

УДК: 539.3

Б. Шелестовський, к.ф.-м.н., доц., Г. Габрусев, к.ф.-м.н., доц., І. Габрусєва, к.т.н.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ОЦІНКА МІЦНОСТІ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ ПЛИТИ ПРИ ЇЇ СТИСНЕННІ ДВОМА ШТАМПАМИ

B. Shelestovskyi, Ph.D., Assoc. Prof., H. Habrusiev, Ph.D., Assoc. Prof.,
I. Habrusieva, Ph.D.
Ternopil Ivan Puluji National Technical University, Ukraine

STRENGTH ESTIMATION OF THE PRELIMINARY STRESSED PLATE COMPRESSED WITH TWO INDENTERS

Abstract. The stress-strain state of a predeformed plate, which is modeled by a prestressed layer, is analyzed in the case of its smooth contact interaction with two rigid axisymmetric parabolic indenters. The influence of plate thickness and its initial strains on the magnitude and features of the contact stresses and vertical displacements on the surface of the plate is analyzed for the case of compressible and incompressible solids.

Розрахунок на міцність елементів конструкцій та деталей машин є одним із найважливіших етапів їх проектування. Мінімізація похибки розрахунку вимагає врахування максимальної кількості факторів, які впливають на контактну взаємодію тіл, зокрема наявність початкових напружень або деформацій.

Розглянемо задачу про стиснення попередньо напруженої плити двома співвісними жорсткими штампами. Плита стискається штампами поступально без обертання та тертя під дією постійної сили P . Кожен із штампів утворено обертанням навколо спільної осі вітки параболі та відрізка прямої, яка перпендикулярна до осі параболі. Фокальні параметри парабол для верхнього та нижнього штампів відповідно дорівнюють R_1 та R_2 . Осі парабол, що обмежують штампи, паралельні до спільної осі обертання, яка співпадає із лінією дії сил P . Виберемо циліндричну систему координат (O, r, θ, z) так, щоб координатна площина (O, r, θ) співпадала із серединною площиною плити, а вісь Oz – із віссю симетрії штампів (рис. 1).

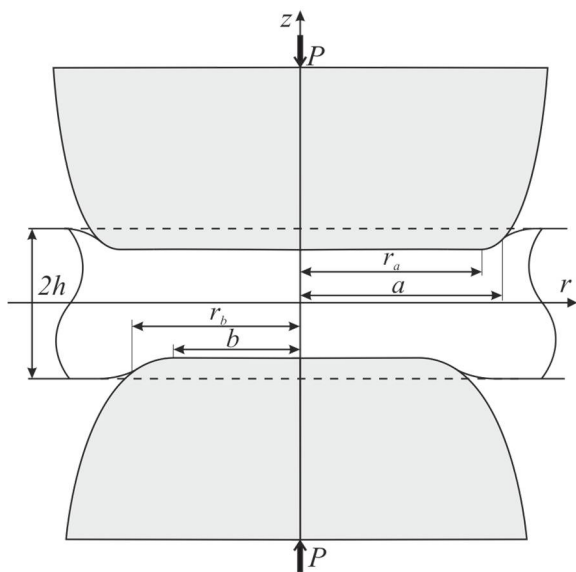


Рис. 1. Схема стиснення плити

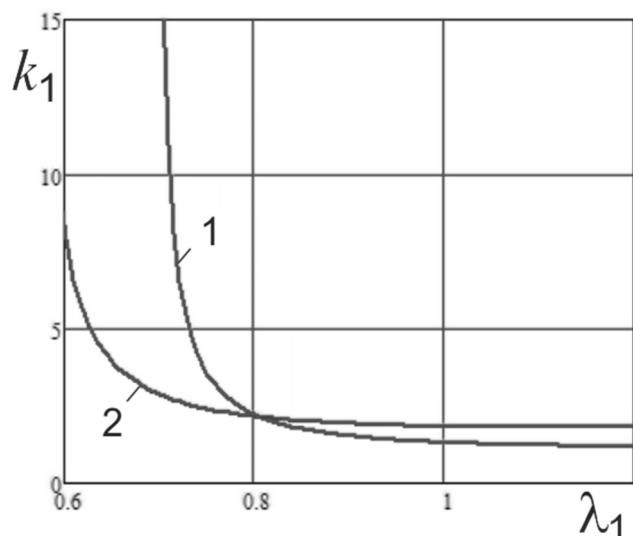


Рис. 2. Залежність k_1 від λ_1

Граничні умови поставленої задачі матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(r, h) &= 0, a \leq r; & \sigma_{zz}(r, -h) &= 0, b \leq r; \\ \sigma_{rz}(r, h) &= 0, 0 \leq r < \infty; & \sigma_{rz}(r, -h) &= 0, 0 \leq r < \infty; \\ u_z(r, h) &= \omega_1(r), 0 \leq r \leq a; & u_z(r, -h) &= \omega_2(r), 0 \leq r \leq b,\end{aligned}$$

функції $\omega_1(r)$ та $\omega_2(r)$ описують форму штампів

Розв'язання задачі проведено із використанням розробленої методики [1 – 2] у рамках лінеаризованої постановки задачі теорії пружності. Парні інтегральні рівняння, що виникають у результаті задоволення граничних умов, розв'язано за допомогою подання шуканих функцій контактних напружень у вигляді частинної суми ряду за функціями Бесселя з невідомими коефіцієнтами $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ та $R^{(i)}$, для визначення яких будуються скінченні системи лінійних алгебричних рівнянь.

Остаточно функції розподілу контактних напружень під штампами мають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(r, h) &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=1}^N [R^{(1)}a_n^{(1)} + R^{(2)}a_n^{(2)}] J_0\left(\frac{r}{a}\beta_n\right), \\ \sigma_{zz}(r, -h) &= \frac{P}{2\pi} \sum_{n=1}^N [R^{(1)}b_n^{(1)} + R^{(2)}b_n^{(2)}] J_0\left(\frac{r}{b}\beta_n\right),\end{aligned}\tag{1}$$

а вертикальні переміщення точок граничних площин плити визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}u_z(r, h) &= \frac{k_1}{2} \frac{P}{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^N (R^{(1)}a_n^{(1)} + R^{(2)}a_n^{(2)}) \int_0^\infty I_n^{(1)}(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N (R^{(1)}b_n^{(1)} + R^{(2)}b_n^{(2)}) \int_0^\infty I_n^{(2)}(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha \right\}; \\ u_z(r, -h) &= \frac{k_1}{2} \frac{P}{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^N (R^{(1)}a_n^{(1)} + R^{(2)}a_n^{(2)}) \int_0^\infty I_n^{(1)}(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N (R^{(1)}b_n^{(1)} + R^{(2)}b_n^{(2)}) \int_0^\infty I_n^{(2)}(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha \right\},\end{aligned}\tag{2}$$

де β_n – додатні нулі функції Бесселя $J_0(r)$, а $I_n^{(1)}(\alpha)$ та $I_n^{(2)}(\alpha)$ – відомі функції.

Коефіцієнт k_1 , який входить до співвідношень (1) – (2), характеризує вплив початкових деформацій та залежить від структури пружного потенціалу попередньо напруженої плити. Зокрема, у випадку потенціалу Бартенєва-Хазановича (нестисливі тіла)

$$k_1 = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\lambda_1^{\frac{7}{2}}}{3\lambda_1^3 - 1},$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, E – модуль Юнга матеріалу плити, λ_1 – параметр лінійного видовження. Останнє співвідношення прямує до нескінченності при $3\lambda_1^3 - 1 = 0$, тобто при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{kp} \approx 0.693$. Значення λ_{kp} відповідає поверхневій нестійкості при рівномірному двовісному стиску. При цьому, як випливає зі (1) та (2), вертикальні переміщення точок граничних площин плити необмежено зростають, а контактні напруження відсутні. Отже, спостерігається такий механічний ефект: при наближенні λ_1 до критичного значення λ_{kp} у плиті виникають явища «резонансного характеру», які були раніше виявлені О.М. Гузем у задачах крихкого руйнування матеріалів із

початковими напруженнями [3]. Аналогічний ефект спостерігається у тілах із пружним потенціалом гармонічного типу (стисливі тіла), для якого

$$k_1 = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1(2+\nu)-(1+\nu)}.$$

Для різних матеріалів критичні значення λ_{kp} є різними, оскільки залежать від ν . Зокрема, при $\nu = 0.3$ «резонансні» явища спостерігаються при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{kp} \approx 0.565$.

На рис. 2 ілюструється графічна залежність k_1 від параметра лінійного видовження λ_1 для випадку наявності у плиті пружного потенціалу Бартенева-Хазановича (крива 1) та потенціалу гармонічного типу (крива 2). З наведених графіків випливає, що вплив початкових напружень на вертикальні переміщення як для стисливих, так і для нестисливих тіл значно вищий у випадку попередніх деформацій стиску ($\lambda_1 < 1$), ніж у випадку попередніх деформацій розтягу ($\lambda_1 > 1$).

На рис. 3 зображено графік функції $\sigma^*(r) = \frac{\sigma_{zz}(r,0)}{P}$, що описує розподіл контактних напружень для випадку стиснення плити двома однаковими співвісними параболічними штампами при $R_1 = R_2 = 2$, $r_a = r_b = 0$. Графік величини $u^*(r) = \frac{u_z(r,0)}{P}$, що описує вертикальні переміщення точок верхньої граничної площини плити для цього ж випадку, побудовано на рис. 4.

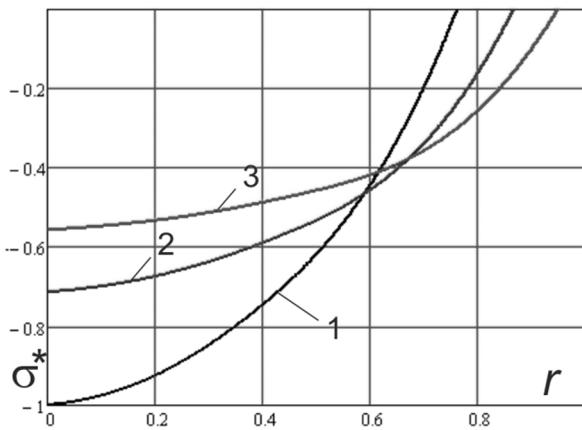


Рис. 3. Контактні напруження

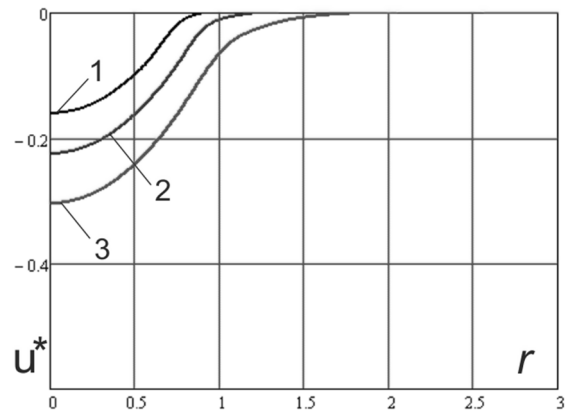


Рис. 4. Вертикальні переміщення

Крива 1 відповідає товщині плити $H = 0.5$, крива 2 – $H = 1$, крива 3 – $H = 2$. Як видно із рисунків, товщина плити впливає на екстремальні значення контактних напружень. Зокрема, при стисненні плити товщиною $H = 0.5$ двома параболічними штампами, екстремальні значення контактних напружень більші на 40% ніж при $H = 1$.

Література.

1. Габрусєва І.Ю. Контактна задача про стиснення ізотропного шару двома параболоїдальними штампами з урахуванням поля залишкових деформацій / Б.Г. Шелестовський, І.Ю. Габрусєва // Вісник ТНТУ. – 2014. – 73.№1. – С. 44-52.
2. Habrusiev, N.V., Habrusieva, I.Y. & Shelestovskyi, B.H. Contact Interaction of a Prestrained Thick Plate with Parabolic Punch. J Math Sci 263, 129–137 (2022).
3. Гузь О. М. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями: Навч. посібник / Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. – К: Вища школа, 1995. – 304 с.