

УДК 539.3

О. Ясній<sup>1,2</sup>, д.т.н., проф., В. Ясній<sup>1</sup>, д.т.н., доц., Г. Сулим<sup>3</sup>, д.ф.-м.н., проф., Я. Пастернак<sup>4</sup>, д.ф.-м.н., проф., В. Демчик<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Україна

<sup>2</sup> Краківський технологічний університет, Польща

<sup>3</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

<sup>4</sup> Волинський національний університет імені Лесі Українки, Україна

## МОДЕЛІ ГІСТЕРЕЗИСНОЇ ПОВЕДІНКИ МАТЕРІАЛІВ ІЗ ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ

О. Yasniy<sup>1,2</sup>, D.Sc, Prof.; V. Iasnii<sup>1</sup>, D.Sc, Assoc. Prof.; H. Sulym<sup>3</sup>, D.Sc, Prof., Ia. Pasternak<sup>4</sup>, D.Sc, Prof., V. Demchuk<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ukraine

<sup>2</sup> Cracow University of Technology, Poland

<sup>3</sup> Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine

<sup>4</sup> Lesya Ukrainka Volyn National University, Ukraine

## MODELS OF HYSTERETIC BEHAVIOR OF SHAPE-MEMORY MATERIALS

**Abstract.** Shape memory alloys (SMA) are metallic alloys that can retain their initial form by memorising it between two transformation phases. Whilst loading such materials, the hysteresis loops are observed. There was proposed the model to describe the hysteresis loops of SMA wires, based on experimental stress strain diagram. The proposed model uses the least squares method. The applied approach shows good agreement with the empirical data.

Сплави з пам'яттю форми (СПФ) користуються великою популярністю з огляду на їхній унікальний ефект пам'яті форми і псевдопружність, спричинені аустенітно-мартенситним перетворенням [1]. Відомо багато видів СПФ, проте NiTi сплав найбільш розповсюджений через його стабільні властивості [2]. СПФ широко застосовують у медицині, [3], аерокосмічній галузі [4], виробництві двигунів [5], цивільному будівництві [6], та ін.

Для прогнозування поведінки сучасних функціональних матеріалів та зменшення кількості експериментальних досліджень, зазвичай, будують їхні описові математичні моделі, що дають можливість подальшого розрахунку зразків при різних умовах їхньої роботи, зокрема і за повторюваних навантажень. Проте без експериментальних даних вже ж у жодному разі не можна обійтися, адже будь-яка математична модель містить певні сталі, що характеризують фізико-механічні властивості матеріалу за конкретних зовнішніх умов.

У процесі експериментальних досліджень кривих деформування зразків при однократному навантаженні з'ясовано, що вони мають характер, властивий для пружно-пластичного деформування матеріалу зі зміцненням. Візуально встановлено, що криву деформування можна апроксимувати двома прямими відрізками за формулою

$$\sigma = \begin{cases} E_1 \varepsilon, & \sigma < \sigma_{pl} \\ E_2 \varepsilon + (1 - E_2/E_1) \sigma_{pl}, & \sigma \geq \sigma_{pl}. \end{cases} \quad (1)$$

тут  $E_1$ ,  $E_2$  – сталі модулі матеріалу;  $\sigma_{pl}$  – напруження, за яких відбувається зміна характеру кривої навантаження.

Математично очевидно, що параметри  $E_1$ ,  $E_2$  можна визначити із (1) як похідну

$$E_i = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \quad (2)$$

але у випадку набору експериментальних даних числове обчислення (2) має дуже малу точність унаслідок похибки визначення контрольованих величин у кожній із експериментальних точок кривої деформування. Тому у цьому дослідженні для обчислення параметрів залежності (1) запропоновано підхід, що полягає в апроксимації експериментальних даних залежністю (1) за допомогою методу найменших квадратів.

Для цього складемо функціонал квадратів відхилень у вигляді

$$F = \sum_{i=1}^m (E_1 \varepsilon_i - \sigma_i)^2 + \sum_{i=m+1}^N (E_2 (\varepsilon_i - \varepsilon_m) + E_1 \varepsilon_m - \sigma_i)^2. \quad (3)$$

Тут  $N$  – кількість експериментально визначених точок кривої навантажування;  $1 < m < N$  – проміжна точка, у якій  $\sigma \approx \sigma_{pl}$ .

Мінімізувавши функціонал (3) за величинами  $E_1$ ,  $E_2$  отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$E_1 \left( \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 + (N-m) \varepsilon_m^2 \right) + E_2 \varepsilon_m \sum_{i=m+1}^N (\varepsilon_i - \varepsilon_m) = \sum_{i=1}^m \sigma_i \varepsilon_i - \varepsilon_m \sum_{i=m+1}^N \sigma_i, \quad (4)$$

$$E_1 \varepsilon_m \sum_{i=m+1}^N (\varepsilon_i - \varepsilon_m) + E_2 \sum_{i=m+1}^N (\varepsilon_i - \varepsilon_m)^2 = \sum_{i=m+1}^N \sigma_i (\varepsilon_i - \varepsilon_m).$$

Систему (4) розв'язуємо для кожного зі значень  $1 < m < N$ , обчислюючи при цьому функціонал (3). Розв'язком вважаємо таке  $m$ , для якого (3) приймає найменше значення. Аналогічно можна визначити і відповідні параметри відрізків, що апроксимують криву розвантаження зразка (модуль  $E_1'$ ). Як виявилось під час експериментальних досліджень, вони є дещо відмінними.

Отриманими параметрами скористалися у моделі гістерезисної поведінки матеріалу, у якій враховано пружно-пластичну модель матеріалу з лінійним зміцненням, а також пам'ять про деформації та криву навантажування на попередньому кроці.

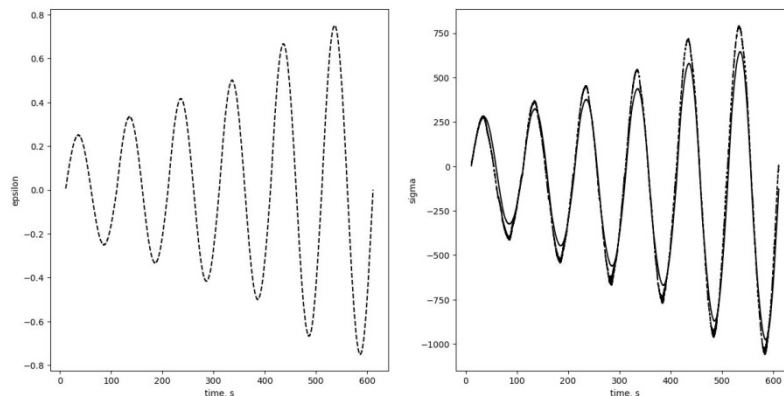


Рис. 1. Залежність експериментально (штрихові криві) та обчислених за отриманою моделлю деформацій та напружень у зразку

Підхід (1)–(4) разом із моделлю гістерезисної поведінки матеріалу закодовано у комп'ютерну програму мовою Python. Результати розрахунків, здійснених на основі експериментальних значень залежності деформацій від часу, у порівнянні із експериментально обчисленими значеннями напружень, зображено на рис. 1. У розрахунках характер навантажування вважався квазістатичним, тобто, інерційні ефекти не враховувалися унаслідок їхньої надзвичайно малої величини.

Із рис. 1 видно досить добру узгодженість побудованих за отриманою гістерезисною моделлю напружень із експериментальними даними, хоча створена модель і дає дещо занижені значення при пікових значеннях деформацій. Це можна пояснити застосованою кусково-лінійною моделлю опису поведження матеріалу.

Експериментально (штрихові криві) та теоретично (суцільні лінії) отримані залежності напружень від деформацій із явним відображенням гістерезисного характеру процесів повторюваного деформування зображено на рис. 2.

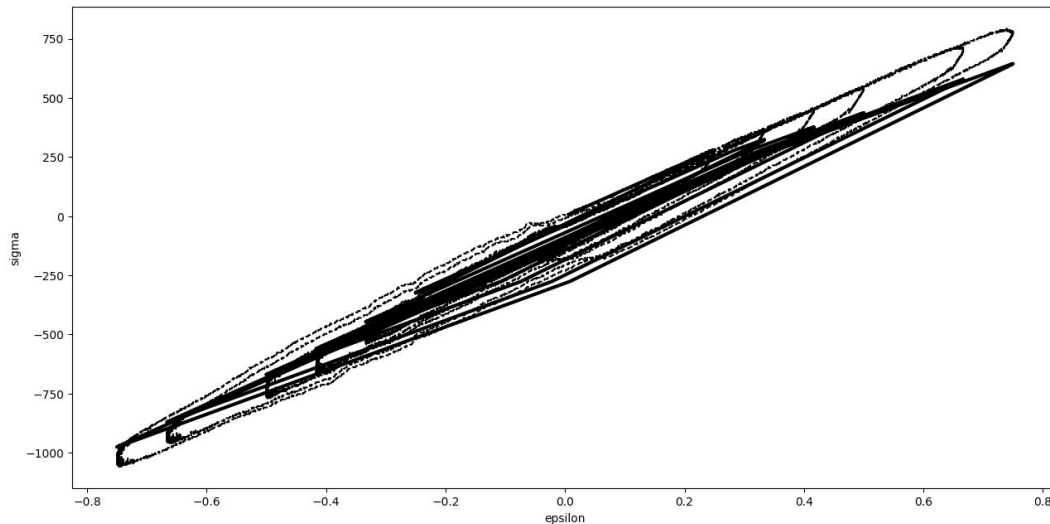


Рис. 2. Гістерезисний характер кривих повторюваного деформування

Із рис. 2 також видно досить добру узгодженість отриманих кривих, хоча експериментальні дані дещо більш витягнуті уздовж вертикальної осі, що можна пояснити нелінійною залежністю напружень від деформацій для реального матеріалу.

**Висновки.** У роботі побудовано математичну модель опису петель гістерезису сплаву із пам'яттю форми, яка ґрунтується на методі найменших квадратів. Запропонований підхід дозволяє отримати залежності гістерезисної поведінки матеріалу на основі експериментальних даних. Модель досить добре описує діаграми деформування сплавів із пам'яттю форми.

#### Література.

- [1]Otsuka K, Ren X. Recent developments in the research of shape memory alloys. *Intermetallics* 1999;7:511–28.
- [2]Zhang XP, Liu HY, Yuan B, Zhang YP. Superelasticity decay of porous NiTi shape memory alloys under cyclic strain-controlled fatigue conditions. *Mater Sci Eng A* 2008;481–482:170–3.
- [3]Petrini L, Migliavacca F. Biomedical Applications of Shape Memory Alloys. *J Metall* 2011;2011:1–15.
- [4]Hartl DJ, Lagoudas DC. Aerospace applications of shape memory alloys. *Proc Inst Mech Eng Part G J Aersp Eng* 2007;221:535–52.
- [5]Abubakar RA, Wang F, Wang L. A review on Nitinol shape memory alloy heat engines. *Smart Mater Struct* 2020;30:013001.
- [6]Zareie S, Issa AS, Seethaler RJ, Zabihollah A. Recent advances in the applications of shape memory alloys in civil infrastructures: A review. *Structures* 2020;27:1535–50.