УДК 539.3

Н. Антоненко[1], к.ф.-м.н., доц., І. Ткаченко[2], к.ф.-м.н., доц., А. Ткаченко[2], студент
[1]Національний університет «Запорізька політехніка», Україна
[2]Запорізький національний університет, Україна

ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ОСНОВИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

N. Antonenko, Ph.D., Assoc. Prof., I. Tkachenk, Ph.D., Assoc. Prof., A. Tkachenko, student
[1] National University "Zaporizhzhia Polytechnic" Ukraine,
[2] Zaporizhzhia National University, Ukraine

SPATIAL PROBLEM OF THERMAL CONDUCTIVITY OF A TWO-LAYER FOUNDATION WITH IMPERFECT THERMAL CONTACT OF ITS LAYERS

An analytical solution of a three-dimensional stationary problem of determining temperature field at the points of a two-layer foundation with imperfect thermal contact between its layers is obtained. The considered problem is solved by the two-dimensional Fourier transform. The influence of the thermal resistance coefficient on the temperature distributions at the points of the lower boundary of the upper layer is researched.

Розглянемо двошарову основу, яка знаходиться під впливом температурного поля. Під двошаровою основою розумітимемо пакет із двох однорідних, невагомих та ізотропних зчеплених між собою шарів, що лежить на півпросторі. На спільних межах шарів виконуються умови неідеального теплового контакту [1], а між пакетом та півпростором – ідеального теплового контакту. На верхній межі основи відомо закон розподілу температури, а на поверхні півпростору підтримується нульова температура. Необхідно знайти розподіл температури в точках основи.

Нумерацію шарів будемо проводити зверху вниз, починаючи з одиниці, півпростору присвоїмо номер 3. У кожному шарі введемо локальну декартову систему координат з початком на верхній межі шару так, щоб усі вісі $O_k z_k$ лежали на одній прямій, а вісі $O_k x_k$, $\left(O_k y_k\right)$ були паралельні $O_1 x_1$ ($O_1 y_1$).

Задача зводиться до розв'язання диференціального рівняння відносно температури $T_k = T_k(x, y, z)$ для кожного шару основи:

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} = 0 \,, \; k = 1{,}2 \,.$$

Граничні умови:

$$T_1(x, y{,}0) = f(x, y) \,, \; T_3(x, y{,}0) = 0 \,. \tag{1}$$

Умови на спільних межах шарів [1]:

$$k_{T,1}\frac{\partial T_1}{\partial z}(x, y, h_1) = \frac{1}{R}\left[T_2(x, y{,}0) - T_1(x, y, h_1)\right], \; k_{T,2}\frac{\partial T_2}{\partial z}(x, y{,}0) = k_{T,1}\frac{\partial T_1}{\partial z}(x, y, h_1) \,, \tag{2}$$

$$T_3(x, y{,}0) = T_2(x, y, h_1) \,, \; k_{T,3}\frac{\partial T_3}{\partial z}(x, y{,}0) = k_{T,2}\frac{\partial T_2}{\partial z}(x, y, h_2) \,, \tag{3}$$

де R – коефіцієнт теплового опору.

Задача розв'язується за допомогою двомірного інтегрального перетворення Фур'є за змінними x та y:

$$\overline{f(x, y)} = \bar{f}(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(\xi x + \zeta y)} dx dy \,, \; f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi, \zeta) e^{-i(\xi x + \zeta y)} d\xi d\zeta \,.$$

Відомо [2], що трансформанту температури $\overline{T}_k(\xi,\zeta,z)$ k-го шару основи можна подати у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій $\eta_k(\xi,\zeta)=\overline{T}_k(\xi,\zeta,0)$, $\varepsilon_k(\xi,\zeta)=\dfrac{1}{p}\dfrac{d\overline{T}_k}{dz}(\xi,\zeta,0)$:

$$\overline{T}_k(\xi,\zeta,z)=\mathrm{ch}pz\,\eta_k(\xi,\zeta)+\mathrm{sh}pz\,\varepsilon_k(\xi,\zeta),$$

де $p^2=\xi^2+\zeta^2$, $k=1,2$.

Запишемо граничні умови (1) та умови на спільних межах шарів (2), (3) у просторі трансформант. Будемо мати:

$$\overline{T}_1(\xi,\zeta,0)=\bar{f}(\xi,\zeta),\ \overline{T}_3(\xi,\zeta,0)=\overline{T}_2(\xi,\zeta,h_2)=0, \tag{4}$$

$$\overline{T}_2(\xi,\zeta,0)=\overline{T}_1(\xi,\zeta,h_1)+L\frac{d\overline{T}_1}{dz}(\xi,\zeta,h_1),\ k_{T,2}\frac{1}{p}\frac{d\overline{T}_2}{dz}(\xi,\zeta,0)=k_{T,1}\frac{1}{p}\frac{d\overline{T}_1}{dz}(\xi,h_1),\ L=R\,k_{T,1}. \tag{5}$$

Підставимо у рівності (4) та (5) вирази для трансформанти температури при $z=h_1$ та $z=h_2$. Використовуючи отримані співвідношення, знайдено рекурентні формули для обчислення допоміжних функцій шарів основи:

$$\eta_1=\overline{T}_1(\xi,\zeta,0),\ \eta_2=\left[C_1+LpS_1-r_1(S_1+LpC_1)\right]\eta_1,\ \varepsilon_k=-r_k\eta_k,\ r_1=\frac{\Delta S_1+r_2(C_1+LpS_1)}{\Delta C_1+r_2(S_1+LpC_1)},\ r_2=\mathrm{cth}\,p_2,$$

де $p_k=ph_k$, $\Delta=k_{T,1}/k_{T,2}$, $S_k=\mathrm{sh}p_k$, $C_i=\mathrm{ch}p_k$, $k=1,2$.

Оскільки $\varepsilon_k=-r_k\eta_k$, а $\lim\limits_{p\to\infty}r_k(p)=1$, то для чисельної реалізації поставленої задачі вирази для трансформант температури представлено у вигляді:

$$\overline{T}_k(\xi,\zeta,z)=\left(\mathrm{e}^{-pz}+\tilde{r}_k\mathrm{sh}pz\right)\eta_k(\xi,\zeta),\ k=1,2,$$

де $\tilde{r}_1=\left(\Delta+(1-\tilde{r}_2)(Lp-1)\right)e^{-p_1}\big/\left(\Delta C_1+(1-\tilde{r}_2)(S_1+LpC_1)\right)$, $\tilde{r}_2=-e^{-p_2}\big/S_2$.

Застосовуючи до останньої формули обернене перетворення Фур'є, отримаємо формулу, що дозволяє знайти температуру в будь-якій точці k-го шару основи.

Чисельні розрахунки проведено для двошарової основи з такими параметрами шарів: $h_1=h_2=1$, $k_{T,1}/k_{T,2}=1$. На її верхній межі $T_1(x,y,0)=T_0\delta(x,y)$. На рис. 1 та рис. 2 наведено графіки розподілу температури в перерізах $x=0$ та $x=1$ у точках нижньої межі верхнього шару основи при різних значеннях коефіцієнта теплового опору.

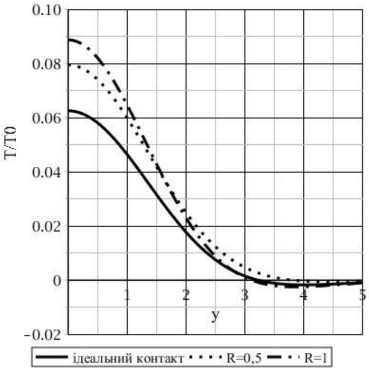

Рис. 1

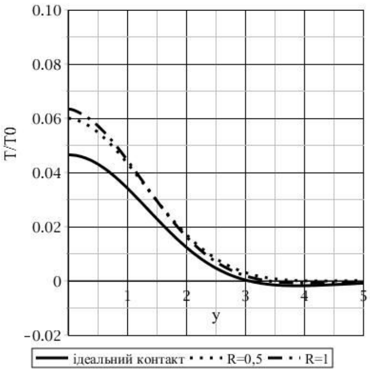

Рис. 2

Література.

1. Немиш Б. Ю. Трехмерные задачи термоупругости для неравномерно нагретых слоистых трансверсально-изотропных пластин / Б. Ю. Немиш // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 7. – С. 95–103.

2. Величко І. Г. Просторова та осесиметрична термопружна деформація багатошарової основи / І. Г. Величко, І. Г. Ткаченко // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – 2, № 6/2. – С. 36–43.