механіки це крива тривалої міцності або крива втомної міцності. Практично значимим є формулювання функціоналу (1), адекватного за умов нестаціонарних дій.

Перший відомий функціонал (1) був представлений Пальмгреном [1] для прогнозування втомного руйнування підшипників, який Майнер [2] застосував для втоми матеріалів. Він увійшов також у практику розрахунку тривалої міцності. У формальному вигляді ця теорія використовує функціонал пошкодженості

$$I[L(\xi), x] = \int_0^x \frac{d\xi}{X_R(L(\xi))},\ 0 \le \xi \le x \le x_R \tag{3}$$

та умову руйнування

$$I[L(\xi), x_R] = 1. \tag{4}$$

якими визначається функціонал (1). При заданому протоколі дії $L(\xi)$ може бути знайдений момент руйнування. Експериментальна перевірка правила Пальмгрена-Майнера (ППМ) (3), (4) показала, що реальні значення функціоналу Пальмгрена-Майнера (4) для різних матеріалів можуть суттєво відрізнятись від одиниці в обидві сторони. Тому ППМ не є цілком надійним для оцінки моменту руйнування.

Тому було сподівання на те, що більш складна математична модель Качанова (МК) [3], яка описує еволюцію змінної пошкодженості D рівнянням

$$\frac{dD}{d\xi} = f(L(\xi), D) \quad (5)$$

з початковою умовою $D(\xi = 0) = D_0$ та умовою руйнування $D(\xi = x_R) = D_R$ зможе краще прогнозувати момент руйнування.

Але Odqvist F.K.G. і Hult J. [4] показали, що для функції пошкоджуваності $f(L(\xi), D)$ у степеневому вигляді з $D_0 = 0$ та $D_R = 1$ МК кількісно еквівалентна ПМП. Також Ostergren W. J. і Krempl E. [5] показали, що у разі двоступінчастої дії МК кількісно еквівалентна ПМП якщо функція пошкоджуваності факторизована:

$$f(L, D) = \frac{f_1(L)}{f_2(D)}. \quad (6)$$

Кінец кінцем, Lemaitre, J, і Desmorat, R. [5] стверджують, що тотожність значень момента руйнування, визначених за МК та ППМ є загальною властивістю рівняння (5). Однак, цей висновок є помилковим. Можна довести наступне ствердження.

Теорема. Якщо функція пошкоджуваності факторизована (6), тоді МК дає той же момент руйнування, що и ППМ незалежно від виду функцій в (6) та початкового і кінцевого значень функції пошкодженості.

Виникає питання: якщо дві моделі дають однаковий результат, яку з них треба застосовувати? Бритва (принцип) Оккама відсікає модель Качанова, як набагато складнішу і тому менш ефективну. Вона може проявити свої потенційні можливості тільки у випадку нефакторизованої функції пошкоджуваності. Однак в літературі переважно користуються саме факторизованими функціями, що є непродуктивним. Тільки в роботі Chaboche, JL, Lesne, PM [7] пропонуються нефакторізовані функції пошкоджуваності. Тому актуальною проблемою є створення теоретичних засад для побудови таких функцій, здатних описувати пошкоджуваність будь-яких матеріалів.

Пропонується застосування еволюційного рівняння (5) у потенціальній формі:

$$\frac{dD}{d\xi} = f(L(\xi), D) = \left\{\frac{\partial \Phi(L(\xi), D)}{\partial D}\right\}^{-1}, \quad (7)$$

де $\Phi(L, D)$ є потенціалом. Цим проблема знаходження функції пошкоджуваності замінюється проблемою знаходження потенціалу. Можна показати, що при стаціонарній дії (2) потенціал є тривалістю: $\Phi(L, D) = \xi$. Тому, маючи серію експериментальних залежностей пошкодженості від тривалості

$$D = D(L_i, \xi) = D(L_i, \Phi) \quad (8)$$

при різних постійних значеннях дії L_i та представивши залежність (8) у зворотньому вигляді $\Phi = \Phi(L_i, D)$ після її апроксимації маємо побудований потенціал $\Phi = \Phi(L, D)$. Після підстановки його у (7) отримаємо рівняння пошкоджуваності. Такий підхід є набагато простішим від традиційного, оскільки, на відміну від останнього, не пов'язаний з необхідністю інтегрування функції пошкоджуваності.

Література.

1. Palmgren A. Die lebensdauer von kugellagern. VDI-Z 68 (1924) 14, S. 339–341.
2. Miner M.A. Cumulative damage in fatigue. J Appl Mech 1945,12: A 159-A 164.
3. Kachanov L.M. The Theory of Creep. Boston, MA: Wetherby, 1960.
4. Odqvist F.K.G., Hult J., Some aspects of creep rupture, Arkiv för fysik 1961,19,379–382.
5. Ostergren W. J. and Krempl E. (1979) An uniaxial damage accumulation law for time-varying loading including creep-fatigue interaction. J. Press. Vess. Technol. Trans. ASME 101, 1-18.
6. Lemaitre J,, Desmorat R. Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
7. Chaboche J.L., Lesne P.M. A non-linear continuous fatigue damage model. Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures. 1988, 11(1), 1–17.