*УДК. 517: 519.6*

**М.Бойчук, канд.фіз.-мат.наук; Н.Шмуригіна**
*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
*Чернівецький факультет національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”*

# СТІЙКІСТЬ РОЗВ’ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ

*У праці встановлено рівномірну стійкість розв’язків деяких задач макроекономіки зростання як з лагами, так і без лагів.*

Задачі макроекономіки зростання є задачами оптимального керування. Для їх чисельного розв’язування треба мати області стійкості розв’язків динамічних систем. Тому дослідження стійкості динамічних систем відіграє важливу роль.

Розглянемо деякі моделі макроекономіки:

1) односекторна агрегована та замкнута модель макроекономіки:

а) без лагу [1, с.328]

$$\begin{aligned}&\dot{k}(t)=f(k(t))-\lambda k(t)-c(t),\quad t\in[t_0,\infty),\\&k(t_0)=k_0;\end{aligned}\tag{1}$$

б) з лагом [2, с.43]

$$\begin{aligned}&\dot{k}(t)=(1-\beta)f(k(t))+\beta f(k(t-\Delta))-\lambda k(t)-c(t),\quad t\in[t_0,\infty),\\&k(t)=\varphi(t),\quad t\in[t_0-\Delta,t_0];\end{aligned}\tag{2}$$

2) багатосекторна модель макроекономіки:

а) без лагів

$$\begin{aligned}&\dot{k}_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}f_j(k_j(t))-\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}c_j(t)-\lambda_i k_i(t),\quad t\in[t_0,\infty),\\&k_i(t_0)=k_{i0},\quad i\in\{1,2,\dots,n\};\end{aligned}\tag{3}$$

б) з лагами

$$\begin{aligned}&\dot{k}_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}(1-\alpha_j)f_j(k_j(t))+\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}\alpha_j f_j(k_j(t-\Delta_j))-\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}c_j(t)-\\&-\lambda_i k_i(t),\quad t\in[t_0,\infty),\\&k_i(t)=\varphi_i(t),\quad t\in[t_0-\Delta_i,t_0];\end{aligned}\tag{4}$$

3) багатосекторна еколого-економічна модель макроекономіки:

а) без лагів

$$\begin{aligned}&\dot{k}_i(t)=(1-\xi)\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}f_j(k_j(t))-\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}c_j(t)-\lambda_i k_i(t),\quad t\in[t_0,\infty),\\&\dot{p}(t)=(\varepsilon-r\xi)\sum_{j=1}^{n}f_j(k_j(t))-(\gamma+\eta)p(t),\quad t\in[t_0,\infty),\\&k_i(t_0)=k_{i0},\quad p(t_0)=p_0,\quad i\in\{1,2,\dots,n\};\end{aligned}\tag{5}$$

б) з лагами

$$
\begin{aligned}
&\dot{k}_i(t) = (1-\xi)\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}(1-\beta_j)f_j(k_j(t)) + (1-\xi)\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}\beta_j f_j(k_j(t-\Delta_j)) - \\
&-\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij}c_j(t) - \lambda_i k_i(t), \quad t\in[t_0,\infty), \\
&\dot{p}(t) = (\varepsilon - r\xi)\sum_{j=1}^{n} f_j(k_j(t-\Delta_j)) - (\gamma+\eta)p(t), \quad t\in[t_0,\infty), \\
&k_i(t) = \varphi_i(t), \quad t\in[t_0-\Delta_i, t_0], \\
&p(t) = \psi(t), \quad t\in[t_0-\Delta, t_0], \quad \Delta = \max_i \Delta_i,
\end{aligned} \tag{6}
$$

де $t$ – часова змінна, $k_i$ – питома фондооснащеність $i$-го сектора економіки; $\lambda_i = \mu_i + \eta$, $\mu_i$ – норма амортизації $i$-го капіталу, $\eta$ – темп зростання чисельності робочої сили; $c$ – питоме споживання; $f$ – питома макровиробнича функція; $\beta(0\le\beta\le 1)$ – доля кінцевого продукту, яка витрачається на інвестування виробництва; $\Delta$ – лага для інвестування; $\chi_{ij}$ – зв'язки у розподілі капіталовкладень між $j$-тим та $i$-тим секторами, причому $\sum_{i=1}^{n}\chi_{ij} = 1$ для $\forall j$; $\beta_j$ – норма накопичення $j$-го капіталу; $\xi$ – частина випуску кінцевої продукції, яка використовується для боротьби із забрудненням середовища; $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ – коефіцієнт забруднення; $r^{-1}(r>1)$ – кількість одиниць продукції, яка необхідна для зменшення забруднення на одну одиницю; $\gamma$ – темп асиміляції середовищем відходів виробництва.

1. <u>Односекторні (однопродуктові) моделі</u>

Функція $f$ має такі властивості (умови А)):

1) неперервна в $(0,\infty)$;
2) двічі неперервно-диференційована в $(0,\infty)$;
3) $f'(k)>0, \quad f''(k)<0$ в $(0,\infty)$;
4) $\lim_{k\to+0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0, \quad f(0)=0$.

Умови А) задовольняє макровиробнича функція $f$, для якої виконується поведінка

$$f(k) = O(k^\alpha), \quad \alpha\in(0,1). \tag{7}$$

Проміжок зміни $(0,\Lambda]$ для $k$ знаходиться як $\Lambda = \max k$ з такої задачі нелінійного програмування

$$
\begin{aligned}
&\max k, \\
&f(k) - \lambda k - c = 0, \\
&0 \le c \le f(k), \quad k\ge 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

За умови (7) задача (8) має розв'язок за обчисленням $\Lambda$.

Умови А) та поведінка (7) дозволяють стверджувати, що для макровиробничої функції $f$ при довільних $k,\widetilde{k}\in[\omega,\Lambda]$ та довільному фіксованому $\omega>0$ виконується умова Ліпшиця

$$\left|f(k) - f(\widetilde{k})\right| \le L_\omega \left|k-\widetilde{k}\right|. \tag{9}$$

У подальшому будемо вважати, що функція $c(t), t \in [t_0, \infty), 0 \le c \le f(\Lambda)$ є довільною з класу кусково-неперервних функцій з нормою $\|c\|_{L_\infty} = \underset{t \in [t_0, \infty), 0 \le c \le f(\Lambda)}{vrai \sup} |c(t)|$. Функція $\varphi(t), t \in [t_0 - \Delta, t_0]$ належить класу неперервних функцій із нормою $\|\varphi\|_C = \max\limits_{[t_0 - \Delta, t_0]} |\varphi(t)|$.

Означення стійкості розв'язків задач (1)-(2) наведені в [3, с. 8-15].

Означення 1. Числове значення $k_p = const > 0$ називається рівноважним або магістральним для задачі (1) при $c(t) = const \in [0, f(\Lambda)]$, якщо воно є розв'язком рівняння $f(k_p) - \lambda k_p - c = 0$.

Правильні наступні теореми.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) макровиробнича функція $f(k), k \in (0, \Lambda]$ задовольняє умови А);
2) початковий стан системи $k_0 > 0$;
3) $c(t), t \in [t_0, \infty) -$кусково-неперервна функція і задовільняє нерівності $0 \le c \le f(\Lambda)$.

Тоді розв'язок $k(t) > 0$, $t \in [t_0, \infty]$ задачі (1) є рівномірно стійким за $t_0$.

*Доведення.* Виберемо довільне фіксоване число $\omega \in (0, \Lambda)$. Тоді для довільних $k, \widetilde{k} \in [\omega, \Lambda]$ макровиробнича функція $f$ задовольняє умови Ліпшиця (9) і за результатами [4, с.40-41, с.46-47] задача (1) має єдиний і неперервно продовжуваний розв'язок. Причому, розв'язок задачі Коші (1) еквівалентний розв'язку такого інтегрального рівняння

$$k(t, k_0, c) = k_0 e^{-\lambda(t - t_0)} + \int_{t_0}^{t} [f(k(\tau)) - c(\tau)] e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau .$$

Візьмемо інший розв'язок $\widetilde{k}(t, \widetilde{k}_0, \widetilde{c})$ цього інтегрального рівняння та оцінимо їх різницю

$$\left|k(t,k_0,c) - \widetilde{k}(t,\widetilde{k}_0,\widetilde{c})\right| \le \left|k_0 - \widetilde{k}_0\right| + \int_{t_0}^{t} \left|f(k(\tau)) - f(\widetilde{k}(\tau))\right| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} |c(t) - \widetilde{c}(t)| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \le \left|k_0 - \widetilde{k}_0\right| + L_\omega \int_{t_0}^{t} \left|k(\tau) - \widetilde{k}(\tau)\right| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty} \cdot \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}\right) \le K\left(\left|k_0 - \widetilde{k}_0\right| + \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty}\right) + L_\omega \int_{t_0}^{t} \left|k(\tau) - \widetilde{k}(\tau)\right| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau,$$

де $K = \sup\left\{1, \frac{1}{\lambda}\right\}$.

Використовуючи нерівність Гронуола-Беллмана [3, с.41], одержимо

$$\begin{aligned} &\left|k(t,k_0,c) - \widetilde{k}(t,\widetilde{k}_0,\widetilde{c})\right| \le K\left(\left|k_0 - \widetilde{k}_0\right| + \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty}\right) e^{L_\omega \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau} \le \\ &\le K\left(\left|k_0 - \widetilde{k}_0\right| + \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty}\right) e^{L/\lambda} \end{aligned} \tag{10}$$

для всіх $t \in [t_0, \infty]$ та $k_0, \widetilde{k}_0 \ge \omega > 0$ при довільному фіксованому $\omega < \Lambda$. Тоді при $\left|k_0 - \widetilde{k}_0\right| + \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty} \le \delta$ виконується нерівність $\left|k(t,k_0,c) - \widetilde{k}(t,\widetilde{k}_0,\widetilde{c})\right| \le \varepsilon$, де

$\varepsilon = \delta K e^{L/\lambda}, \forall t \in [t_0, \infty]$. Тому функція $k \in [\omega, \Lambda]$ є рівномірно стійким за $t_0$ розв'язком задачі (1) при довільному фіксованому $\omega > 0$. За довільності $\omega$ функція $k \in (0, \Lambda]$ є рівномірно стійким за $t_0$ розв'язком задачі (1). Теорема 1 доведена.

Наслідок 1. Рівноважний стан $k_p > 0$ задачі (1) при $c = const \in [0, f(\Lambda)]$ є рівномірно стійким за $t_0$.

Результати наслідку 1 випливають з теореми 1 при $\widetilde{c} = c, \quad \widetilde{k}_0 = k_p$.

Теорема 2. Нехай виконуються наступні умови:

1) макровиробнича функція $f(k), k \in (0, \Lambda]$ задовільняє умови А);
2) початковий стан системи $\varphi(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$;
3) $c(t), t \in [t_0, \infty) -$кусково-неперервна функція і задовільняє нерівності $0 \le c \le f(\Lambda)$.

Тоді розв'язок $k(t, \Delta)$, $t \in [t_0, \infty]$ задачі (2) є рівномірно стійким за $t_0$.

*Доведення.* Розв'язок $k(t, \varphi, c) \in [\omega, \Lambda]$ задачі (2) при $t \in [t_0, \infty]$, $\varphi(t \in [t_0 - \Delta, t_0]) > 0$, $c \in [0, f(\Lambda)]$ та при довільному фіксованому $\omega > 0$ задовільняє інтегральне рівняння [5, с.16]

$$k(t,\varphi,c) = \varphi(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \left[(1-\beta) f(k(\tau)) + \beta f(k(\tau-\Delta)) - c(\tau)\right] e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau . \qquad (11)$$

Візьмемо інший розв'язок $\widetilde{k}(t, \widetilde{\varphi}, \widetilde{c})$ цього рівняння при $\widetilde{\varphi}(t_0)$ і $\widetilde{c}(t), t \in [t_0, \infty]$ та складемо різницю цих розв'язків

$$\begin{aligned} &\left|k(t,\varphi,c) - \widetilde{k}(t,\widetilde{\varphi},\widetilde{c})\right| \le \|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_C + \int_{t_0}^{t} (1-\beta) \left|f(k(\tau)) - f(\widetilde{k}(\tau))\right| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + \\ &+ \beta \int_{t_0-\Delta}^{t_0} \left|f(k(\tau)) - f(\widetilde{k}(\tau))\right| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + \beta \int_{t_0}^{t-\Delta} \left|f(k(\tau)) - f(\widetilde{k}(\tau))\right| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t} |c(t) - \widetilde{c}(t)| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \le (1 + \beta L_\omega \Delta) \|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_C + \qquad (12) \\ &+ (1-\beta) L_\omega \int_{t_0}^{t} \left|k(\tau) - \widetilde{k}(\tau)\right| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty} \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \le \\ &\le K\left(\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_C + \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty}\right) + (1-\beta) L_\omega \int_{t_0}^{t} \left|k(\tau) - \widetilde{k}(\tau)\right| e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

де $K = \sup\left\{(1 + \beta L_\omega \Delta), \frac{1}{\lambda}\right\}$.

Із (12) за нерівністю Гронуола-Беллмана, маємо

$$\begin{aligned} &\left|k(t,\varphi,c) - \widetilde{k}(t,\widetilde{\varphi},\widetilde{c})\right| \le K\left(\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_C + \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty}\right) e^{(1-\beta) L_\omega \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau} \le \\ &\le K\left(\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_C + \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty}\right) e^{(1-\beta) L_\omega / \lambda}, \quad \forall t \in [t_0, \infty]; \quad \forall \varphi(t), \widetilde{\varphi}(t) > 0 \text{ на } [t_0 - \Delta, t_0]. \end{aligned}$$

Для довільного $\delta > 0$, такого, що $\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|_C + \|c - \widetilde{c}\|_{L_\infty} \le \delta$, маємо, що $\left|k(t,\varphi,c) - \widetilde{k}(t,\widetilde{\varphi},\widetilde{c})\right| \le \varepsilon$, як тільки взяти $\varepsilon = \delta K e^{(1-\beta) L_\omega / \lambda}, \forall t \in [t_0, \infty]$. Одержали, що розв'язок $k(t, \varphi, c), t \in [t_0, \infty]$ задачі (2) є рівномірно стійким за $t_0$ при довільному фіксованому $\omega > 0$. За рахунок довільності $\omega$ розв'язок $k(t,\varphi,c) \in (0,\Lambda], \varphi \in (0,\Lambda), c \in [0, f(\Lambda)], t \in [t_0,\infty]$ задачі (2) є рівномірно стійким за $t_0$. Теорема 2 доведена.

Розглянемо однопродуктові моделі Рамсея:

а) без лагу

$$\dot{k}(t) = s(t) f(k(t)) - \lambda k(t), \quad t \in [t_0,\infty), \qquad (13)$$
$$k(t_0) = k_0;$$

б) з лагом $\Delta$

$$\dot{k}(t) = s(t-\Delta) f(k(t-\Delta)) - \lambda k(t), \quad t \in [t_0,\infty), \qquad (14)$$
$$k(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \Delta, t_0],$$

де $s$ – норма інвестування, причому $s(t), t \in [t_0,\infty)$ – кусково-неперервна функція та $s \in [0,1]$.

Проміжок $(0,\Lambda]$ зміни $k$ знаходиться з розв'язування такої задачі нелінійного програмування ( $\Lambda = \max k$ )

$$\max k,$$
$$sf(k) - \lambda k = 0,$$
$$0 \le s \le 1, \quad k \ge 0.$$

*Правильні наступні теореми.*

Теорема 3. Нехай макровиробнича функція $f(k), k \in (0,\Lambda]$ задовільняє умови А), $k_0 \in (0,\Lambda)$; $s(t \in [t_0,\infty))$ – кусково-неперервна функція. Тоді розв'язок $k(t) > 0$, $t \in [t_0,\infty]$ задачі (13) є рівномірно стійким за $t_0$.

Доведення теореми 3 проводиться аналогічно до теореми 1 з використанням умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші (13) [4, с.48-53] та виконання нерівності

$$\left|s(t) f(k) - s(t) f(\tilde{k})\right| \le \left|f(k) - f(\tilde{k})\right| \le L_\omega \left|k - \tilde{k}\right|, \quad t \in [t_0,\infty) \qquad (15)$$

для довільних $k, \tilde{k} \in [\omega,\Lambda], \ \omega > 0.$

Теорема 4. Нехай макровиробнича функція $f(k), k \in (0,\Lambda]$ задовільняє умови А), $\varphi(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$; $s(t \in [t_0,\infty))$ – кусково-неперервна функція. Тоді розв'язок $k(t,\Delta)$, $t \in [t_0,\infty]$ задачі (14) є рівномірно стійким за $t_0$.

Доведення теореми 4 проводиться аналогічно до теореми 2 з використанням нерівності (15).

2. Багатопродуктові моделі макроекономіки

Проміжки $(0,\Lambda_i), i \in \{1,...,n\}, (0,P)$ зміни $k_i$ та $p$ для задач (3)-(6) знаходяться з таких багатокритеріальних задач математичного програмування ( $\Lambda_i = \max k_i$ ) [6]:

а) для задач (3)-(4)

$$\max k_i,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \chi_{ij} f_j(k_j) - \sum_{j=1}^{n} \chi_{ij} c_j - \lambda_i k_i = 0,$$
$$k_i \ge 0, \quad 0 \le c_i \le f_i(k_i), \quad i \in \{1,2,...,n\};$$

б) для задач (5)-(6)

$$\max k_i,$$
$$(1-\xi)\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij} f_j(k_j) - \sum_{j=1}^{n}\chi_{ij} c_j - \lambda_i k_i = 0,$$
$$(\varepsilon - r\xi)\sum_{j=1}^{n} f_j(k_j) - (\gamma+\eta)p = 0,$$
$$k_i \ge 0, \quad p \ge 0, \quad 0 \le c_i \le f_i(k_i), \quad i \in \{1,2,...,n\}.$$

Позначимо норми в $R^n$ через $|k| = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2\right)^{1/2}$, в $\widetilde{L}_\infty$ - $\|c\|_{\widetilde{L}_\infty} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\underset{t\in[t_0,\infty),0\le c_i\le f_i(\Lambda_i)}{vrai\sup} c_i\right)\right)^{1/2}$, а в $\widetilde{C}$ - $\|\varphi\|_{\widetilde{C}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\max_{t\in[t_0-\Delta,t_0]}\varphi_i(t)\right)^2\right)^{1/2}$.

Означення стійкості розв'язків задач (3)-(6) наведені в [3, с. 8-15].

Означення 2. Вектор числових значень $k_p = (k_1,...,k_n)$ з додатніми компонентами називається рівноважним або магістральним для задачі (3) при сталому векторі $c = (c_1,...,c_n)$, $c_i \in [0, f_i(\Lambda_i)]$ $\forall i \in \{1,...,n\}$, якщо він є розв'язком системи

$$(1-\xi)\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij} f_j(k_{jp}) - \sum_{j=1}^{n}\chi_{ij} c_j - \lambda_i k_{ip} = 0, \quad \forall i \in \{1,...,n\}. \tag{16}$$

Означення 3. Вектор числових значень $(k_p, p_p) = (k_{1p},...,k_{np}, p_p)$ з $k_{ip} > 0$ для $i \in \{1,...,n\}$ називається рівноважним або магістральним для задачі (5) при сталому векторі $c = (c_1,...,c_n)$, $c_i \in [0, f_i(\Lambda_i)]$ $\forall i \in \{1,...,n\}$, якщо він є розв'язком системи

$$\begin{aligned}&(1-\xi)\sum_{j=1}^{n}\chi_{ij} f_j(k_{jp}) - \sum_{j=1}^{n}\chi_{ij} c_j - \lambda_i k_{ip} = 0, \quad \forall i \in \{1,...,n\},\\ &(\varepsilon - r\xi)\sum_{j=1}^{n} f_j(k_{jp}) - (\gamma+\eta)p_p = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Правильні наступні теореми.

Теорема 5. Нехай виконуються умови:

1) макровиробничі функції $f_i(k_i)$, $k_i \in (0, \Lambda_i]$, $\forall i \in \{1,...,n\}$ задовільняють умови А);
2) вектор початкових станів системи $k_0 = (k_{01},...,k_{0n})$ з додатніми компонентами;
3) $c(t)$, $t \in [t_0, \infty) -$ вектор кусково-неперервних функцій, компоненти якого задовільняють нерівності $0 \le c_i \le f_i(\Lambda_i)$, $\forall i \in \{1,...,n\}$.

Тоді розв'язок $k(t) = (k_1(t),...,k_n(t))$ з додатніми компонентами в $t \in [t_0, \infty]$ задачі (3) є рівномірно стійким за $t_0$.

Доведення теореми 5 проводиться аналогічно до теореми 1 для оцінки $k$ з використанням нерівності Гронуола-Беллмана. Використовуючи для цієї оцінки нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i^2\right)^{1/2} \le \sum_{i=1}^{n} k_i, \quad k_i > 0, \quad \forall i \in \{1,...,n\}, \tag{18}$$

одержимо необхідну оцінку, яка за означенням стійкості дає рівномірну стійкість розв'язку за $t_0$.

Наслідок 2. Рівноважний стан $k_p = (k_{1p},\ldots,k_{np})$ з додатніми компонентами задачі (3) при постійному векторові $c$ з компонентами $c_i \in [0, f_i(\Lambda_i)],\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ є рівномірно стійким за $t_0$.

Результати наслідку 2 випливають з теореми 5 при $\widetilde{c} = c, \quad \widetilde{k}_0 = k_p$.

Теорема 6. Нехай виконуються наступні умови:

1) макровиробничі функції $f_i(k_i),\ k_i \in (0, \Lambda_i],\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ задовільняють умови А);
2) вектор початкових станів системи $\varphi(t)$ на $[t_0 - \Delta, t_0]$ з додатніми компонентами та $\Delta = (\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$;
3) $c(t), t \in [t_0, \infty) -$ вектор кусково-неперервних функцій, компоненти якого задовільняють нерівності $0 \le c_i \le f_i(\Lambda_i),\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

Тоді розв'язок задачі (4) з додатніми компонентами на $[t_0, \infty]$ є рівномірно стійким за $t_0$.

Доведення теореми 6 проводиться аналогічно до теореми 2 з використанням нерівності (18).

Теорема 7. Нехай макровиробничі функції $f_i(k_i), k_i \in (0, \Lambda_i], \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ задовільняють умови А); вектор початкових станів системи $k_0$ з додатніми компонентами, а $p_0 \ge 0$; $c(t), t \in [t_0, \infty) -$ вектор кусково-неперервних функцій, компоненти якого задовільняють нерівності $0 \le c_i \le f_i(\Lambda_i),\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

Тоді розв'язок $(k(t), p(t))$ з додатніми компонентами вектора $k(t)$ і $p(t) \ge 0$ в $t \in [t_0, \infty]$ задачі (5) є рівномірно стійким за $t_0$.

Доведення теореми 7 проводиться аналогічно до теореми 5 для оцінки $k$. А оцінку для $p$ слід провести з таким інтегральним рівнянням:

$$p(t) = p_0 e^{-(\gamma+\eta)(t-t_0)} + (\varepsilon - r\xi)\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t} f_j(k_j(\tau))e^{-(\gamma+\eta)(t-\tau)}d\tau . \tag{19}$$

Наслідок 3. Рівноважний стан $(k_p, p_p)$ з додатніми компонентами вектора $k_p$ та $p_p \ge 0$ задачі (5) при постійному векторові $c$ з компонентами $c_i \in [0, f_i(\Lambda_i)],\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ є рівномірно стійким за $t_0$.

Результати наслідку 3 випливають із теореми 7 при $\widetilde{c} = c, \widetilde{k}_0 = k_p, \widetilde{p}_0 = p_p$.

Теорема 8. Нехай макровиробничі функції $f_i(k_i), k_i \in (0, \Lambda_i], \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ задовільняють умови А); початковий стан системи $(\varphi(t), \psi(t))$ з додатніми компонентами вектора $\varphi$ і $\psi(t) \ge 0$ на $[t_0 - \Delta, t_0]$ та $\Delta = (\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$; $c(t), t \in [t_0, \infty) -$ вектор кусково-неперервних функцій, компоненти якого задовільняють нерівності $0 \le c_i \le f_i(\Lambda_i), \forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

Тоді розв'язок $(k(t,\Delta), p(t,\Delta))$ з додатніми компонентами вектора $k(t,\Delta)$ та $p(t,\Delta) \ge 0$ на $[t_0, \infty]$ задачі (6) є рівномірно стійким за $t_0$.

Доведення теореми 8 проводиться аналогічно до теорем 2 та 6.

*An even stability of decisions of some macroeconomics growth problems with or without deflexion arguments is set in the work.*

## Література

1. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки.- К.: Інформтехніка, 1995.- 320с.
2. Основы теории оптимального управления. Под ред. В.Ф.Кротова.- М.: Высшая школа, 1990.- 430с.
3. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления.- М.: Высшая школа, 1998.- 574с.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.- М.: Наука, 1969.- 424с.
5. Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння. Під ред. Фодчука В.І.- К.: Ін-т математики НАН України, 1996.- 210с.
6. Салуквадзе М.Е. О задаче линейного программирования с векторным критерием качества / Автоматика и телемеханика, 1972.- № 5.- С.126-135.

*Одержано 07.12.2001 р.*