ВСТУП

Навчальний посібник створено з метою надання допомоги студентам інженерних спеціальностей при самостійному вивченні таких розділів з курсу вищої математики, що вивчаються у першому семетрі:

- елементи лінійної алгебри;
- елементи векторної алгебри;
- елементи аналітичної геометрії;
- диференціальне числення функцій однієї змінної.

Кожен з розглянутих розділів містить як основні теоретичні положення (основні поняття, означення, теореми) так і детально розв'язані приклади.

Навчальний посібник може бути використаний студентами інженерних спеціальностей для розв'язування контрольних робіт та підготовки до екзаменів.

1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця з $m \times n$ чисел a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right). \qquad (1)$$

Числа a_{ij} називаються **елементами** матриці A, де $i-$номер рядка, а $j-$номер стовпця.

Якщо $m = n$, то матриця A називається **квадратною матрицею** порядку n, а елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ складають головну діагональ.

Квадратна матриця, у якої на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю, називається **одиничною матрицею** і позначається через E.

Сумою матриць $A = \left(a_{ij}\right)$ і $B = \left(b_{ij}\right)$ розміру $m \times n$ називається матриця $C = \left(c_{ij}\right)$ того ж розміру, що

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Позначення: $C = A + B$.

Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)$ розміру $m \times n$ **на число** α називається матриця $C = \left(c_{ij}\right)$ того ж розміру і $c_{ij} = \alpha\, a_{ij}$, $\quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$.

Позначення: $C = \alpha\, A$.

Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)$ розміру $m \times n$ **на матрицю** $B = \left(b_{ij}\right)$ розміру $n \times k$ називається матриця $C = \left(c_{ij}\right)$ розміру $m \times k$:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}, \quad i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, k}.$$

Позначення: $C = AB$.

Зауваження. В загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо ж $AB = BA$, то матриці A і B називаються переставними.

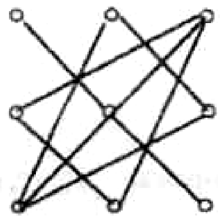
Визначником $n-$го порядку, що відповідає квадратній матриці A порядку n, називається число, яке знаходиться за певним правилом і позначається $|A|$ або $\det A$. У випадку $n = 2$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}. \qquad (2)$$

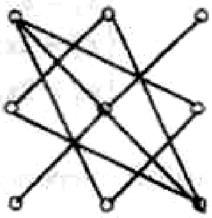
У випадку $n = 3$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \qquad (3)$$

На практиці визначники третього порядку обчислюються з використанням **правила Саррюса:** перші три доданки, які входять в праву частину (3) із знаком плюс, представляють собою добутки елементів визначника, взятих по три, як показано на рис.1, а останні три доданки, які входять в (3) із знаком мінус, як на рис. 2.



(+)
Рис. 1



(-)
Рис. 2

У загальному випадку для матриці порядку n визначник обчислюється за формулою:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \ , \qquad (3')$$

де M_{ij} - мінор елемента a_{ij} (визначник матриці порядку $n-1$, яку одержимо з матриці A викреслюванням в ній $i-$го рядка та $j-$го стовпця). Застосувавши до визначників M_{ij} $(n-1)$ - го порядку правило $(3')$, прийдемо до визначників $(n-2)$ - го порядку і т.д., поки не дійдемо до визначників 3-го порядку.

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ називається **алгебраїчним доповненням** елемента a_{ij} матриці A.

Зауваження. Якщо визначник має пропорційні рядки або стовпці, то він дорівнює нулю.

Матриця B називається **оберненою** до матриці A, якщо

$$AB = BA = E.$$

Позначення: $B = A^{-1}$.

Обернена матриця A^{-1} до A **існує тоді і лише тоді**, коли $|A| \neq 0.$ Має місце формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Система n **лінійних рівнянь** з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4)$$

або в матричному вигляді

$$AX = B, \qquad (5)$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ **- матриця системи.**

Якщо система (4) має розв'язки, то вона називається **сумісною**, в протилежному випадку – **несумісною.**

Матричний спосіб розв'язання системи лінійних рівнянь. Нехай $|A| \neq 0$, домножимо обидві частини рівняння (5) зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E, \quad EX = X$, то

$$X = A^{-1}B. \tag{6}$$

Формули Крамера

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи (4) може бути знайдений за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta i}{\Delta}, \; i = \overline{1,n}, \; \text{ де } \; \Delta = |A|, \tag{7}$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i-1} \; b_1 \; a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2i-1} \; b_2 \; a_{2i+1} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{ni-1} \; b_n \; a_{ni+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>Зауваження 1.</u> Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$, то система (4) має нескінченну кількість розв'язків.

<u>Зауваження 2.</u> Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_i \neq 0$, то система несумісна.

Метод Гаусса

Метод Гаусса використовується для розв'язування довільних систем лінійних рівнянь.

Нехай задана система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{8}$$

де число рівнянь m може як співпадати з кількістю невідомих x_n, так і бути відмінним від нього.

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Виключимо невідоме x_1 з усіх рівнянь системи, за винятком першого. Для цього домножимо перше рівняння на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ і додамо до другого рівняння і т.д., на кінець домножимо перше рівняння на $\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$ і додамо до $m-$го рівняння.

У результаті отримаємо систему рівнянь еквівалентну системі (8):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ .... \\ \qquad a'_{m2}x_2 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (9)$$

Припустимо тепер, що $a'_{22} \neq 0$ і виключимо аналогічно невідоме x_2 з третього, ..., m-го рівняння системи (9). Після цього переходимо до невідомого x_3 і т.д. У ході виконання вказаного алгоритму можуть з'явитися рівняння виду $0 = 0$.

Такі рівняння відкидаємо. Якщо ж з'явиться рівняння виду $0 = \alpha$, де $\alpha \neq 0$, то це означає, що система (8) несумісна. В результаті отримаємо систему виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ .... \\ \qquad a''_{ss}x_s + ... + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases}, \qquad (10)$$

де $s \leq n$; $a_{11}a'_{22}...a''_{ss} \neq 0$.

Розглянемо тепер два випадки.

1) Якщо $s = n$, то система (10), а значить і система (8) має єдиний розв'язок, який може бути знайдений за допомогою зворотного ходу методу Гаусса. Із останнього рівняння знаходимо $x_n = b''_n / a''_{nn}$. Підставляючи знайдене значення x_n в передостаннє рівняння, знайдемо значення для x_{n-1} і т.д. З першого рівняння знайдемо значення для x_1.
2) Якщо $s < n$, то система (10), а отже і система (8) має нескінченну кількість розв'язків. Надаючи невідомим $x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n$ довільних значень $c_{s+1}, c_{s+2}, ... c_n$, виразимо невідомі $x_1, x_2, ..., x_s$ через $c_{s+1}, c_{s+2}, ..., c_n$ і отримаємо загальний розв'язок системи (8).

Зауваження. При використанні методу Гаусса на практиці зручно виконувати відповідні перетворення не над рівняннями системи, а над рядками розширеної матриці системи

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\, a_{12} ... a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\, a_{22} ... a_{2n} & b_2 \\ .... & ... \\ a_{m1}\, a_{m2} ... a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Задача 1.1. Два залізобетонних заводи випускають вироби А, В, С вищої, першої і другої категорій якості. Кількість випущених кожним заводом виробів за кожною з категорій якості характеризується наступною таблицею:

Категорія якості	Готові вироби					
	I – й завод			II – й завод		
	M	N	P	M	N	P
Вища	150	240	320	280	300	450
Перша	100	130	175	120	150	170
Друга	25	15	20	30	20	18

Який загальний об’єм випуску виробів за вказаними категоріями якості?

Розв’язання. Якість виробів, випущених першим заводом будемо розглядати як елементи матриці A, а другим заводом – як елементи матриці B:

$$A=\begin{pmatrix}150 & 240 & 320\\ 100 & 130 & 175\\ 25 & 15 & 20\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}280 & 300 & 450\\ 120 & 150 & 170\\ 30 & 20 & 18\end{pmatrix}.$$

Додавши ці матриці, одержимо матрицю С, яка визначає загальну кількість виробів за вказаними категоріями якості:

$$C=A+B,\qquad C=\begin{pmatrix}430 & 540 & 770\\ 220 & 280 & 345\\ 55 & 35 & 38\end{pmatrix}.$$

Задача 1.2. Сезонний продаж товарів трьох видів (α,β,γ) здійснюють три магазини (1,2,3). Обсяги реалізації цих товарів (в грош. од.) кожним магазином представлено у вигляді матриць:

$$A=\begin{pmatrix}320 & 60 & 220\\ 200 & 60 & 240\\ 100 & 60 & 140\\ 120 & 60 & 100\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}380 & 70 & 200\\ 320 & 80 & 260\\ 180 & 80 & 220\\ 200 & 60 & 100\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}220 & 20 & 80\\ 180 & 30 & 60\\ 140 & 25 & 100\\ 90 & 30 & 120\end{pmatrix},$$

де в рядках вказано суми, отримані кожним магазином за відповідний сезон (зима, весна, літо, осінь), а в стовпчиках – суми, отримані за продаж відповідного товару (α,β,γ). Потрібно: 1) перевірити, що суми реалізації товарів першого і третього магазинів разом більші, ніж другого; 2) записати у вигляді матриці сукупні суми реалізації товарів трьома магазинами.

Розв’язання. Знаходимо обсяг реалізації товарів кожного виду першим і третім магазинами. Він дорівнює сумі $A+C$:

$$A+C=\begin{pmatrix}320 & 60 & 220\\ 200 & 60 & 240\\ 100 & 60 & 140\\ 120 & 60 & 100\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}220 & 20 & 80\\ 180 & 30 & 60\\ 140 & 25 & 100\\ 90 & 30 & 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}540 & 80 & 300\\ 380 & 90 & 300\\ 240 & 85 & 240\\ 210 & 90 & 220\end{pmatrix}.$$

Порівнюючи елементи матриці $A+C$ з відповідними елементами матриці B, легко пересвідчитися, що у кожному сезоні перший і третій магазини разом продали кожного виду товарів більше, ніж другий магазин. Щоб записати у вигляді матриці дані про сукупний продаж магазинів, знайдемо матрицю $A+B+C$:

$$A+C=\begin{pmatrix}540 & 80 & 300\\ 380 & 90 & 300\\ 240 & 85 & 240\\ 210 & 90 & 220\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}380 & 70 & 200\\ 320 & 80 & 260\\ 180 & 80 & 220\\ 200 & 60 & 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}920 & 150 & 500\\ 700 & 170 & 560\\ 420 & 165 & 460\\ 410 & 150 & 320\end{pmatrix}.$$

Задача 1.3 На машинобудівному заводі для виготовлення деталей чотирьох видів затрата матеріалів, робочої сили і електроенергії задається таблицею (в умовних одиницях).

Ресурси	Затрати на одну деталь кожного виду			
Матеріали	1	3	0,5	2
Робоча сила	1,5	2	3	1
Електроенергія	2	1	1	0,5

Знайти загальну потребу в матеріалах y_1, робочій силі y_2 і електроенергії y_3 для виготовлення заданої кількості x_i деталей кожного виду: $x_1 = 10,\ x_2 = 2,\ x_3 = 8,\ x_4 = 4.$

Розв'язання. Загальна потреба в матеріалах, робочій силі та електроенергії для виготовлення кількості x_i деталей кожного виду визначається рівнянням

$$Y = AX \qquad (1)$$

де $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – матриця загальної потреби в ресурсах;

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0{,}5 & 2 \\ 1{,}5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ – матриця норм затрат ресурсів;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ – матриця кількості деталей (по видах).

Згідно умов задачі:

$X = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, отже, з рівняння (1) одержимо

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0{,}5 & 2 \\ 1{,}5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 10 + 3\cdot 2 + 0{,}5\cdot 8 + 2\cdot 4 \\ 1{,}5\cdot 10 + 2\cdot 2 + 3\cdot 8 + 1\cdot 4 \\ 2\cdot 10 + 1\cdot 2 + 1\cdot 8 + 0{,}5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 47 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: Для виготовлення заданої кількості деталей кожного виду необхідно 28 одиниць матеріалів, 47 одиниць робочої сили, 32 одиниці електроенергії.

Задача 1.4. Для виробництва виробів A_1 і A_2 необхідні вузли B_1 і B_2, для виготовлення яких, в свою чергу, необхідні деталі C_1, C_2 і C_3 в кількостях наведених в таблицях:

Виріб	Кількість вузлів	
	B_1	B_2
A_1	2	3
A_2	1	4

Вузол	Кількість деталей		
	C_1	C_2	C_3
B_1	2	1	0
B_2	1	0	3

Визначити кількість деталей, які необхідні для виробництва одного виробу кожного виду.

Розв'язання. Користуючись матричною формою, дані таблиці можна записати у наступному вигляді:

$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$ – матриця кількості виробів;

$B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$ – матриця кількості вузлів;

$C=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}$ – матриця кількості деталей.

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&9\\6&1&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7C_1+2C_2+9C_3\\6C_1+C_2+12C_3\end{pmatrix}$$

Відповідь: Для виробництва одного виробу A_1 необхідно 7 деталей C_1, 2 деталі C_2 і 9 деталей C_3, а для виробництва одного виробу A_2 - 6 деталей C_1, одна деталь C_2 і 12 деталей C_3.

Задача 1.5. Випуск готової продукції п'яти підприємств включає чотири види виробів $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Для їх виробництва використовуються три різні види сировини (I, II, III). Дані щоденної продуктивності підприємств з кожного виробу (кількість виробів за день) і витрат сировини на одиницю виробу (кг/шт.), а також кількість днів роботи кожного підприємства і вартість 1 кг сировини кожного типу у гривнях, наведено у таблиці.

Вироби	Продуктивність підприємств, шт./день					Витрати сировини, кг./шт.		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**I**	**II**	**III**
α	6	10	0	6	2	5	3	4
β	4	3	0	4	5	10	4	6
γ	0	15	10	3	4	2	5	5
δ	3	5	8	7	6	4	8	6
	Час роботи підприємств (дн.)					Ціна сировини (грн./кг)		
	100	200	140	150	170	30	20	50

Потрібно визначити:

а) сумарну продуктивність кожного підприємства по кожному з виробів за весь виробничий період;

б) потреби кожного підприємства у різних видах сировини;

в) розміри кредитування підприємств для закупівлі сировини.

Розв'язання. Розглянемо матрицю A, що характеризує продуктивність підприємств, матрицю B - витрат сировини і C - матрицю цін:

$$A=\begin{array}{c} \text{Продуктивність підприємств} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 15 & 10 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{|l} \\ \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array}; \qquad B=\begin{array}{c} \text{Вид виробу} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{|l} \\ \\ I \\ II \\ III \end{array}; \qquad C=(30\ \ 20\ \ 50).$$

а) Кожен стовпчик матриці A відповідає денній продуктивності окремого підприємства з кожного виду продукції. Щоб отримати річну продуктивність j-го підприємства $(j=1,2,3,4,5)$, потрібно помножити j-ий стовпець матриці A на кількість робочих днів цього підприємства. Час роботи кожного з підприємств запишемо у вигляді діагональної матриці:

$$T=\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 170 \end{pmatrix}$$

Тоді загальна продуктивність за виробничий період є добуток матриць $A\cdot T$:

$$AT=\begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 15 & 10 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 170 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 600 & 2000 & 0 & 900 & 340 \\ 400 & 600 & 0 & 600 & 850 \\ 0 & 3000 & 1400 & 450 & 680 \\ 300 & 1000 & 1120 & 1050 & 1020 \end{pmatrix};$$

б) Витрати сировини кожного підприємства є добуток $B\cdot(AT)$:

$$B\cdot(AT)=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 600 & 2000 & 0 & 900 & 340 \\ 400 & 600 & 0 & 600 & 850 \\ 0 & 3000 & 1400 & 450 & 680 \\ 300 & 1000 & 1120 & 1050 & 1020 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8200 & 26000 & 7280 & 15600 & 15640 \\ 5800 & 31400 & 15960 & 15750 & 15980 \\ 6600 & 32600 & 13720 & 15750 & 15980 \end{pmatrix};$$

в) Вартість річного запасу сировини одержуємо як добуток матриці цін C на матрицю витрат $B\cdot(AT)$:

$$D = C \cdot (B \cdot (AT)) = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8200 & 26000 & 7280 & 15600 & 15640 \\ 5800 & 31400 & 15960 & 15750 & 15980 \\ 6600 & 32600 & 13720 & 15750 & 15980 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 692000 & 3038000 & 1223600 & 157500 & 1587800 \end{pmatrix}.$$

Отже, величини кредитування j-го підприємства на закупівлю сировини визначаються компонентами матриці D.

Задача 1.6. Для випуску виробів трьох видів (α, β, γ) підприємство використовує сировину 3-х видів (S_1, S_2, S_3). Норми витрат кожного з типів сировини на один виріб і обсяг витрат сировини за один день задано таблицею:

Вид сировини	Норми витрат сировини на один виріб, ум.од.			Витрати сировини за день, ум.од.
	α	β	γ	
S_1	9	3	4	2700
S_2	7	1	6	2700
S_3	14	5	6	4200

Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду виробів.

Розв'язання. Припустимо, що підприємство щодня виробляє x_1 одиниць виробів виду α, x_2 одиниць – виду β і x_3 одиниць виробів виду γ. Тоді, відповідно з витратами сировини кожного виду, маємо систему:

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 = 2700 \\ 14x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4200 \end{cases}.$$

Розв'яжемо систему за методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 2700 \\ 7 & 1 & 6 & 2700 \\ 14 & 5 & 6 & 4200 \end{array}\right) \begin{array}{c} \uparrow \\ (-1) \quad (-2) \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 2700 \\ 0 & 3 & -6 & -1200 \end{array}\right) \begin{array}{c} :2 \\ \\ :3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 2700 \\ 0 & 1 & -2 & -400 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-7) \\ \downarrow \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 13 & 2700 \\ 0 & 1 & -2 & -400 \end{array}\right) \updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -400 \\ 0 & -6 & 13 & 2700 \end{array}\right) \begin{array}{c} (6) \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -400 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}\right).$$

Отже $x_3 = 300$, $x_2 - 2x_3 = -400;$ $x_2 = 2x_3 - 400;$ $x_2 = 2 \cdot 300 - 400 = 200;$ $x_2 = 200;$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0;$$

$$x_1 = x_3 - x_2;$$

$$x_1 = 300 - 200 = 100; \quad x_1 = 100.$$

Це означає, що підприємство щоденно виробляє 100 виробів виду α, 200 виробів виду β і 300 виробів виду γ.

І. Завдання для самостійної роботи:

Завдання до задачі 1.1

1. $A=\begin{pmatrix}130 & 190 & 300\\ 90 & 110 & 185\\ 30 & 20 & 30\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}250 & 280 & 430\\ 125 & 145 & 190\\ 20 & 15 & 30\end{pmatrix}$;

2. $A=\begin{pmatrix}115 & 185 & 270\\ 105 & 120 & 150\\ 15 & 25 & 20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}220 & 250 & 380\\ 100 & 150 & 180\\ 15 & 20 & 35\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}120 & 210 & 285\\ 100 & 115 & 165\\ 20 & 15 & 15\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}225 & 240 & 425\\ 90 & 145 & 165\\ 25 & 25 & 20\end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix}105 & 200 & 275\\ 95 & 100 & 170\\ 10 & 25 & 20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}215 & 275 & 415\\ 85 & 155 & 170\\ 35 & 30 & 25\end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix}115 & 205 & 260\\ 110 & 95 & 180\\ 15 & 20 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}230 & 255 & 420\\ 95 & 150 & 195\\ 10 & 20 & 25\end{pmatrix}$;

6. $A=\begin{pmatrix}125 & 180 & 295\\ 105 & 80 & 190\\ 25 & 20 & 30\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}240 & 265 & 410\\ 105 & 130 & 180\\ 15 & 25 & 30\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}110 & 190 & 270\\ 115 & 95 & 160\\ 30 & 20 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}250 & 275 & 400\\ 100 & 140 & 165\\ 10 & 15 & 25\end{pmatrix}$;

8. $A=\begin{pmatrix}120 & 185 & 265\\ 100 & 90 & 155\\ 20 & 15 & 10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}240 & 270 & 380\\ 90 & 125 & 175\\ 30 & 15 & 20\end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix}115 & 175 & 285\\ 100 & 85 & 150\\ 25 & 10 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}220 & 265 & 405\\ 85 & 135 & 160\\ 20 & 25 & 30\end{pmatrix}$;

10. $A=\begin{pmatrix}130 & 180 & 295\\ 95 & 105 & 160\\ 20 & 15 & 30\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}235 & 250 & 425\\ 110 & 120 & 185\\ 15 & 10 & 15\end{pmatrix}$;

11. $A=\begin{pmatrix}105 & 160 & 280\\ 90 & 100 & 175\\ 25 & 10 & 20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}240 & 235 & 400\\ 115 & 130 & 170\\ 20 & 15 & 20\end{pmatrix}$;

12. $A=\begin{pmatrix}120 & 185 & 295\\ 85 & 105 & 180\\ 30 & 15 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}235 & 275 & 410\\ 120 & 125 & 175\\ 25 & 20 & 20\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}125 & 170 & 290\\ 95 & 110 & 175\\ 25 & 10 & 20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}245 & 270 & 420\\ 110 & 130 & 165\\ 20 & 15 & 25\end{pmatrix}$;

14. $A=\begin{pmatrix}130 & 190 & 270\\ 105 & 100 & 165\\ 20 & 15 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}240 & 275 & 415\\ 100 & 115 & 180\\ 30 & 20 & 25\end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix}100 & 180 & 275\\ 100 & 95 & 180\\ 25 & 20 & 30\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}230 & 260 & 405\\ 105 & 140 & 175\\ 25 & 10 & 20\end{pmatrix}$;

16. $A=\begin{pmatrix}125 & 185 & 300\\ 95 & 100 & 170\\ 15 & 25 & 20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}200 & 250 & 435\\ 120 & 105 & 185\\ 20 & 15 & 25\end{pmatrix}$;

17. $A=\begin{pmatrix}130 & 165 & 290\\ 90 & 105 & 160\\ 20 & 20 & 10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}235 & 265 & 400\\ 100 & 135 & 160\\ 15 & 20 & 30\end{pmatrix}$;

18. $A=\begin{pmatrix}120 & 175 & 295\\ 105 & 100 & 170\\ 25 & 15 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}205 & 260 & 425\\ 125 & 125 & 165\\ 25 & 20 & 25\end{pmatrix}$;

19. $A=\begin{pmatrix}125 & 170 & 300\\ 85 & 95 & 180\\ 30 & 20 & 20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}225 & 245 & 410\\ 120 & 140 & 185\\ 20 & 10 & 30\end{pmatrix}$;

20. $A=\begin{pmatrix}120 & 160 & 290\\ 90 & 100 & 185\\ 25 & 15 & 15\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}230 & 240 & 405\\ 125 & 130 & 180\\ 25 & 15 & 20\end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix}115 & 155 & 270\\ 95 & 105 & 190\\ 20 & 20 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}235 & 235 & 430\\ 115 & 135 & 160\\ 20 & 10 & 25\end{pmatrix}$;

22. $A=\begin{pmatrix}105 & 150 & 265\\ 90 & 100 & 180\\ 25 & 15 & 20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}240 & 265 & 400\\ 120 & 125 & 175\\ 15 & 25 & 15\end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix}125 & 165 & 295\\ 100 & 85 & 170\\ 15 & 25 & 30\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}245 & 270 & 420\\ 105 & 120 & 185\\ 25 & 10 & 25\end{pmatrix}$;

24. $A=\begin{pmatrix}130 & 170 & 305\\ 95 & 100 & 175\\ 20 & 25 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}200 & 255 & 415\\ 110 & 145 & 190\\ 15 & 20 & 10\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}120 & 150 & 295\\ 85 & 100 & 185\\ 25 & 20 & 15\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}205 & 250 & 410\\ 105 & 140 & 185\\ 20 & 25 & 15\end{pmatrix}$;

26. $A=\begin{pmatrix}115 & 145 & 260\\ 105 & 85 & 165\\ 20 & 15 & 20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}210 & 245 & 395\\ 100 & 150 & 170\\ 20 & 25 & 20\end{pmatrix}$;

27. $A=\begin{pmatrix}125 & 160 & 300\\ 100 & 90 & 180\\ 25 & 20 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}230 & 275 & 405\\ 115 & 155 & 175\\ 20 & 20 & 15\end{pmatrix}$;

28. $A=\begin{pmatrix}105 & 185 & 290\\ 80 & 100 & 160\\ 30 & 15 & 20\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}245 & 270 & 410\\ 105 & 135 & 180\\ 25 & 15 & 25\end{pmatrix}$;

29. $A=\begin{pmatrix}110 & 175 & 285\\ 95 & 105 & 155\\ 25 & 10 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}250 & 265 & 380\\ 110 & 145 & 170\\ 20 & 15 & 15\end{pmatrix}$;

30. $A=\begin{pmatrix}120 & 165 & 295\\ 100 & 110 & 175\\ 30 & 15 & 25\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}240 & 250 & 425\\ 120 & 140 & 185\\ 25 & 20 & 25\end{pmatrix}$.

Завдання до задачі 1.2

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}8\\ 2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$;

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\ 1\\ 5\\ 4\end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$;

6. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1{,}5 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}5\\ 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}2&2&1&1\\1&2&3&2\\2&1&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}6\\2\\3\\2\end{pmatrix}$;

8. $A=\begin{pmatrix}1&1&3&4\\4&1&2&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix}$;

9. $A=\begin{pmatrix}3&2&1&1\\1&2&2&1\\1&1&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}4\\3\\5\\2\end{pmatrix}$;

10. $A=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\1&1&2&2\\2&1&1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}5\\2\\3\\4\end{pmatrix}$;

11. $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&1&1&1\\2&1&1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}3\\5\\4\\2\end{pmatrix}$;

12. $A=\begin{pmatrix}2&2&1&1\\1&2&1&3\\3&1&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}2\\4\\5\\1\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}3&3&1&1\\2&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\6\end{pmatrix}$;

14. $A=\begin{pmatrix}1&1&3&2\\2&1&2&2\\2&1&1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}4\\4\\3\\2\end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix}1&2&2&3\\1&2&1&1\\1&3&1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}3\\2\\2\\3\end{pmatrix}$;

16. $A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\end{pmatrix}$;

17. $A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}4\\3\\1\\2\end{pmatrix}$;

18. $A=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&1&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}6\\5\\4\\3\end{pmatrix}$;

19. $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&1&1&1\\1&1&2&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}7\\5\\3\\2\end{pmatrix}$;

20. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&1&2&1\\1&2&1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}6\\5\\2\\1\end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix}3&1&2&1\\1&2&2&1\\2&1&1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}5\\4\\1\\2\end{pmatrix}$;

22. $A=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&1&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}4\\4\\1\\3\end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&1&2\\1&1&2&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}5\\5\\6\\3\end{pmatrix}$;

24. $A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}4\\2\\1\\3\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&2&1&1\\2&1&1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}7\\1\\5\\4\end{pmatrix}$;

26. $A=\begin{pmatrix}2&2&1&2\\1&1&1&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}5\\5\\4\\3\end{pmatrix}$;

27. $A=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0{,}5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

28. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 1 & 1{,}5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$;

29. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 1{,}5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

30. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0{,}5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Завдання до задачі 1.3

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;
2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;
5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;
7. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
8. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
9. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;
10. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;
11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

12. $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

14. $A=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$;

16. $A=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

17. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

18. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$;

19. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

20. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

22. $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

24. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ 5 & 3 & 5\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 4 & 3\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$;

26. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

27. $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 4\end{pmatrix}$;

28. $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 3\end{pmatrix}$;

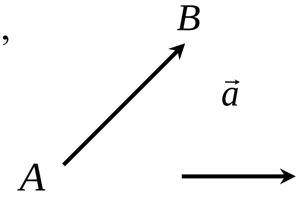
29. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

30. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Вектори та лінійні операції над ними

Геометричним вектором (коротко – **вектором**) називається відрізок, який має певну довжину і напрям. Позначення: $\overrightarrow{AB}$, де A - початок, а B - кінець відрізка AB або $\vec{a}$. Довжина відрізка AB називається **модулем** вектора $\overrightarrow{AB}$ і позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $\left|\vec{a}\right|$. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **рівними**, якщо $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ і вони мають однаковий напрям. Звідси випливає, що початок вектора можна помістити в довільну точку простору.



Якщо $|\vec{a}| = 0$, то вектор називається **нульовим і позначається** $\vec{0}$**.**

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ прикладений до вектора $\vec{a}$ (рис.1).

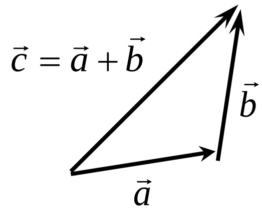


Рис.1

Добутком $(\lambda\,\vec{a})$ **вектора** $\vec{a}$ **на число** λ називається вектор $\vec{p}$ такий, що $|\vec{p}| = |\lambda||\vec{a}|$, напрямок $\vec{p}$ збігається з напрямом $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ і змінюється на протилежний, якщо $\lambda < 0$ (рис.2).

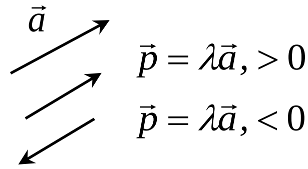


Рис. 2

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{d} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$ (рис.3).

Вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на паралельних прямих, або на одній прямій.

Вектори називаються **компланарними**, якщо вони паралельні деякій площині, або лежать в одній площині.

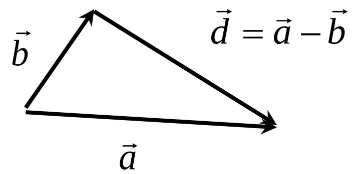


Рис. 3

Вектор $\vec{a}_0 = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ називається **ортом** вектора $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}_0| = 1$ і напрям $\vec{a}_0$ співпадає з напрямом $\vec{a}$.

Розклад вектора по базису. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ називається **базисом** тривимірного простору. Будь-який вектор $\vec{a}$ в просторі може бути єдиним чином розкладений за базисом:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \qquad (1)$$

Числа x_1, x_2, x_3 називаються **координатами** вектора $\vec{a}$ в базисі $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Нехай в просторі введена прямокутна декартова система координат $Oxyz$. Трійка $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ одиничних векторів, які напрямлені відповідно вздовж осей Ox, Oy, Oz, називається **координатним базисом** (рис. 4).

Якщо $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то будемо також записувати $\vec{a} = (x, y, z)$.

Якщо $\vec{a} = (x, y, z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Числа $cos\,\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}$, $cos\,\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}$, $cos\,\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$

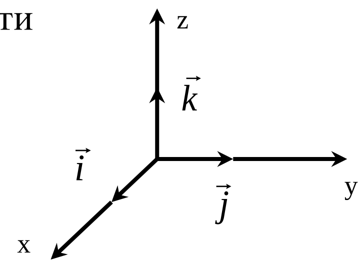


Рис. 4

називаються **напрямними косинусами** вектора $\vec{a}$; де α, β, γ - кути, які утворює вектор $\vec{a}$ з додатними напрямками координатних осей.

Має місце наступна рівність:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

Якщо

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2);$$

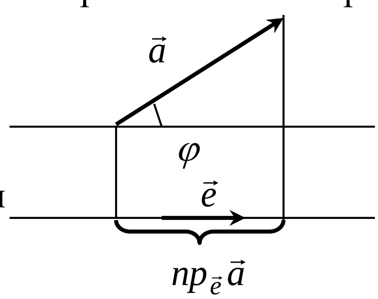
$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1). \qquad (2)$$

Три вектори $\vec{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{e}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ **утворюють базис тоді і тільки тоді**, коли визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3)$$

Проекція вектора на вектор. Проекцією вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$ називається число $np_{\vec{e}}\ \vec{a} = |\vec{a}|\,cos\,\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{e}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Очевидно, що якщо $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то координати *x, y, z* вектора $\vec{a}$ співпадають з проекціями вектора $\vec{a}$ відповідно на вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



Скалярний добуток векторів. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \qquad (8)$$

де φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (9)$$

Згідно з формулою (8) умова перпендикулярності векторів: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярний добуток векторів може бути обчислений за формулами $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\,\vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

Застосування скалярного добутку:

а) визначення косинуса кута між векторами $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, або $\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$;

б) знаходження проекції вектора на вектор $np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$, або $np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$;

в) визначення роботи A сили $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{S}$:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}.$$

Векторний добуток векторів. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

1) $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b};$

2) Вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворюють **праву трійку** векторів, тобто, якщо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найближчий поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється проти стрілки годинника;

3) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Позначення: $\vec{c}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$ або $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами, обчислюється у вигляді $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$.

Застосування векторного добутку:

а) обчислення площі паралелограма і трикутника побудованих на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (геометричний зміст векторного добутку)

$$S_{паралел}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \qquad S_{трик}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|;$$

б) знаходження моменту сили $\vec{F}$, прикладеної до т. A, відносно деякої фіксованої т. O

$$\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}.$$

Мішаний добуток векторів.

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Із означення випливає, що три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **компланарні тоді і лише тоді,** коли $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

Геометричний зміст мішаного добутку: модуль мішаного добутку дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c},$ тобто $V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|$.

Якщо $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2),\ \vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

$$\vartheta_{пір.}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

Задача 2.1. На малюнку зображено монтажну мачту. Позначивши ланки мачти векторами, записати умову замкненості для схеми вказаного підйомного механізму в ненавантаженому стані.

Розв'язання. Монтажна мачта є найпростішим механізмом для підйому вантажів, виготовляється з дерева або металу. Мачту встановлюють на опорній подушці, її стійкість досягається натягом стального троса. Зобразимо монтажну мачту схематично. AB – мачта, $OA \bigcup AC$ – натягнутий трос і позначимо її ланки векторами: $\overrightarrow{OA}=\vec{r}_1$, $\overrightarrow{CA}=\vec{r}_2$, $\overrightarrow{OB}=\vec{a}$ $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, α – кут, утворений натягнутим тросом з поверхнею землі, β – кут, утворений мачтою з вертикаллю. Оскільки векторна схема монтажної мачти є об'єднанням двох схем з контурами $OBAO$ і $BCAB$, то умова замкненості для повної схеми мачти запишеться у вигляді суми умов замкненості для кожної частини окремо.

У векторній формі це має вигляд $\left(\vec{a}-\vec{r}-\vec{r}_1\right)+\left(\vec{b}+\vec{r}_2+\vec{r}\right)=0$, оскільки $\vec{b}+\vec{r}_2+\vec{r}=0$ $\left(\vec{b}+\vec{r}_2=-\vec{r}\right)$, то умова замкненості набуде вигляду $\vec{a}-\vec{r}-\vec{r}_1=0$ $\left(\vec{a}-\vec{r}_1=\vec{r}\right)$.

Розглянувши це векторне рівняння в координатній площині, одержимо умову замкненості в скалярній формі:

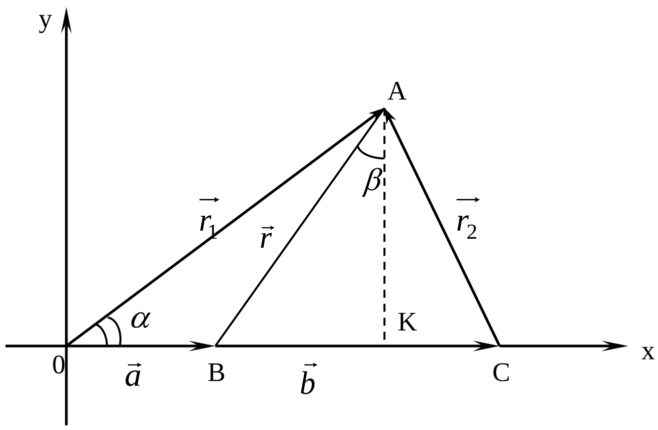
з ΔAKB: $\left|\overrightarrow{BK}\right|=\left|\vec{r}\right|\sin\beta$, $\left|\overrightarrow{AK}\right|=\left|\vec{r}\right|\cos\beta$

з ΔAKO: $\left|\overrightarrow{OK}\right|=\left|\vec{r}_1\right|\cos\alpha$, $\left|\overrightarrow{AK}\right|=\left|\vec{r}_1\right|\sin\alpha$

$$\overrightarrow{OB}=\vec{a} \qquad \left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{BK}\right|-\left|\overrightarrow{OK}\right|=0$$

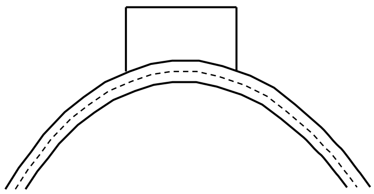
$$\vec{a}+\left|\vec{r}\right|\sin\beta-\left|\vec{r}_1\right|\cos\alpha=0, \quad \text{або}$$

$$\left|\overrightarrow{AK}\right|-\left|\overrightarrow{AK}\right|=0;$$

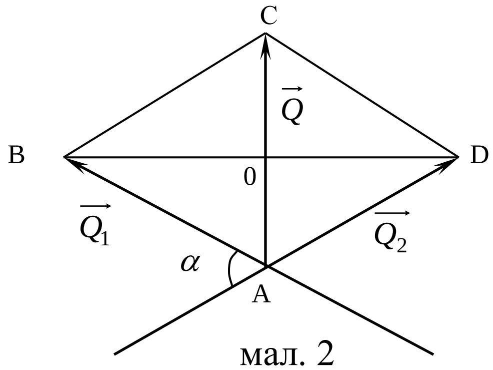


Відповідь: Умова замкненості $\left|\vec{r}\right|\cos\beta-\left|\vec{r}_1\right|\sin\alpha=0$.

Задача 2.2. При проведенні трубопроводу великого діаметру в місцях поворотів будують опори (мал.1), які сприймають зусилля, утворені в трубі від внутрішнього тиску. Знаючи величину тиску $\vec{P}$ рідини в трубі, внутрішній діаметр d труби і кут α, який утворює ділянка I трубопроводу з ділянкою II, знайти величину зусилля, яке діє на опору.



мал. 1



мал. 2

Внаслідок тиску рідини в місцях повороту труби на неї діють сили $\overrightarrow{Q_1}$ і $\overrightarrow{Q_2}$. Зусилля $\vec{Q}$, на яке розрахована опора є рівнодійною сил $\overrightarrow{Q_1}$ і $\overrightarrow{Q_2}$. Оскільки величина тиску рідини в усіх напрямках однакова, то $\left|\overrightarrow{Q_1}\right| = \left|\overrightarrow{Q_2}\right|$, $\left|\overrightarrow{Q_1}\right| = \left|\overrightarrow{Q_2}\right| = \left|\vec{P}\right| \cdot \frac{\pi d^2}{4}$, де $\frac{\pi d^2}{4}$ – площа поперечного перерізу труби. За правилом паралелограма знаючи $\left|\overrightarrow{Q_1}\right|, \left|\overrightarrow{Q_2}\right|$ і кут α знайдемо величину рівнодійної $\vec{Q}$ сил $\overrightarrow{Q_1}$ і $\overrightarrow{Q_2}$. $ABCD$ – паралелограм є ромбом в якому $\angle BAD = 180^0 - \alpha,\ \angle BAC = \frac{1}{2}\left(180^0 - \alpha\right) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$. З ΔAOB знаходимо $\left|\overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos \angle BAO$. Тобто $\frac{1}{2}\left|\vec{Q}\right| = \left|\overrightarrow{Q_1}\right| \cos\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$, звідки знайдемо величину зусилля, яке діє на опору: $\left|\vec{Q}\right| = 2\left|\overrightarrow{Q_1}\right| \sin\frac{\alpha}{2}$.

Відповідь: $\left|\vec{Q}\right| = 2\left|\overrightarrow{Q_1}\right| \sin\frac{\alpha}{2}$.

Задача 2.3. Знайти момент сили $\vec{F}$ прикладеної до точки A відносно точки B, якщо відомо, що $\vec{F} = \{1; 3; -2\}$, $A(4; 4; -1)$, $B(3; -1; 2)$.

Розв'язання. Момент сили $\vec{F}$ прикладеної до т. A відносно деякої фіксованої т. B знаходиться за формулою: $\overrightarrow{M_B}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$, де "$\times$" – знак векторного добутку. Знайдемо вектор $\overrightarrow{BA} = \{4-3; 4-(-1); -1-2\}$, $\overrightarrow{BA} = \{1; 5; -3\}$

$$\overrightarrow{M_B}\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{M_B(\vec{F})} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k},$$ або

$\overrightarrow{M_B(\vec{F})} = \{-1; -1; -2\}$.

Відповідь: $\overrightarrow{M_B(\vec{F})} = \{-1; -1; -2\}$.

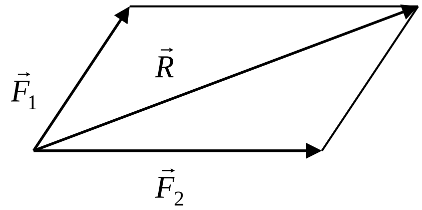
Задача 2.4. Знайти величину рівнодійної двох сил $\left|\vec{F_1}\right| = 5H$, $\left|\vec{F_2}\right| = 7H$, кут між якими дорівнює 60^0.

Розв'язання.

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\left(\vec{R}\right)^2 = \left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right)^2 = \left|\vec{F_1}\right|^2 + 2\left|\vec{F_1}\right| \cdot \left|\vec{F_2}\right| \cdot \cos\vartheta + \left|\vec{F_2}\right|^2$$

$$\left|\vec{R}\right|^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} + 7^2 = 25 + 35 + 49 = 119$$



$R = \sqrt{119} \approx 10{,}44\ (H)$.

Задача 2.5. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$, прикладених до однієї точки при переміщенні матеріальної точки з положення M_1 в положення M_2, якщо відомо:

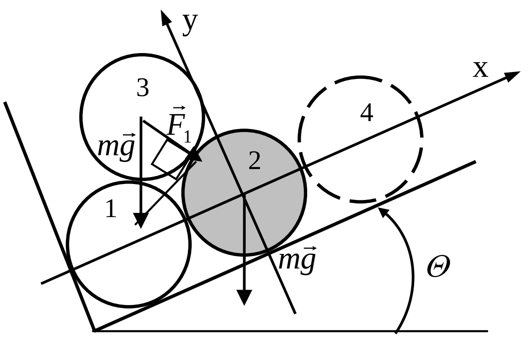
$$\overrightarrow{F_1} = \{2;\ 4;\ -7\},\quad \overrightarrow{F_2} = \{5;\ 1;\ 3\},\quad \overrightarrow{F_3} = \{2;\ -4;\ 5\},\qquad M_1(4;\ 7;\ 2),\quad M_2(-4;\ 2;\ 3).$$

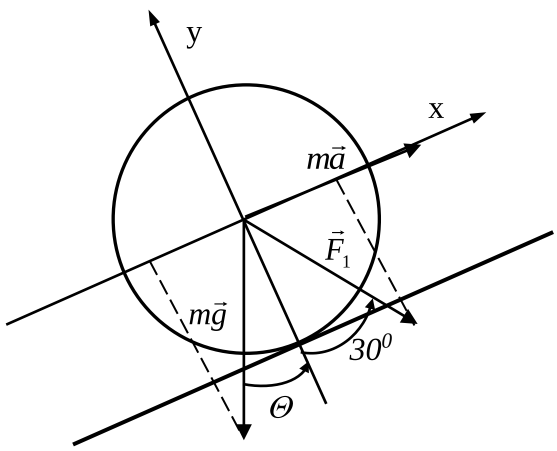
Розв'язання. Робота сили $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{S}$ обчислюється за формулою $A = (\vec{F} \cdot \vec{S})$. Згідно умови задачі: $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$, $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2}$
$\vec{F} = (2+5+2;\ 4+1+(-4);\ (-7)+3+5)$, $\vec{F} = (9;\ 1;\ 3)$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-4-4;\ 2-7;\ 3-2\}$,
$\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-8;\ -5;\ 1)$. $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$; $A = 9 \cdot (-8) + 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 1 = -74$.

Знак "мінус" вказує на те, що переміщення відбулося в напрямі, протилежному дії сили.

Відповідь: $A = 9 \cdot (-8) + 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 1 = -74$.

Задача 2.6. Вантажівка завантажена однаковими гладкими колодами. Автомобіль заїхав у кювет і стоїть, нахиливши один борт, причому дно кузова утворює з горизонталлю кут Θ (крен в поздовжньому напрямку відсутній). Закінчується розвантаження кузова. Якщо видалити колоду, показану на малюнку пунктиром, то останні три колоди при найменшому зменшенні кута Θ розкотяться. Знайти кут Θ.





Розв'язання. Друга колода, що виділена сірим кольором на малюнку, перебуває під дією сили власної ваги $m\vec{g}$ та сили, спричиненої вагою верхніх третьої та четвертої колод. Якщо відсутня четверта колода, позначена пунктиром, то залишиться лише зусилля верхньої третьої колоди $\vec{F}_1$. Ця сила є проекцією маси третьої колоди на пряму, що сполучає центри січення другої та третьої колоди. З урахуванням того, що січення їх однакові (відповідно центри першої, другої та третьої колод утворюють рівносторонній трикутник) та кут нахилу кузова рівний Θ, величина сили $\vec{F}_1$:

$$\left|\vec{F}_1\right| = m|\vec{g}|\cos\left(60^0 - \Theta\right). \qquad (1)$$

Задамо декартову систему координат. Виберемо напрям осі Ох паралельно днищу кузова вантажівки, а точку О – центр другої колоди. У випадку розкочування рух другої колоди буде відбуватися в напрямку осі Ox. Спроектуємо на цю вісь відповідні зусилля:

$$\text{Ox: } m|\vec{a}| = |\vec{F}_1|\sin(30^0) - m|\vec{g}|\sin(\Theta). \qquad (2)$$

Врахувавши (1), отримуємо:

$$m|\vec{a}| = m|\vec{g}|\cos(60^0 - \Theta)\sin(30^0) - m|\vec{g}|\sin(\Theta). \qquad (3)$$

Спростимо (3) і отримаємо вираз для прискорення руху колоди в напрямку Ox:

$$|\vec{a}| = |\vec{g}| \cdot \left(\cos(60^0 - \Theta)\sin(30^0) - \sin(\Theta)\right) \qquad (4)$$

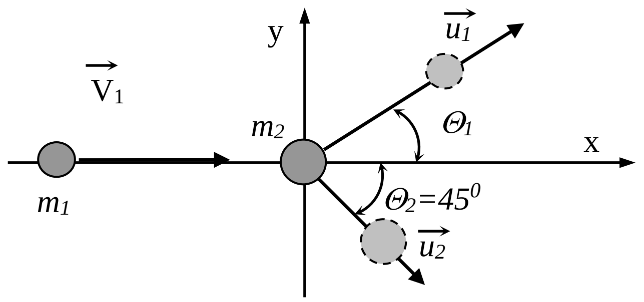
Згідно (4) рух відбудеться лише за додатного прискорення $|\vec{a}|$. Відповідно, на кут Θ накладається наступна умова:

$$\cos(60^0 - \Theta)\sin(30^0) - \sin(\Theta) > 0,$$

або $ctg(\Theta) > 2 - \sqrt{3}$.

Відповідь: Колоди розкотяться за кута $\Theta > arcctg(2 - \sqrt{3})$.

Задача 2.7. Частка маси m_1 налітає зі швидкістю $\vec{V}_1$ на нерухому частку, маса якої $m_2=3m_1$. Відбувається абсолютно пружне зіткнення, після якого частка m_2 рухається під кутом Θ_2=45° до первісного напрямку руху частки m_1 (див. малюнок). Потрібно знайти Θ_1 — кут відхилення першої частки і величини швидкостей $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$.



Розв'язання. Запишемо закон збереження імпульсу:

$$m_1\vec{V}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2; \qquad (1)$$

або, з урахуванням умов:

$$m_1\vec{V}_1 = m_1\vec{u}_1 + 3m_1\vec{u}_2. \qquad (2)$$

Задамо декартову систему координат. Виберемо напрям осі Ox як напрям вектора $\vec{V}_1$, а точку O – місцезнаходження нерухомої частки m_2.

Закон збереження енергії до і після зіткнення :

$$\frac{m_1|\vec{V}_1|^2}{2} = \frac{m_1|\vec{u}_1|^2}{2} + \frac{m_2|\vec{u}_2|^2}{2}. \qquad (3)$$

З урахуванням $m_2=3m_1$ рівняння (3):

$$|\vec{V}_1|^2 = |\vec{u}_1|^2 + 3|\vec{u}_2|^2. \qquad (4)$$

Запишемо рівняння (2) в проекціях на осі:

$$\text{Ox: } m_1|\vec{V}_1| = m_1|\vec{u}_1|\cos(\Theta_1) + 3m_1|\vec{u}_2|\cos(45^0); \qquad (5)$$

$$\text{Oy: } 0 = m_1|\vec{u}_1|\sin(\Theta_1) - 3m_1|\vec{u}_2|\sin(45^0). \qquad (6)$$

Скорочуємо в рівняннях (5), (6) m_1 та виражаємо величини $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$ через кут Θ_1 :

$$|\vec{u}_1| = \frac{|\vec{V}_1|}{\cos(\Theta) + \sin(\Theta)}; \; |\vec{u}_2| = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{|\vec{V}_1|\sin(\Theta)}{\cos(\Theta) + \sin(\Theta)}. \qquad (7)$$

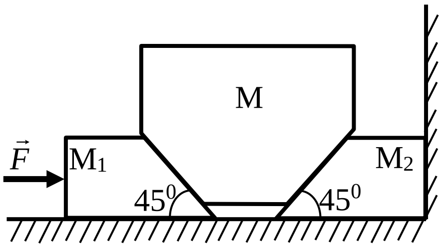
Підставляємо рівняння (7) в (4) і отримуємо рівняння відносно кута Θ_1 :

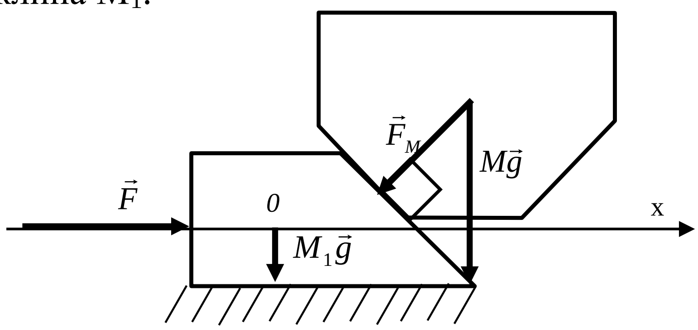
$$\left|\vec{V}_1\right|^2 = \frac{\left|\vec{V}_1\right|^2}{(\cos(\Theta)+\sin(\Theta))^2} + \frac{2}{9}\frac{\left|\vec{V}_1\right|^2 \sin^2(\Theta)}{(\cos(\Theta)+\sin(\Theta))^2}. \qquad (8)$$

Розв'язок рівняння (8) : $\Theta_1 = arctg\left(\frac{1}{9}\right)$.

Відповідь: $\Theta_1 \approx 6{,}34^0$.

Задача 2.8. Дано два однакових клини з кутами нахилу 45° і однаковими масами $M_1 = M_2 = 8{,}0$ кг. Усі площини абсолютно гладкі, як і у вантажі з масою M=384 кг, що потрібно підняти за допомогою цих клинів. Обидва клини лежать на гладкій горизонтальній площині; один з них упирається у вертикальну стіну, а до іншого прикладена горизонтальна сила F = 5920 Н. Знайти величину і напрямок прискорення рухомого клина M_1.





Розв'язання. На клин маси M_1 діє система сил, що складається з активного зовнішного зусилля $\vec{F}$, ваги самого клина $M_1\vec{g}$ та зусилля $\vec{F}_M$, зумовленого вагою клина маси M:

$$M_1\vec{a} = \vec{F} + M\vec{g} + \vec{F}_1. \qquad (1)$$

Рух клина здійснюється в напрямку осі Ox.

Зусилля $\vec{F}_M$ є проекцією сили $M\vec{g}$ перпендикулярно до площини контакту вантажу з клином. Виходячи з умов задачі (кут нахилу площини контакту до Ox 45^0):

$$\left|\vec{F}_M\right| = M|\vec{g}|\cos\left(45^0\right). \qquad (2)$$

Складемо проекцію рівняння (1) на вісь Ox:

$$M_1|\vec{a}| = \left|\vec{F}\right| - \left|\vec{F}_1\right|\cos\left(45^0\right);$$

або з урахуванням (2):

$$M_1|\vec{a}| = \left|\vec{F}\right| - M|\vec{g}|\cos^2\left(45^0\right). \qquad (3)$$

Отже, величина прискорення клина з масою M_1 :

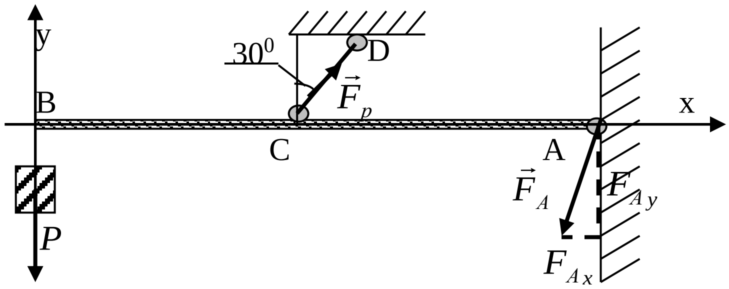
$$|\vec{a}| = \frac{\left|\vec{F}\right| - M|\vec{g}|\cos^2\left(45^0\right)}{M_1}. \qquad (4)$$

Згідно умови:

$$|\vec{a}| = \frac{\left|\vec{F}\right| - M|\vec{g}|\cos^2\left(45^0\right)}{M_1} = \frac{5920 - 384{,}0 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1}{2}}{8{,}0} = 504{,}8\frac{м}{с}.$$

Відповідь: Рухомий клин з масою M_1 рухається в напрямку вектора зусилля $\vec{F}$ з прискоренням $|\vec{a}| = 504{,}8\frac{м}{с}$.

Задача 2.9. Одноконсольна балка (що має один вільний кінець), шарнірно прикріплена до стіни, утримується тросом *CD* у горизонтальному положенні (BC = CA). На вільному кінці балки в точці *B* підвішений вантаж P = 10 *кг.* Визначити зусилля в тросі і реакцію в точці А, якщо вагою балки можна знехтувати.



Розв'язання. За умовою задачі на кінець балки діє сила

$$\vec{F} = P\vec{g}. \tag{1}$$

В точці А реакція на діюче зусилля $\vec{F}_A = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix}$.

Складемо сумарне рівняння моментів відносно точки А та спроектуємо зусилля, що діють на балку на осі координат:

mom_A: $|AB|\cdot|\vec{F}| - |AC|\cdot|\vec{F}_p|\cos(30^0) = 0$; (2)

Ox: $F_{Ax} = |\vec{F}_p|\cdot\sin(30^0)$; (3)

Oy: $|\vec{F}| + F_{Ay} = |\vec{F}_p|\cdot\cos(30^0)$. (4)

Враховуючи умову BC = CA та (1), знайдемо зусилля в тросі $|\vec{F}_p|$:

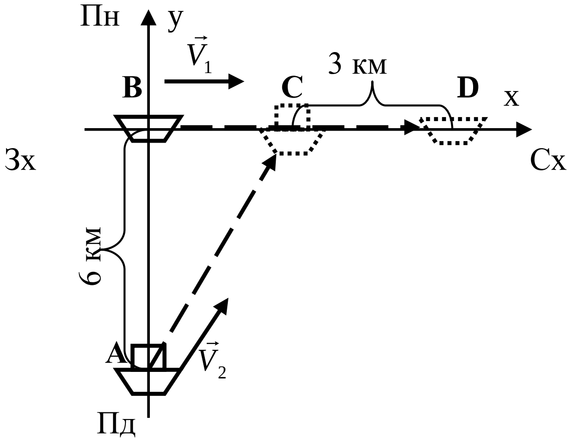
$$|\vec{F}_p| = \frac{|AB|\cdot P|\vec{g}|}{|AC|\cdot\cos(30^0)} = \frac{2\cdot P|\vec{g}|}{\cos(30^0)} \approx 226{,}33. \tag{5}$$

З урахуванням (5) складові реакції $\vec{F}_A$ в точці А, згідно (3) та (4):

$$F_{Ax} = 2\cdot P\cdot|\vec{g}|\cdot tg(30^0) \approx 113{,}16;$$

$$F_{Ay} = \frac{2\cdot P|\vec{g}|}{\cos(30^0)}\cdot\cos(30^0) - P|\vec{g}| = P|\vec{g}| \approx 98.$$

Відповідь: Зусилля в тросі 226,33 Н, реакція в точці А по осі Ох 113,16 Н, по осі Оу 98 Н.



Задача 2.10. Ви знаходитеся на судні, що йде на схід зі сталою швидкістю $\vec{V}_1$=15 км/год. Корабель, що йде постійним курсом з відомою швидкістю $\vec{V}_2$=26 км/год, знаходиться 6 км південніше. Пізніше він проходить за кормою вашого судна, причому відстань найбільшого зближення складає 3 км.

а) Знайти курс цього корабля.

б) Який час пройшов між двома моментами, описаними в задачі?

Розв'язання. Виберемо наступним чином систему координат: точка О (0, 0) – місцезнаходження судна, на якому ви знаходитесь, вісь Ох – напрям з заходу на схід, вісь Оу – напрям з півдня на північ. Одиничний відрізок рівний 1 км. Тож координати вектора $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ і шуканий вектор $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

Величина вектора $\vec{V}_2$:

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 26. \tag{1}$$

За час t, що пройшов між описаними в умові задачі двома подіями, судно, на якому ви знаходитесь, пройшло відрізок BD, а корабель, за яким спостерігають, відрізок AC.

Відстань AB за умовою – 6 км: $|AB| = 6$. Відстань BC=BD-CD: $|BC| = 15 \cdot t - 3$. За час t другий корабель пройшов сумарну відстань AC, яка розкладається на дві складові:

по Оу – рух на північ $v_y t = |AB|$ або $v_y = \frac{6}{t}$; (2)

по Ох – рух на схід $v_x t = |BC|$ або $v_x = \frac{15 \cdot t - 3}{t}$. (3)

Згідно рівнянь (2) та (3) отримані значення складових v_x та v_y швидкості $\vec{V}_2$ підставляємо в рівняння (1):

$$\sqrt{\left(\frac{15 \cdot t - 3}{t}\right)^2 + \left(\frac{6}{t}\right)^2} = 26$$

або $676 \cdot t^2 = 225 \cdot t^2 - 90 \cdot t + 9 + 36$, $451 \cdot t^2 + 90 \cdot t - 45 = 0$. (4)

Дійсний додатний корінь рівняння (4) лише один: t≈0,2315 год.

Підставляємо отриманий результат в рівняння (2) та (3), отримаємо

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

$$v_x = \frac{15 \cdot 0{,}2315 - 3}{0{,}2315} \approx 0; \quad v_y = \frac{6}{0{,}2315} \approx 26.$$

Відповідь: Корабель рухався в північному напрямку. Між двома моментами, описаними в задачі, пройшло 0,2315 год.

Завдання для самостійної роботи:

Задача 1. Знайти момент сили, прикладеної до точки А відносно точки В, якщо відомо, що:

1.1 $\vec{F}=\{3;-1;1\}$, т. $A(3;-2;-1)$, т. $B(1;0;-2)$;
1.2 $\vec{F}=\{1;0;-2\}$, т. $A(-1;1;2)$, т. $B(-2;1;-1)$;
1.3 $\vec{F}=\{2;-1;2\}$, т. $A(2;1;-3)$, т. $B(4;5;1)$;
1.4 $\vec{F}=\{-2;2;-1\}$, т. $A(1;2;-2)$, т. $B(-1;-1;2)$;
1.5 $\vec{F}=\{-3;1;0\}$, т. $A(0;-1;4)$, т. $B(2;2;0)$;
1.6 $\vec{F}=\{1;-1;3\}$, т. $A(-2;0;3)$, т. $B(3;-2;3)$;
1.7 $\vec{F}=\{4;1;1\}$, т. $A(-1;-1;2)$, т. $B(-1;1;-1)$;
1.8 $\vec{F}=\{1;-1;-1\}$, т. $A(1;1;1)$, т. $B(1;3;-4)$;
1.9 $\vec{F}=\{-1;0;-1\}$, т. $A(-2;1;0)$, т. $B(-2;-3;1)$;
1.10 $\vec{F}=\{2;-2;3\}$, т. $A(1;-1;-1)$, т. $B(-1;-2;0)$;
1.11 $\vec{F}=\{3;-1;-1\}$, т. $A(-1;-2;-1)$, т. $B(1;4;-3)$;
1.12 $\vec{F}=\{-2;0;1\}$, т. $A(1;-4;3)$, т. $B(1;-3;-3)$;
1.13 $\vec{F}=\{3;3;-4\}$, т. $A(-1;-1;-4)$, т. $B(-1;-2;-2)$;
1.14 $\vec{F}=\{1;-2;-2\}$, т. $A(2;-2;3)$, т. $B(1;3;-3)$;
1.15 $\vec{F}=\{-4;1;-1\}$, т. $A(-2;-1;4)$, т. $B(3;0;-1)$;
1.16 $\vec{F}=\{3;-2;4\}$, т. $A(-3;-4;-1)$, т. $B(-2;1;-1)$;
1.17 $\vec{F}=\{4;0;-1\}$, т. $A(1;0;-3)$, т. $B(2;-1;-2)$;
1.18 $\vec{F}=\{5;-1;-2\}$, т. $A(-1;-3;0)$, т. $B(1;0;-4)$;
1.19 $\vec{F}=\{-4;-3;-1\}$, т. $A(-2;0;-4)$, т. $B(-3;-3;2)$;
1.20 $\vec{F}=\{1;-1;-1\}$, т. $A(1;-1;-3)$, т. $B(2;-2;-2)$;
1.21 $\vec{F}=\{2;-1;-3\}$, т. $A(-2;-1;-1)$, т. $B(-1;0;-5)$;
1.22 $\vec{F}=\{-3;-4;-1\}$, т. $A(1;-1;-5)$, т. $B(1;-3;4)$;
1.23 $\vec{F}=\{1;3;0\}$, т. $A(2;3;4)$, т. $B(-2;-1;-3)$;
1.24 $\vec{F}=\{2;-3;-1\}$, т. $A(-3;-1;-1)$, т. $B(1;0;4)$;
1.25 $\vec{F}=\{-1;-1;2\}$, т. $A(1;-1;0)$, т. $B(2;1;1)$;
1.26 $\vec{F}=\{-2;2;0\}$, т. $A(4;-3;-1)$, т. $B(-1;-1;4)$;
1.27 $\vec{F}=\{1;1;-3\}$, т. $A(1;-2;-2)$, т. $B(1;2;2)$;
1.28 $\vec{F}=\{-2;-2;0\}$, т. $A(1;1;-2)$, т. $B(3;-3;2)$;
1.29 $\vec{F}=\{-3;0;-3\}$, т. $A(4;3;2)$, т. $B(-2;0;-2)$;
1.30 $\vec{F}=\{2;0;2\}$, т. $A(-3;0;-1)$, т. $B(4;2;0)$.

Задача 2. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, прикладених до однієї точки, при переміщенні матеріальної точки з положення M_1, в положення M_2, якщо відомо:

2.1 $\vec{F}_1=\{2;1;-1\}$, $\vec{F}_2=\{-1;1;0\}$, $\vec{F}_3=\{3;-4;0\}$, $M_1(1;-1;-1)$, $M_2(3;-2;1)$;
2.2 $\vec{F}_1=\{-3;-1;0\}$, $\vec{F}_2=\{1;-1;2\}$, $\vec{F}_3=\{-2;-1;-2\}$, $M_1(-1;0;1)$, $M_2(1;-1;-2)$;
2.3 $\vec{F}_1=\{-1;0;2\}$, $\vec{F}_2=\{2;0;-1\}$, $\vec{F}_3=\{1;2;1\}$, $M_1(2;-1;3)$, $M_2(2;2;-1)$;

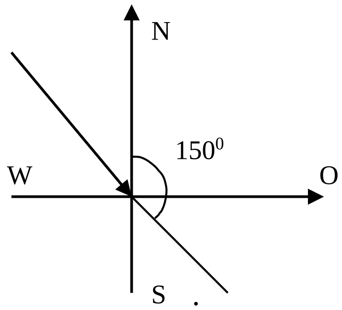
2.4 $\vec{F}_1 = \{1;\ 1;\ -3\}$, $\vec{F}_2 = \{3;\ 2;\ -2\}$, $\vec{F}_3 = \{-1; -2; 2\}$, $M_1(1;\ 2;\ -2)$, $M_2(-1; 1;\ 3)$;
2.5 $\vec{F}_1 = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{F}_2 = \{-3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{F}_3 = \{2;\ 0;\ 3\}$, $M_1(-1; -1; 0)$, $M_2(-2; 0; -1)$;
2.6 $\vec{F}_1 = \{1; -2; 3\}$, $\vec{F}_2 = \{-1; -2; -3\}$, $\vec{F}_3 = \{1; 1; 1\}$, $M_1(-2; -2; -1)$, $M_2(-1; 0; -3)$;
2.7 $\vec{F}_1 = \{2; -3; -2\}$, $\vec{F}_2 = \{1; -3; 0\}$, $\vec{F}_3 = \{-3; 1; -1\}$, $M_1(2; 1; -4)$, $M_2(2; -1;\ 0)$;
2.8 $\vec{F}_1 = \{-1; -2; 2\}$, $\vec{F}_2 = \{-2; -1; -1\}$, $\vec{F}_3 = \{-2; -2; 0\}$, $M_1(1; -2; 3)$, $M_2(1; -2; -2)$;
2.9 $\vec{F}_1 = \{-2; 0; -1\}$, $\vec{F}_2 = \{2; 1; -1\}$, $\vec{F}_3 = \{2; -1; 1\}$, $M_1(1; 1; 2)$, $M_2(1; -3; 4)$;
2.10 $\vec{F}_1 = \{1; 1; 0\}$, $\vec{F}_2 = \{-1; 2; 2\}$, $\vec{F}_3 = \{-1; 0; 2\}$, $M_1(-2; 0; -2)$, $M_2(-1; 2; 0)$;
2.11 $\vec{F}_1 = \{2; -1; 4\}$, $\vec{F}_2 = \{-1; -1; -3\}$, $\vec{F}_3 = \{-1; 3; -3\}$, $M_1(0; -1; 2)$, $M_2(-3; -2; 1)$;
2.12 $\vec{F}_1 = \{0; -3; 1\}$, $\vec{F}_2 = \{0; 2; -2\}$, $\vec{F}_3 = \{1; -3; 0\}$, $M_1(1; 2; -3)$, $M_2(0; -1; 1)$;
2.13 $\vec{F}_1 = \{3; -2; -2\}$, $\vec{F}_2 = \{1; -3; -3\}$, $\vec{F}_3 = \{0; 1; -1\}$, $M_1(3; -1; 0)$, $M_2(4; -2; 1)$;
2.14 $\vec{F}_1 = \{-1; 4; -1\}$, $\vec{F}_2 = \{-3; -3; 4\}$, $\vec{F}_3 = \{5; 1; -2\}$, $M_1(-1; 3; -1)$, $M_2(1; 2; 2)$;
2.15 $\vec{F}_1 = \{1; 1; -1\}$, $\vec{F}_2 = \{-2; -3; -1\}$, $\vec{F}_3 = \{2; -2; 2\}$, $M_1(-1; -1; -1)$, $M_2(-1; 0; -1)$;
2.16 $\vec{F}_1 = \{0; -3; 1\}$, $\vec{F}_2 = \{-1; 0; 1\}$, $\vec{F}_3 = \{1; 1; -5\}$, $M_1(4; -3; 1)$, $M_2(-2; 1; 2)$;
2.17 $\vec{F}_1 = \{5; -2; 0\}$, $\vec{F}_2 = \{-4; 2; 3\}$, $\vec{F}_3 = \{-1; -3; 1\}$, $M_1(-2; 2; 2)$, $M_2(1; 3; -3)$;
2.18 $\vec{F}_1 = \{4; -2; 1\}$, $\vec{F}_2 = \{1; 3; 1\}$, $\vec{F}_3 = \{1; 2; -2\}$, $M_1(1; -3; 2)$, $M_2(3; -1; -1)$;
2.19 $\vec{F}_1 = \{-3; 2; 1\}$, $\vec{F}_2 = \{-2; 1; -3\}$, $\vec{F}_3 = \{-3; -3; 3\}$, $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(2; -3; 2)$;
2.20 $\vec{F}_1 = \{-1; -2; -1\}$, $\vec{F}_2 = \{3; -1; -1\}$, $\vec{F}_3 = \{1; 0; -5\}$, $M_1(-1; 2; -2)$, $M_2(1; -3; -2)$;
2.21 $\vec{F}_1 = \{1; 1; -3\}$, $\vec{F}_2 = \{1; -2; 3\}$, $\vec{F}_3 = \{-1; 1; -4\}$, $M_1(-2; 3; 0)$, $M_2(-4; 0; -1)$;
2.22 $\vec{F}_1 = \{2; -1; 0\}$, $\vec{F}_2 = \{2; -2; -5\}$, $\vec{F}_3 = \{2; -1; 3\}$, $M_1(0; -1; 3)$, $M_2(0; -2; -4)$;
2.23 $\vec{F}_1 = \{2; -4; -3\}$, $\vec{F}_2 = \{1; -3; -3\}$, $\vec{F}_3 = \{2; -2; -5\}$, $M_1(2; 4; -3)$, $M_2(-3; -2; -1)$;
2.24 $\vec{F}_1 = \{-1; -3; -4\}$, $\vec{F}_2 = \{-1; -2; -4\}$, $\vec{F}_3 = \{-2; -3; 0\}$, $M_1(0; 4; -2)$, $M_2(1; -3; -1)$;
2.25 $\vec{F}_1 = \{-2; 1; 5\}$, $\vec{F}_2 = \{-3; -4; 2\}$, $\vec{F}_3 = \{1; -4; -1\}$, $M_1(-2; -3; 5)$, $M_2(2; 0; 5)$;
2.26 $\vec{F}_1 = \{-2; 2; 4\}$, $\vec{F}_2 = \{-1; -3; 3\}$, $\vec{F}_3 = \{-2; 5; 0\}$, $M_1(1; -1; 4)$, $M_2(-2; -4; -3)$;
2.27 $\vec{F}_1 = \{0; -1; 0\}$, $\vec{F}_2 = \{1; -2; -1\}$, $\vec{F}_3 = \{4; -1; -3\}$, $M_1(0; -3; -5)$, $M_2(0; -3; -1)$;
2.28 $\vec{F}_1 = \{2; -3; 2\}$, $\vec{F}_2 = \{2; 3; 4\}$, $\vec{F}_3 = \{2; -1; -1\}$, $M_1(-3; 0; 1)$, $M_2(1; -1; 4)$;
2.29 $\vec{F}_1 = \{-1; 1; -5\}$, $\vec{F}_2 = \{0; -1; 4\}$, $\vec{F}_3 = \{1; -2; -2\}$, $M_1(3; 3; -4)$, $M_2(2; -1; -4)$;
2.30 $\vec{F}_1 = \{-2; -3; 0\}$, $\vec{F}_2 = \{1; 0; 5\}$, $\vec{F}_3 = \{0; -1; -3\}$, $M_1(-1; -1; 6)$, $M_2(-2; 1; -2)$.

Задача 3. Ртуть в термометрі піднялася від 0^0 до 15^0, потім на 20^0, після цього опустилась на 39^0, вкінці піднялась на 17^0. На якій висоті буде знаходитись рівень ртуті після цих переміщень?

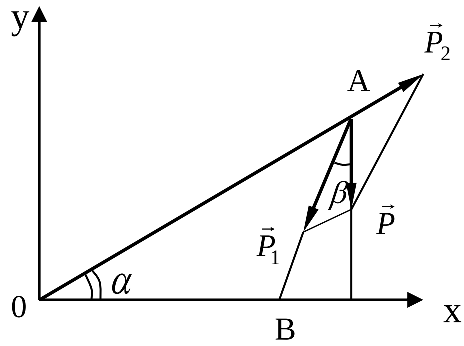
Задача 4. Паровоз маневрує. Виходячи зі станції, він пройшов вправо 2,5 км, потім вліво 4 км, потім вліво 0,5; знову вправо 4 км. Яке переміщення паровоза відносно станції?

Задача 5. Стрілка гальванометра відхилилася від 0 на 41^0 проти годинникової стрілки, потім 4^0 за годинниковою стрілкою. Який кут складає кінцеве положення стрілки відносно початкового?

Задача 6. Розкласти вітер, який дме зі швидкістю $25\ м/с$ з північного заходу під кутом 150^0 до півночі, на західний і північний компоненти.



Задача 7. Записати умову рівноваги сил, які діють у навантаженній монтажній мачті.



Відповідь: $-\left|\vec{P}_1\right|\cos\beta+\left|\vec{P}_2\right|\sin\alpha-\left|\vec{P}\right|=0.$

Задача 8. Знаючи вагу P вантажу, який піднімає мачта, кути α і β, знайти величини $\vec{P}_1$ – зусилля в мачті і P_2 – зусилля в тросі. Обчислити $\left|\vec{P}_1\right|$ і $\left|\vec{P}_2\right|$, якщо $\left|\vec{P}\right|=10$ кН, $\alpha=30^0$, $\beta=10^0$. (Скористатись мал. до задачі 7).

Відповідь: $\left|\vec{P}_1\right|=\dfrac{\left|\vec{P}\right|\cos\alpha}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}=11{,}3$ кН, $\left|\vec{P}_2\right|=\dfrac{\left|\vec{P}\right|\ \sin\beta}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}\approx 2{,}26$ кН.

Задача 9. Забита в землю опора, до якої прикріплено трос (на мал. до задачі 7. т.О), сприймає натяг тросу, який визначається силою $\vec{P}_2$. Розкласти силу $\vec{P}_2$ за правилом паралелограма на горизонтальну $\vec{P}_3$ і вертикальну $\vec{P}_4$ складові. Виразити величини $\vec{P}_3$ і $\vec{P}_4$ через значення $\vec{P}_2$, знайдене в задачі 8. Обчислити значення $\left|\vec{P}_3\right|$ і $\left|\vec{P}_4\right|$ при $\left|\vec{P}\right|=10$ кН, $\alpha=30^0$, $\beta=10^0$.

Відповідь: $\left|\vec{P}_3\right|=\left|\vec{P}_2\right|\sin\alpha\approx 1{,}13$ кН, $\left|\vec{P}_4\right|=\left|\vec{P}_2\right|\cos\alpha\approx 1{,}96$ кН.

Задача 10. Опора мачти (на мал. до задачі 7. т. В) сприймає силу $\vec{P}_1$, яка стискає мачту. Розкласти силу $\vec{P}_1$ за правилом паралелограма на горизонтальну $\vec{P}_5$ і вертикальну $\vec{P}_6$ складові. Виразити величини $\vec{P}_5$ і $\vec{P}_6$ через знайдену в задачі 8 величину $\vec{P}_1$ і кут β. Обчислити значення $\left|\vec{P}_5\right|$ і $\left|\vec{P}_6\right|$ при $\left|\vec{P}\right|=10$ кН, $\alpha=30,\ \beta=10$.

Відповідь: $\left|\vec{P}_5\right|=\left|\vec{P}_1\right|\sin\beta\approx 1{,}96$ кН, $\left|\vec{P}_6\right|=\left|\vec{P}_1\right|\cos\beta\approx 11{,}13$ кН.

Задача 11. Знайти кути α і β, якщо вага вантажу, який піднімається мачтою $\vec{P}=\{0;-10\}$, а натяг тросу $\vec{P}_2=\{2;3\}$.

Відповідь: $\alpha = 34^0$, $\beta \approx 9^0$.

Задача 12. Знаючи координати векторів $\vec{P} = \{0; -10\}$ і $\vec{P}_2(2; 3)$, знайти $пр_{\vec{P}}\vec{P}_2$ і $пр_{\vec{P}_2}\vec{P}$. Відповідь. $пр_{\vec{P}}\vec{P}_2 \approx 9{,}88$, $пр_{\vec{P}_2}\vec{P} \approx -8{,}33$.

Задача 13. За відомими координатами векторів $\vec{P} = \{0; -10\}$, $\vec{P}_2 = \{2; 3\}$ знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{P}, \vec{P}_2$.

Відповідь: $S_{парал} = 20$ кв.од.

Задача 14. Точка О піддається розтягу за трьома взаємно-перпендикулярними напрямками. Приймаючи цю точку за початок координат, а згадані напрями – за напрями координатних осей, позначимо відповідні їм напруження через $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$. Нехай перпендикуляр до довільної площини, яка проходить через точку, утворює з осями координат кути α, β, γ. Визначити напруження $\vec{P}$, яке діє в т. О на цю площину.

Відповідь: $P_x = \sigma_1 \cos\alpha,\ P_y = \sigma_2 \cos\beta,\ P = \sigma_3 \cos\gamma$ повне напруження $\vec{P} = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$.

Задача 15. Сила тяги вертольота утворює з напрямом вітру кут 40^0. Відношення швидкості руху вертольоту до швидкості вітру дорівнює 6. Знайти кут між напрямом руху вертольоту і напрямом вітру.

Відповідь: 34^0.

Задача 16. Однорідний стержень масою 3 кг прикріплений своїм нижнім кінцем до шарніра. До другого його кінця підвішаний вантаж масою 2 кг. Стержень утримується в рівновазі горизонтальною відтяжкою, прикріпленою до нерухомої вертикальної стійки. Обчислити силу натягу відтяжки, якщо довжина вертикальної стійки – 1,4 м, а довжина горизонтальної відтяжки – 0,5 м.

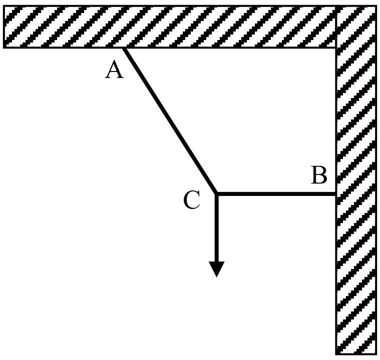
Відповідь: $0{,}25\vec{i} \times (-3q)\vec{j} + 0{,}5\vec{i} \times (-2q\,\vec{j}) + F\,\vec{i} \times 0{,}8\,\vec{j} = 0;\quad F = 12{,}25$ н.

Задача 17. Для довільної т. М твердого тіла швидкість ϑ визначається формулою Ейлера $\vec{\vartheta} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де $\vec{\omega}$ – кутова швидкість обертання, а r – відстань від т. М до точки О осі обертання, до якої прикладено ковзаючий вектор. Знайти лінійну швидкість обертання точок дзиґи, які лежать на колі більшого діаметра, що дорівнює 20, якщо $\vec{\omega} = \{-3; 2; 4\}$ і вектор $\vec{\omega}$ прикладено в центрі великого кола.

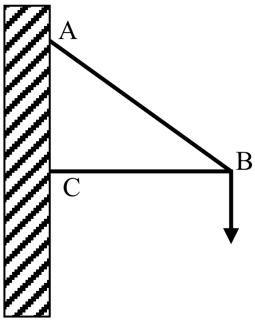
Відповідь: $\vec{r} = R\left(\cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}\right);$

$$\vec{\vartheta} = \vec{\omega} \times \vec{r} = 10 \times \left[(2\cos\gamma - 4\cos\beta)\ \vec{i} + (3\cos\gamma + 4\cos\alpha)\ \vec{j} - (3\cos\beta + 2\cos\alpha)\ \vec{k}\right]$$

Задача 18. До двох тросів підвішаний вантаж масою 30 кг. Визначити сили, що виникають в тросах, якщо кут $ACB = 120^0$.



Задача 19. Вантаж масою 60 кг підтримується двома стержнями: AB та CB. Визначити сили, які виникають в стержнях, якщо кут $ACB = 90^0$ кут $ABC = 30^0$.



Задача 20. Велосипедист їде зі швидкістю 10 км/год в північному напрямку, і йому здається, що вітер (який дме зі швидкістю 6 км/год з північно східного напрямку) спрямований майже назустріч йому, під кутом 15^0 до лінії його руху. Визначити правдивий напрямок вітру і знайти вдаваний напрямок вітру з погляду велосипедиста, що їде в зворотному напрямку з тією ж швидкістю (10 км/год.).

Задача 21. Колесо радіусом R котиться без ковзання по горизонтальній поверхні. Колесо розташоване у вертикальній площині, а вісь його рухається горизонтально з постійною швидкістю ϑ щодо поверхні. Обчислити величину і напрямок швидкості довільної точки на ободі колеса.

Задача 22. Чоловік, що стоїть на березі ріки шириною 1 км, хоче переправитися на інший берег у прямо протилежну точку. Він може зробити це двома способами: 1) плисти весь час під кутом до течії, так що результуюча швидкість буде постійно перпендикулярна березі; 2) плисти до протилежного берега, а відстань, на яку його знесе течією, пройти потім по березі пішки. Плаває він зі швидкістю 2,5 км/год, а йде зі швидкістю 4 км/год. Швидкість течії 2 км/год. Який спосіб дозволить переправитися швидше? Який напрям швидкості плавця у першому випадку?

Задача 23. Частка масою m_1 = 2 кг, що рухається зі швидкістю $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ м/сек, абсолютно непружно стикається з іншою часткою, маса якої m_1 = 3 кг, а швидкість $\vec{V}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ м/сек. Знайти швидкість складеної частки, що утворилась внаслідок зіткнення.

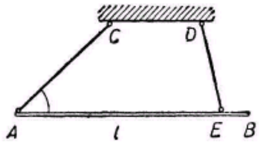
Задача 24. Тіло масою 1 кг, що рухається на північ зі швидкістю 6 м/сек, зіштовхується з нерухомим тілом, маса якого 2 кг. Після зіткнення тіло з меншою масою рухається під кутом 45° до напрямку свого первісного руху (на північний схід) зі швидкістю 2,82 м/сек.

а) Чому дорівнює швидкість тіла з масою 2 кг?

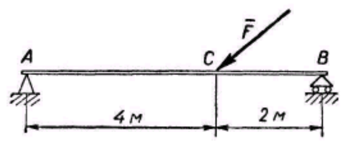
б) На який кут відхилилося більш легке тіло?

Задача 25. Частка маси *m* пружно зіштовхується з нерухомою часткою, маса якої *M*>*m,* і відхиляється від первісного напрямку на 90°. Під яким кутом до напрямку первісного руху полетить більш важка «частка віддачі»?

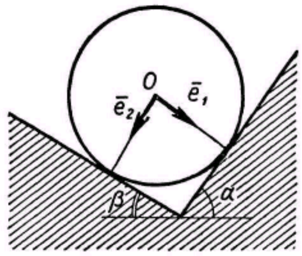
Задача 26. Стержень *AB* довжиною *l* і вагою P = 14 *кг* підвішаний за допомогою троса CA, як зазначено на рис. У якій точці *E* даного стержня треба закріпити другий трос DE, щоб стержень знаходився в горизонтальному положенні (*l* = 8 *м, DC* = 3 *м, AC* = 4 *м)?* Визначити також силу натягу в обох тросах.



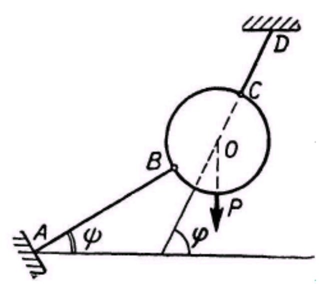
Задача 27. На балку, шарнірно закріплену на нерухомій опорі *A* одним кінцем і покладену вільно на рухому опору другим кінцем B, діє сила F, рівна за модулем 10 *кг* і спрямована під кутом 30° до осі балки, як зазначено на рис. Визначити сили реакції, що виникають в опорах, якщо вагою балки можна знехтувати.



Задача 28. Між двома гладкими похилими площинами лежить однорідний вал вагою P *кг.* Знайти вектори, що визначають сили реакції кожної з площин, якщо останні складають з горизонталлю кути α і β.



Задача 29. Однорідна куля утримується двома мотузками AB і CD, розташованими у вертикальній площині. Мотузка CD нахилена до горизонту під кутом φ, а мотузка *AB* – під кутом ψ. Визначити максимальну вагу P кулі, утримуваної цими мотузками, якщо припустимий натяг мотузків T рівний Q.



Задача 30. Катер, швидкість якого відносно води дорівнює 25 км/год, рухається від своєї стоянки по прямолінійній ділянці ріки проти течії до пункту А протягом 3 год. Швидкість течії постійна і дорівнює 5 км/год. В пункті А катер зробив зупинку на 2 год і вирушив у зворотному напрямку. Через 1 год після відправлення з пункту А вийшов з ладу мотор. На усунення неполадок екіпажу знадобилось 2 год, після чого катер вирушив до своєї стоянки. Визначити скільки часу витратив катер на весь рейс.

3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Поділ відрізка в заданому відношенні. Якщо точка $M(x,y)$ ділить відрізок M_1M_2, де $M_1(x_1,\,y_1),\ M_2(x_2,\,y_2)$ у відношенні $\frac{M_1M}{M\,M_2}=\lambda$, то координати т. M визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda\,x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda\,y_2}{1+\lambda}.$$

В декартовій прямокутній системі координат Oxy на площині пряма може бути задана рівнянням одного з таких видів:

1. $Ax+By+C=0-$загальне рівняння прямої, де $\vec{n}=(A,B)-$вектор, перпендикулярний до прямої;
2. $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0-$рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0,\,y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A,B)$;
3. $y=kx+b-$рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k=tg\varphi$, де $\varphi-$ кут між прямою та додатнім напрямом осі Ox;
4. $y-y_0=k(x-x_0)-$рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0,\,y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k;
5. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}-$рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1,\,y_1),\ M_2(x_2,\,y_2)$;
6. $\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}-$канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0,\,y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s}=(\ell,m)$;
7. $\begin{cases} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+mt \end{cases},\quad t\in(-\infty;+\infty)-$ параметричні рівняння прямої;
8. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-$рівняння прямої у відрізках, де $(a,\,0)$ і $(0,\,b)-$ точки перетину прямої з осями координат;
9. $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0-$нормальне рівняння прямої, в якому $p>0-$ довжина перпендикуляра до прямої, опущеного з початку координат; $\alpha-$ кут між цим перпендикуляром і віссю Ox.

Щоб одержати рівняння (9) з рівняння (1), треба поділити рівняння (1) на $\pm\sqrt{A^2+B^2}$, вибравши знак, протилежний знаку C.

Відстань d від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої (1) або (9) знаходиться за формулою:

$$d=\frac{|A\,x_0+B\,y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|.$$

Якщо дві прямі задані рівнянням з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2, то кут φ між ними можна знайти за формулою:

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|. \tag{1}$$

З формули (1) випливає **умова паралельності двох прямих:** $k_1 = k_2$ **і умова перпендикулярності** $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Площина в просторі. В прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ в просторі площина може бути задана рівнянням одного із наступних видів:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ - загальне рівняння площини, де $\vec{n} = (A, B, C)$ - вектор, перпендикулярний до площини;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ - рівняння площини у відрізках, де $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ - точки перетину площини з осями координат;

4) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ - нормальне рівняння площини, де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, направленого з початку координат в сторону площини; $p > 0$ - відстань від початку координат до площини.

Рівняння (1) зводиться до рівняння (4) шляхом ділення на $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, вибравши знак протилежний знаку D.

Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини (1) або (4) знаходиться за формулою:

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Умови паралельності і перпендикулярності двох площин $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$: $(\parallel): \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$; $(\perp): A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ точки, які не лежать на одній прямій, то рівняння площини, що проходить через ці точки має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пряма в просторі. Пряма в просторі може бути задана одним із наступних рівнянь:

1) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - загальне рівняння прямої як лінії перетину двох площин, де вектори $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ - неколінеарні;

2) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ - канонічні рівняння прямої, де $\vec{s} = (l, m, n)$ - напрямний вектор прямої, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка на прямій;

3) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ - рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

4) $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$ - параметричні рівняння прямої.

Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих, заданих рівнянням виду (2):

$$(\text{II}) \ \frac{l_2}{l_1}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}; \qquad (\perp) \ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Пряма і площина в просторі. Кут між прямою і площиною в просторі вимірюється кутом між прямою та її проекцією на площину. Якщо пряма задана канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

а площина – загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, то цей кут φ визначається за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Звідси випливає умова паралельності прямої і площини:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Криві другого порядку. Рівняння кривої другого порядку на площині в прямокутній декартовій системі координат Oxy має вигляд:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Bx + Ey + F = 0 \ ,$$

де A, B, C, D, E, F - сталі. Якщо крива невироджена (порожня множина, точка, пряма, пара прямих), то для неї знайдеться така прямокутна декартова система координат, в якій рівняння кривої набуває одного з наступних видів:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a \ge b > 0)$$ - **еліпс;**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a, b > 0)$$ - **гіпербола;**

$$y^2 = 2px \ (p > 0)$$ - **парабола.**

Дані рівняння називаються **канонічними.**

Для знаходження канонічного рівняння кривої другого порядку, заданої загальним рівнянням, використовується паралельне перенесення осей координат в деякому напрямку і поворот системи координат на деякий кут.

Якщо точка M має координати (x, y) в системі координат Oxy, а нова система $O'x'y'$ одержана перенесенням початку $O(0,0)$ старої системи в точку $O_1(x_0, y_0)$, то нові координати (x', y') точки M пов'язані зі старими формулами

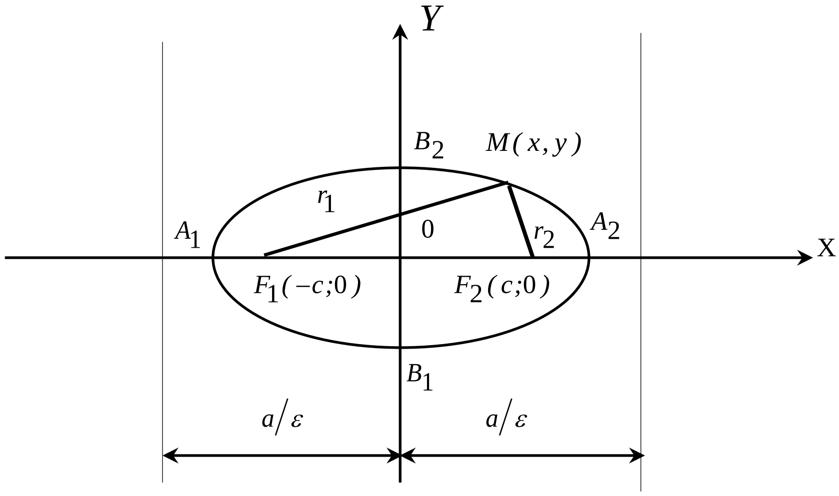
$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}. \tag{2}$$

ЕЛІПС.

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох заданих точок F_1 та F_2, що називаються фокусами, є величина стала (більша, ніж віддаль між фокусами).

Позначимо цю сталу величину через $2a$; віддаль між фокусами через $2c$; тоді $2a > 2c$, отже $a > c$.

Виберемо систему координат наступним чином: вісь абсцис проведемо через фокуси, а початок координат візьмемо в середині відрізка F_1F_2.



$OB_1 = OB_2 = b;\quad OA_1 = OA_2 = a;\quad OF_1 = OF_2 = c.$

В цій системі координати фокусів будуть такі $F_1(-c;\,0)$, $F_2(c;\,0)$. Віддалі довільної точки $M(x,y)$ еліпса до фокусів називають **фокальними радіусами** і позначають:

$$\left|\overrightarrow{MF_1}\right| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ; \qquad \left|\overrightarrow{MF_2}\right| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

За означенням еліпса $r_1 + r_2 = 2a$, тому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Це і є рівняння еліпса, після спрощення якого одержимо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

де $b^2 = a^2 - c^2$ $(a > b)$ у випадку, якщо фокуси лежать на осі OX, і $b^2 = c^2 - a^2$ $(b > a)$ у випадку, якщо фокуси лежать на осі OY.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається **великою віссю еліпса**, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ називається **малою віссю еліпса**.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називаються **вершинами еліпса**.

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної віддалі $2c$ до довжини великої осі еліпса $2a$. Згідно означення: $\varepsilon = c/a$, враховуючи, що $c < a$, $\varepsilon < 1$.

Директрисами еліпса (3) називаються прямі, паралельні до малої осі еліпса і розміщені симетрично відносно неї на віддалі, рівній a/ε, тому рівняння директрис мають вигляд: $x = \pm a/\varepsilon \quad \left(\varepsilon = c/a\right).$

Якщо в рівнянні еліпса $b > a$, то рівняння директрис будуть $y = \pm b/\varepsilon \quad \left(\varepsilon = c/b\right).$

Якщо $a = b$, то рівняння (3) набуде вигляду $x^2 + y^2 = a^2$, що визначає коло з центром в початку координат із радіусом a.

Якщо центр еліпса (3) знаходиться в точці $O_1(x_1, y_1)$, а осі симетрії паралельні осям координат, то його рівняння має вигляд:

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Якщо в рівнянні (4) $a = b$, то одержимо рівняння:

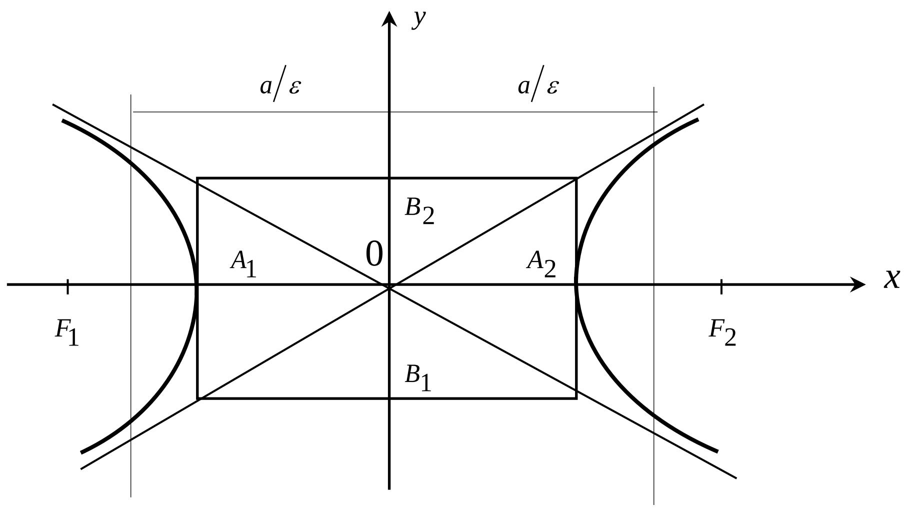
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = a^2, \tag{5}$$

яке визначає рівняння кола з центром у точці (x_1, y_1) і радіусом, рівним a.

ГІПЕРБОЛА.

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней яких від двох заданих точок F_1 та F_2, що називаються фокусами, є величина стала, (менша за віддаль між фокусами).

Позначимо цю сталу величину через $2a$; віддаль між фокусами $F_1F_2 = 2c$. Причому $2c > 2a$, $c > a$. Розташуємо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокуси, а початок координат знаходився в середині відрізка F_1F_2.



$OB_1 = OB_2 = b;\quad OF_1 = OF_2 = c;\quad OA_1 = OA_2 = a.$

В цьому випадку фокуси будуть мати координати: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Віддалі довільної точки $M(x, y)$ гіперболи до фокусів, називаються її **фокальними радіусами** і позначаються:

$$\left|\overrightarrow{MF_1}\right| = r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}\,;\quad \left|\overrightarrow{MF_2}\right| = r_2\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\,.$$

За означенням гіперболи, маємо: $r_1 - r_2 = \pm 2a$, тому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

це і є рівняння гіперболи, після спрощення якого одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad (6)$$

де $b^2 = c^2 - a^2 \ (c > a)$.

Відрізок A_1A_2 називається **дійсною віссю** гіперболи, а відрізок B_1B_2 - **уявною віссю** гіперболи.

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення фокусної віддалі гіперболи $2c$ до довжини дійсної осі $2a$: $\varepsilon = {}^{c}\!/_{a}$, тому що $c > a$, $\varepsilon > 1$.

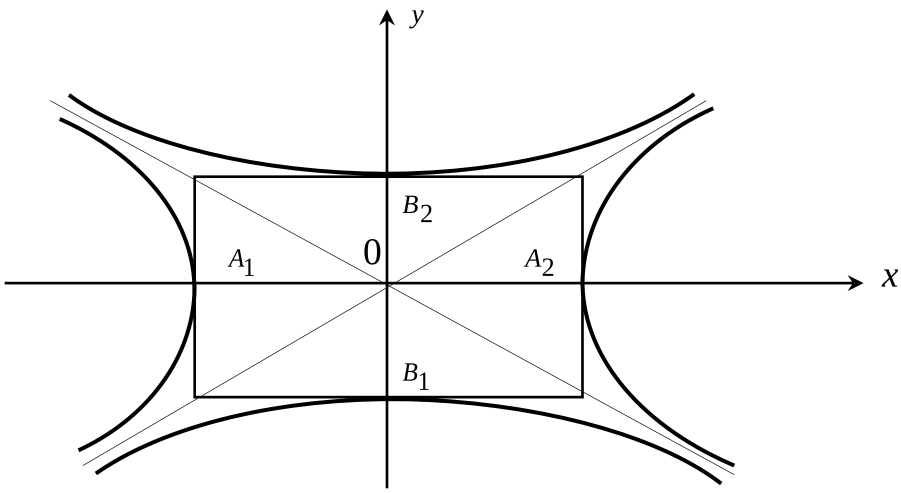
Директрисами гіперболи називаються дві прямі паралельні до уявної осі гіперболи і розміщені симетрично відносно неї на віддалі ${}^{a}\!/_{\varepsilon}$, тому $x = \pm {}^{a}\!/_{\varepsilon}$ - рівняння директрис гіперболи.

Асимптотами гіперболи називаються прямі $y = \pm \dfrac{b}{a} x$, до яких наближаються вітки гіперболи, коли $|x|$ необмежено зростає. Асимптоти гіперболи направлені по діагоналях прямокутника, побудованого на дійсній та уявній осях гіперболи.

Дві гіперболи, у яких дійсна вісь одної є уявною віссю другої і навпаки, називаються **спряженими.** Рівняння спряжених гіпербол в одній і тій самій системі координат мають вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,; \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Спряжені гіперболи мають спільний центр і спільні асимптоти.



$$A_1O = A_2O = a; \quad B_1O = B_2O = b.$$

Для гіперболи $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, фокуси якої знаходяться на осі ординат рівняння директрис мають вигляд: $y=\pm b/\varepsilon$, де $\varepsilon = c/b$.

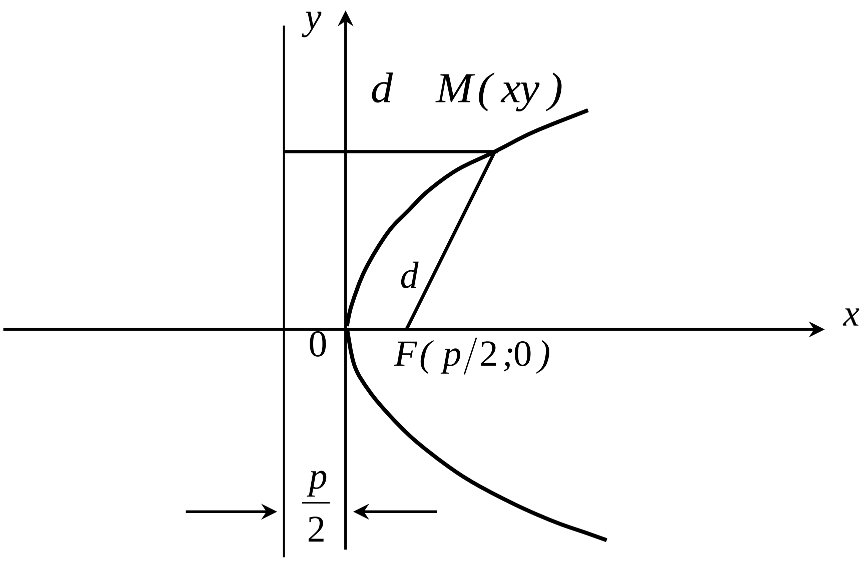
ПАРАБОЛА.

Параболою називається геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки, яка називається **фокусом** і від заданої прямої, яка називається **директрисою** параболи.

Вибираємо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокус перпендикулярно до директриси, а за початок координат візьмемо середину відрізка, який лежить між фокусом і директрисою, тоді рівняння параболи в цій системі координат буде мати вигляд:

$$y^2 = 2px, \tag{7}$$

де параметр p, як відстань від фокуса до директриси, є величина додатна.



Рівняння директриси $x=-p/2$.

Якщо вітки параболи напрямлені вліво, то її рівняння буде:

$$y^2 = -2px. \tag{8}$$

Рівняння директриси у цьому випадку: $x = p/2$.

Віссю симетрії парабол (7) і (8) є вісь абсцис.

Якщо віссю симетрії параболи є вісь Oy, то її рівняння буде

$$x^2 = \pm 2py, \tag{9}$$

де знак “-“ вказує на те, що вітки параболи напрямлені вниз.

Рівняння директрис будуть мати відповідно вигляд: $y=\pm p/2$.

Якщо вершина параболи знаходиться в точці $O_1(x_1, y_1)$, то рівняння параболи набуде вигляду: $(x-x_1)^2 = \pm 2p(y-y_1)$ - у випадку, коли вісь симетрії паралельна осі Oy і $\left(y-y_1\right)^2=\pm 2p\left(x-x_1\right)$ - у випадку, коли вісь симетрії паралельна осі Ox.

Задача 3.1. Центр ваги однорідного стержня знаходиться в т. $M(1;-3)$, одним з його кінців у т. $A(2;-1)$. Знайти координати т. B, яка є другим кінцем цього стержня.

Розв'язання. Оскільки стержень однорідний, то $x_М=\dfrac{x_A+x_B}{2}$;

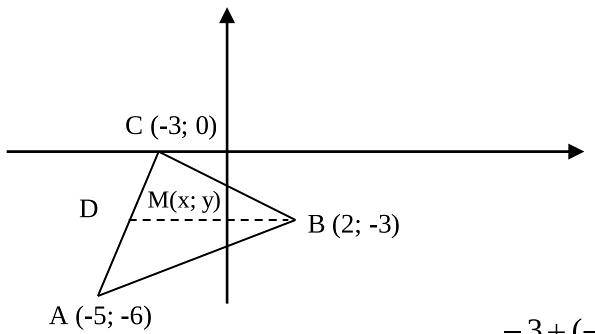
$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2};\;\; 1=\frac{2+x_B}{2};\;\; 2=2+x_B,\;\; x_B=0;\;\; -3=\frac{-1+y_B}{2},\;\; -6=-1+y_B,\;\; y_B=-5;$$

отже $B(0;-5)$.

Відповідь: $B(0;-5)$.

Задача 3.2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(-5;-6)$, $B(2;-3)$, $C(-3;0)$. Знайти координати її центру ваги (центр ваги трикутника знаходиться в точці перетину медіан).

Розв'язання. Враховуючи те, що медіани трикутника діляться в точці перетину у відношенні $2:1$ (рахуючи від вершини), знайдемо координати т. М, яка є центром ваги трикутника:



$$\lambda=\frac{|BM|}{|MD|}=\frac{2}{1}=2.$$

$$x_м=\frac{x_B+\lambda x_D}{1+\lambda},\quad y_м=\frac{y_B+\lambda y_D}{1+\lambda}.$$

За властивістю медіани маємо:

$$x_D=\frac{x_C+x_A}{2},\quad y_D=\frac{y_C+y_A}{2}.$$

$$x_D=\frac{-3+(-5)}{2}=-4;\quad y_D=\frac{0+(-6)}{2}=-3;\quad D(-4;-3).$$

$$x_M=\frac{2+2\cdot(-4)}{1+2}=-2;\quad y_M=\frac{-3+2\cdot(-3)}{1+2}=-3.$$

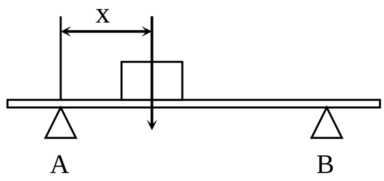
Отже, центр ваги трикутної пластинки знаходиться в т. $M(-2;-3)$.

Відповідь: Центр ваги трикутної пластинки знаходиться в т. $M(-2;-3)$.

Задача 3.3. Горизонтальна балка довжиною 3 м і масою 80 кг вільно лежить своїми кінцями на двох рухомих опорах A і B. На якій відстані від кінця A потрібно розмістити вантаж масою 200 кг, щоб тиск на опору B був рівним 1100 Н ?

Розв'язання. Вага балки масою 80 кг складає 784 Н. На опору B діє половина ваги балки, тобто 392 Н. Вантаж масою 200 кг діє на балку з силою 1960 Н. На опору B повинно ще діяти 1100 – 392 =708 Н, а на опору A – решта 1960 –708 =1252 Н.

Приймемо т. A за початок координат і розділимо відрізок AB у відношенні $\lambda = \dfrac{708}{1252} \approx 0{,}56;$



$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, де $x_1 = 0,\ x_2 = 3$ $x = \dfrac{0 + 0{,}56 \cdot 3}{1 + 0{,}56} \approx 1{,}07$ (м).

Отже, щоб тиск на опору В був рівним 1100 Н, необхідно вантаж масою в 200 кг розмістити на відстані 1,07 м від опори A.

Відповідь: Щоб тиск на опору В був рівним 1100 Н, необхідно вантаж масою в 200 кг розмістити на відстані 1,07 м від опори A.

Задача 3.4. Між пунктами А і В по прямій проходить автострада. На плані місцевості ці пункти мають координати $(13,\ 14)$ (розміри в кілометрах). Об’єкт $C(7,\ 7)$ в тій же системі треба з’єднати найкоротшою дорогою з цією автострадою. Знайти на автостраді точку входження в неї дороги і довжину дороги.

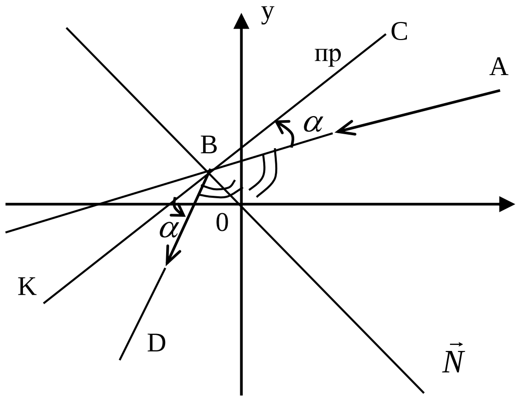
Розв’язання. Найкоротша дорога від об’єкта С до автостради буде проходити по перпендикуляру, опущеному з точки С на пряму АВ. Рівняння прямої АВ знаходимо як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\dfrac{x-1}{13-1} = \dfrac{y-5}{14-5}$, або $3x - 4y + 17 = 0$. Використовуючи умови перпендикулярності двох прямих $(k_1\ k_2 = -1)$ одержимо $k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}};\ k_{AB} = \dfrac{3}{4};\ k_{CD} = -\dfrac{4}{3}$ рівняння перпендикуляра CD до прямої AB знаходимо у вигляді $y - y_C = k_{CD}(x - x_C);$ $y - 7 = -\dfrac{4}{3}(x-7);\ 4x + 3y - 49 = 0$. Розв’язуючи систему рівнянь $\begin{cases} 3x - 4y + 17 = 0 \\ 4x + 3y - 49 = 0 \end{cases}$ знайдемо координати точки входження дороги на автостраду. Цією точкою є точка $D(5{,}8;\ 8{,}6)$. Довжина дороги $L = |CD| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$; $L = \sqrt{(5{,}8-7)^2 + (8{,}6-7)^2} = 2$ (км).

Відповідь: Довжина дороги $L = |CD| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$; $L = \sqrt{(5{,}8-7)^2 + (8{,}6-7)^2} = 2$ (км).

Задача 3.5. Промінь світла напрямлений по прямій $x - 2y + 5 = 0$. Дійшовши до прямої $3x - 2y + 7 = 0$, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.

Розв’язання. Знайдемо точку перетину прямої на якій лежить падаючий промінь і заданої прямої $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 3x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$ віднімемо від другого рівняння системи перше, одержимо $2x + 2 = 0,\ x = -1;$ підставимо в перше рівняння $2y = x + 5,\ \ y = \dfrac{-1+5}{2},\ y = 2$; т. $B(-1;\ 2)$.

Враховуємо, що кут падіння дорівнює куту відбивання $\angle ABN = \angle NBD$, звідки маємо:



$$\angle ABC = \angle KBD = \alpha; \quad tg\angle ABC = \frac{K_{BC} - K_{AB}}{1 + K_{AB} \cdot K_{BC}}; \quad tg\alpha = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4}{7}.$$

$$K_{BC} = \frac{3}{2}\left(K = -\frac{A}{B}\right); \quad K_{AB} = \frac{1}{2}. \ \angle KBD = \alpha; \ tg\angle\ KBD = \frac{K_{BD} - K_{BK}}{1 + K_{BK} \cdot K_{BD}}; \quad \left(K_{BK} = K_{BC} = \frac{3}{2}\right);$$

$$tg\angle KBD = \frac{K_{BD} - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}K_{BD}}; \quad tg\angle KBD = tg\angle ABC; \quad \frac{K_{BD} - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}K_{BD} = \frac{4}{7}}; \ 7K_{BD} - \frac{21}{2} = 4 + 6K_{BD};$$

$$K_{BD} = 4 + \frac{21}{2}; \quad K_{BD} = \frac{29}{2}.$$

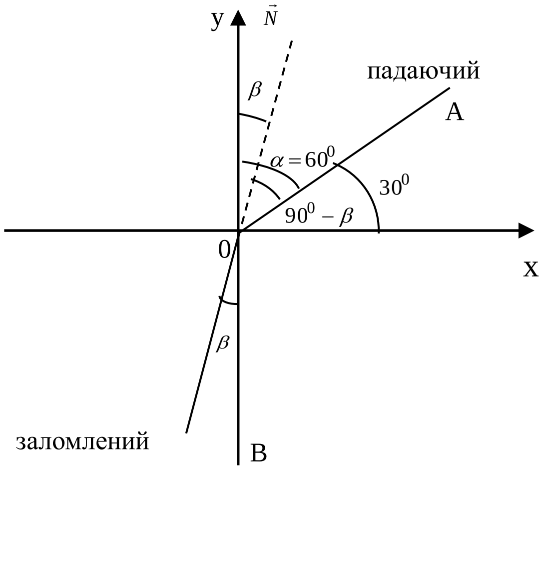
Рівняння відбитого променя знаходимо у вигляді $y - y_0 = k(x - x_0)$, де (x_0, y_0)– координати т. $B(-1;2)$:

$$K = K_{BD} = \frac{29}{2}; \quad y - 2 = \frac{29}{2}\ (x+1); \qquad 2y - 4 = 29x + 29; \quad 29x - 2y + 33 = 0$$ – це і є рівняння відбитого променя.

Відповідь: $2y - 4 = 29x + 29$; $29x - 2y + 33 = 0$ – рівняння відбитого променя.

Задача 3.6. Світловий промінь падає на поверхню води. Коефіцієнт заломлення води $4/3$. Кут падіння дорівнює 60^0. Приймаючи точку падіння за початок координат, а нормаль у ній до поверхні води за вісь ординат, знайти рівняння падаючого і заломленого променів.

Розв'язання. Нехай OA– падаючий промінь, а OB– заломлений промінь, за законом заломлення $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \mu$, де α– кут падіння, β– кут заломлення. Початок координат виберемо в точці падіння променя, вісь OX направимо по поверхні води.



За умовою задачі кут падіння $\alpha = 60^0$ (це кут між падаючим променем і нормаллю проведеною до поверхні води в точці падіння):

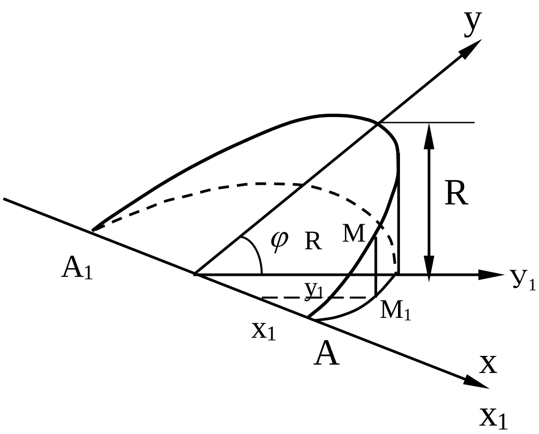
$$\frac{\sin 60^0}{\sin\beta}=\frac{4}{3};\ \sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\beta=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 4};\ \sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{8};\ \cos\beta=\pm\sqrt{1-\sin^2\beta};$$

оскільки β – гострий кут, то $\cos\beta=\sqrt{1-\frac{27}{64}}$; $\cos\beta=\sqrt{\frac{64-27}{64}}$; $\cos\beta=\frac{\sqrt{37}}{8}$.

Рівняння падаючого променя знаходимо у вигляді $y=kx$, де $k=tg\,30^0$, $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ – рівняння падаючого променя. Рівняння заломленого променя також знаходимо у вигляді $y=kx$, де $k=tg\left(90^0-\beta\right)$; $k=ctg\beta$; $k=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$; $k=\frac{\sqrt{37}}{8}\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}}=1{,}17$; $y=1{,}17x$ – рівняння заломленого променя.

Відповідь: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ – рівняння падаючого променя, $y=1{,}17x$ – рівняння заломленого променя.

Задача 3.7. Потрібно з’єднати під прямим кутом дві циліндричні труби радіуса R (см). Визначити вигляд кривої в площині по розрізу, щоб при зварці отримати потрібне коліно.



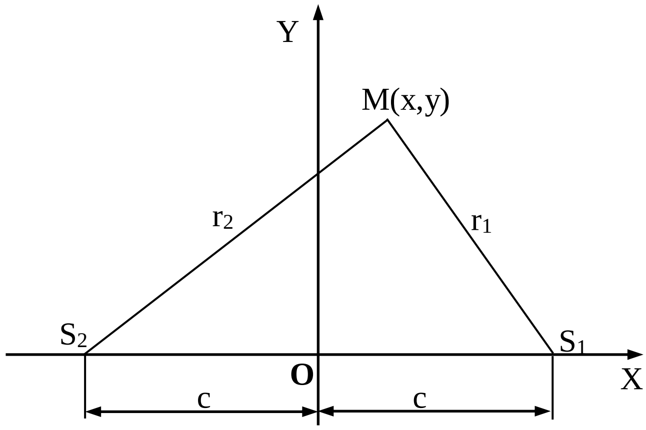
Розв’язання.

Скористаємося прийомом, який застосовують при виготовленні колінчатих труб.

Накреслимо півколо радіуса R і приймемо його діаметр за вісь абсцис Ox_1, а центр O – за початок координат. На відрізку, рівному випрямленій довжині півкола, побудуємо (на окремому листку) півхвилю синусоїди з амплітудою R і півперіодом πR. Виріжемо фігуру, обмежену синусоїдою і випрямленим півколом, і сумістимо основи цієї фігури, поставивши її вертикально, з півколом. Синусоїда займе положення $AMBA_1$.

Щоб скласти рівняння лінії $AMBA_1$, приймемо площину, в якій лежить ця крива, за нову координатну площину XOY. Систему координат XOY одержуємо з раніше введеної системи X_1OY_1 поворотом її на кут $\varphi=45^0$, при цьому $x=x_1$, $y=y_1\big/\cos 45^0=\frac{y_1}{\sqrt{2}/2}=\sqrt{2}\,y_1$, звідки $x=x_1$, $y_1=\frac{y}{\sqrt{2}}$. Підставляючи значення x_1 і y_1 в рівняння кола $x_1^2+y_1^2=R^2$, $x^2+\frac{y^2}{2}=R^2$, яке є шуканим рівнянням лінії $AMBA_1$ в площині за розрізом. Звівши його до канонічного виду $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{2R^2}=1$, одержимо рівняння еліпса.

Задача 3.8. В площині маємо два джерела світла неоднакової сили. Визначити геометричне місце точок цієї площини, рівноосвітлених обома джерелами.



Розв'язання. Із фізики відомо, що $\frac{\alpha}{r_1^2}=\frac{\beta}{r_2^2}$, де α і β - сили джерел світла, а r_1, r_2-їх відстань до освітленої точки.

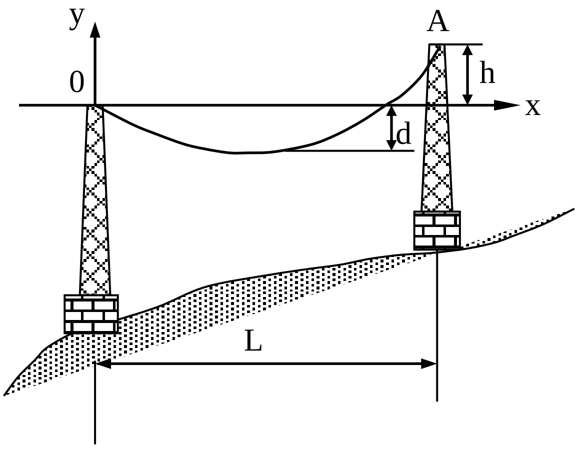
Маємо: $\alpha r_2^2=\beta r_1^2;\quad \alpha\left[(x+c)^2+y^2\right]=\beta\left[(x-c)^2+y^2\right]$. Шукане геометричне місце точок – коло з центром $\left(c\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta};0\right)$ і радіусом $\dfrac{2c\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta}$, де $2c-$відстань між джерелами світла.

Відповідь: Коло з центром $\left(c\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta};0\right)$ і радіусом $\dfrac{2c\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta}$.

Задача 3.9. Вважаючи, що натягнутий між точками O і A провід високовольтної лінії має форму дуги параболи, знайти за даними малюнка рівняння цієї параболи, при $L=100$м, $h=24$м і $d=1$м.

Розв'язання. У вибраній на малюнку системі координат натягнутий провід має форму дуги параболи з віссю симетрії, паралельною осі Oy, і зміщеною відносно початку координат вершиною. Рівняння такої параболи має вигляд: $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$, (1), де $x_0,\, y_0$ – координати вершини, $p-$параметр параболи. Використаємо умову того, що парабола проходить через т. $O(0;0)$ і $A(L,h)$ і враховуючи, що $y_0=-d$, одержимо систему рівнянь відносно x_0 і p:

$$\begin{cases} x_0^2=2pd, \\ (L-x_0)^2=2p(h+d). \end{cases}$$



З першого рівняння системи знайдемо $p=\dfrac{x_0^2}{2d}$ і підставимо в друге рівняння:

$$(L-x_0)^2=2\frac{x_0^2}{2d}(h+d),$$

$$(L-x_0)^2=\frac{x_0^2(h+d)}{d},$$

$$L-x_0=x_0\sqrt{\frac{h+d}{d}},$$

$$L-x_0=x_0\frac{\sqrt{h+d}}{\sqrt{d}},\quad x_0\left(\frac{\sqrt{h+d}+\sqrt{d}}{\sqrt{d}}\right)=L,$$

$$x_0=\frac{L\sqrt{d}}{\sqrt{h+d}+\sqrt{d}}=\frac{L\sqrt{d}\left(\sqrt{h+d}-\sqrt{d}\right)}{\left(\sqrt{h+d}+\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{h+d}-\sqrt{d}\right)}=\frac{L\sqrt{d}\left(\sqrt{h+d}-\sqrt{d}\right)}{h+d-d}=\frac{L}{h}\left(\sqrt{hd+d^2}-d\right),$$

$$x_0=\frac{L}{h}\ \left(\sqrt{h\ \ d+d^2}-d\right),\quad p=\frac{x_0^2}{2d}=\frac{L^2\ \left(\sqrt{h\ \ d+d^2}-d\right)^2}{2h^2d},\quad p=\frac{L^2}{2h^2\ \ d}\ \left(\sqrt{h\ \ d+d^2}-d\right)^2.$$

Підставляючи значення $x_0,\,y_0$ і p в рівняння (1), одержимо шукане рівняння параболи:

$$\left(x-\frac{L}{h}\sqrt{d^2+hd}+\frac{Ld}{h}\right)^2=\frac{L^2}{h^2d}\left(\sqrt{d^2+hd}-d\right)^2(y+d) \tag{2}$$

При $L=100$м, $h=24$м, $d=1$м – рівняння (2) набуде вигляду $\left(x-\frac{50}{3}\right)^2=\frac{2500}{9}\,(y+1)$, або $y=0{,}0036\,x^2-0{,}12\,x$ - це і є рівняння шуканої параболи.

Відповідь: $y=0{,}0036\,x^2-0{,}12\,x$ - рівняння шуканої параболи.

Задача 3.10. Матеріальна точка M рухалася під дією деякої сили по колу $x^2+y^2-10x+6y+9=0$ проти годинникової стрілки. Дія сили припинилася в момент, коли положення точки визначалося координатами $(2;\,1)$. Скласти рівняння подальшої траєкторії руху т. M.

Розв'язання. Починаючи з моменту, коли дія сили на точку M припинилася, її рух буде відбуватися по прямій, дотичній до заданого кола в точці $(2;\,1)$. Зведемо рівняння кола до канонічного вигляду:

$$x^2+y^2-10x+6y+9=0\,;$$
$$x^2-10x+y^2+6y+9=0\,;$$
$$x^2-10x+25-25+y^2+6y+9=0\,;$$
$$(x-5)^2+(y+3)^2=25\,.$$

Його центр знаходиться в т. $(5;\,-3)$. Знайдемо рівняння нормалі CM як рівняння прямої, яка проходить через дві точки $C(5;\,-3)$ і $M(2;\,1)$.

$$\frac{x-x_c}{x_м-x_c}=\frac{y-y_c}{y_м-y_c};\qquad \frac{x-5}{2-5}=\frac{y+3}{1+3};\qquad \frac{x-5}{-3}-\frac{y+3}{4}\,.$$
$$4x-20=-3y-9\,;$$
$$4x+3y-20+9=0\,;$$
$$4x+3y-11=0\,;$$
$$K_н=-\frac{4}{3}.$$

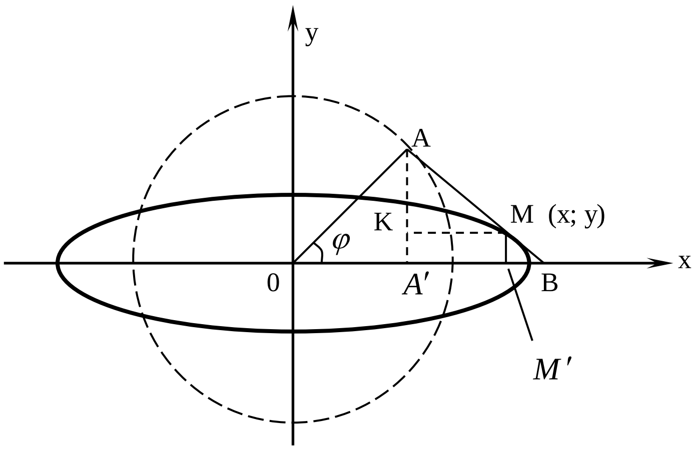
Оскільки дотична перпендикулярна до нормалі, то $K_{дот}=-\frac{1}{K_н};\quad K_{дот}=\frac{3}{4}.$

Рівняння дотичної прямої до заданого кола має вигляд $y-y_м=K_{дот}(x-x_м)$;

$y-1=\frac{3}{4}\,(x-2)$; $4y-4=3x-6$; $3x-4y-2=0$ - це і є рівняння траєкторії т. M з моменту припинення дії сили.

Відповідь: $3x-4y-2=0$ - рівняння траєкторії т. M з моменту припинення дії сили.

Задача 3.11. Кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 10\ рад/с$ і приводить в рух повзун B за допомогою шатуна AB, причому $OA = AB = 80.$ Скласти рівняння траєкторії середньої точки M шатуна і зобразити цю траєкторію на малюнку.



Розв'язання. З малюнку знаходимо, що $x = OM' = OA' + A'M'$, з $\Delta OA'A$ маємо $\dfrac{OA'}{OA} = \cos\varphi$, $OA' = OA\cos\varphi$, за умовою $OA = AB$ $(AM = MB, <ABO =< AMK = \varphi)$.

З ΔAKM: $\dfrac{KM}{AM} = \cos\varphi,\quad KM = AM\cos\varphi,\quad KM = A'M',\quad A'M' = AM\cos\varphi,\quad AM = \dfrac{1}{2}OA,$

$A'M' = \dfrac{1}{2}OA\cos\varphi$, тому $x = OA' + A'M'$; $\quad x = OA\cos\varphi + \dfrac{1}{2}OA\cos\varphi$;

$$x = \frac{3}{2}OA\cos\varphi; \qquad OA = 80;$$

$$x = \frac{3}{2}\cdot 80\cos\varphi; \qquad x = 120\ \cos\varphi.$$

$$y = MM',\ з\ \Delta\ MM'B:\ \frac{MM'}{MB} = \sin\varphi;$$

$$MM' = MB\ \sin\varphi;\quad MB = \frac{1}{2}OA;\quad MM' = \frac{1}{2}OA\sin\varphi;\quad OA = 80;$$

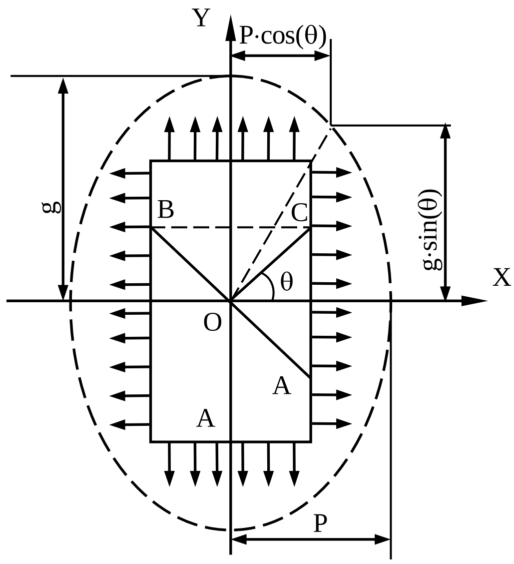
$$MM' = \frac{1}{2}\cdot 80\sin\varphi = 40\sin\varphi.$$

Оскільки кутова швидкість кривошипа OA стала, то $\varphi = \omega = 10t$, а отже $x = 120\ \cos 10t,\quad y = 40\ \sin 10t,$ де t – час. Одержані рівняння є параметричними рівняннями траєкторії точки M. Виключаючи параметр t, запишемо рівняння траєкторії в канонічній формі: $\begin{cases} \dfrac{x}{120} = \cos t \\ \dfrac{y}{40} = \sin t \end{cases}$. Піднесемо обидві частини цих рівностей до квадрату і додамо: $\dfrac{x^2}{120^2} + \dfrac{y^2}{40^2} = 1$. Це є еліпс з півосями $a = 120$ см, $b = 40$ см, який зображений на даному малюнку.

Відповідь: Еліпс з півосями $a = 120$ см, $b = 40$ см.

Задача 3.12. Прямокутний брусок піддається розтягу у двох взаємно перпендикулярних напрямах. Напруження на лівій і правій вертикальних гранях позначено через P, а на нижній і верхній горизонтальних гранях – через q. Визначити напруження в довільному похилому перерізі AB, перпендикуляр до якого утворює кут θ з віссю OX.

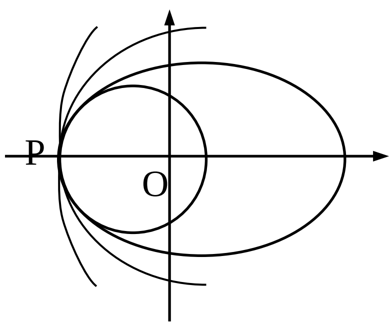
Розв'язання. Дія розтягуючих зусиль на правій грані відповідає частині АС правої грані. Загальне розтягуюче зусилля рівне $FP cos\theta$, де $F cos\theta-$ площа, яка відповідає AC; горизонтальна складова напруження буде $P cos\theta$. Аналогічно можна знайти вертикальну складову: $g\, sin\theta$. Розглядаючи їх як проекції векторів на осі координат і додаючи за правилом паралелограма, одержимо вектор, кінець якого буде мати координати: $x = P cos\theta,\;\; y = g\, sin\theta$.



Відповідь: Геометричним місцем кінців цього вектора буде еліпс $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{g^2}=1$, він називається еліпсом напруження і характеризує напружений стан навколо точки O.

Задача 3.13. Використовуючи закон збереження енергії руху тіла під дією силового центру, визначити умови руху тіла по еліптичній, параболічній та гіперболічній орбітах.

Розв'язання. З теорії гравітації відомо, що траєкторією рухомого тіла є еліпс з фокусом у точці O, якщо початкова швидкість руху задовольняє умови: $\sqrt{\frac{fM}{r}} < \vartheta_0 < \sqrt{\frac{2l\,M}{r}}$, де f – гравітаційна стала; M – маса рухомого тіла; r – відстань між центром тіла і силовим центром O.



При $\vartheta_0 = \sqrt{\frac{f\,M}{r}}$ (перша космічна швидкість) крива стає колом; при $\vartheta_0 = \sqrt{\frac{2\,fM}{r}}$ (друга космічна швидкість) крива перетворюється в параболу, а при $\vartheta_0 > \sqrt{\frac{2\,fM}{r}}$ – в гіперболу.

Потенціальна енергія тіла P з масою m, яке знаходиться на відстані r від притягуючого за законом Ньютона центра O, рівна $E_n = -\frac{f\,Mm}{r}$. Кінетична енергія тіла P, яка рухається зі швидкістю ϑ, рівна $E_V = \frac{m\vartheta^2}{2}$. Повна енергія

$E = \frac{m}{2}\left(\vartheta^2 - \frac{2\,f\,M}{r}\right)$, звідки $\vartheta^2 = \frac{2\,fM}{r} + h$, де $h -$ стала для даної орбіти величина. Для еліптичного руху швидкість у початковий момент порівняно мала і $h < 0$. Для параболічного руху, тобто при умові $\vartheta_0^2 = \frac{2\,fM}{r}$, $h = 0$. Для руху по гіперболі $h > 0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Дано вершини однорідної трикутної пластинки A, B, C. Знайти координати її центру ваги.

1. $A\ (-3;\ 5)$, $B\ (6;\ 4)$, $C\ (3;\ -3)$;
2. $A\ (-4;\ -3)$, $B\ (1;\ 4)$, $C\ (0;\ 5)$;
3. $A\ (-2;\ 3)$, $B\ (4;\ 5)$, $C\ (2;\ -4)$;
4. $A\ (5;\ 3)$, $B\ (0;\ 6)$, $C(-3;\ -5)$;
5. $A\ (-2;\ 4)$, $B\ (2;\ 3)$, $C\ (6;\ 8)$;
6. $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (0;\ -4)$, $C\ (3;\ 6)$;
7. $A\ (1;\ 4)$, $B\ (2;\ -3)$, $C\ (5;\ 2)$;
8. $A\ (2;\ 3)$, $B\ (4;\ -4)$, $C\ (8;\ 5)$;
9. $A\ (1;\ 5)$, $B\ (3;\ -5)$, $C\ (-4;\ 3)$;
10. $A\ (-5;\ 2)$, $B\ (3;\ -3)$, $C\ (1;\ 4)$;
11. $A\ (-6;\ 1)$, $B\ (1;\ -4)$, $C\ (2;\ 5)$;
12. $A\ (-3;\ 3)$, $B\ (2;\ -5)$, $C\ (-1;\ 5)$;
13. $A\ (2;\ 6)$, $B\ (3;\ -2)$, $C\ (6;\ 2)$;
14. $A\ (6;\ 8)$, $B\ (2;\ -1)$, $C\ (-2;\ 2)$;
15. $A\ (4;\ 2)$, $B\ (2;\ -2)$, $C\ (-8;\ 2)$;
16. $A\ (7;\ 1)$, $B\ (1;\ -3)$, $C\ (1;\ 3)$;
17. $A\ (2;\ 3)$, $B\ (3;\ -5)$, $C\ (4;\ 1)$;
18. $A\ (-7;\ 2)$, $B\ (1;\ -2)$, $C\ (3;\ 4)$;
19. $A\ (-5;\ 3)$, $B\ (0;\ -4)$, $C\ (1;\ 1)$;
20. $A\ (3;\ 5)$, $B\ (1;\ -5)$, $C\ (5;\ 1)$;
21. $A\ (1;\ -4)$, $B\ (2;\ 5)$, $C\ (5;\ -2)$;
22. $A\ (-3;\ -4)$, $B\ (1;\ 2)$, $C\ (3;\ 4)$;
23. $A\ (1;\ 4)$, $B\ (3;\ -3)$, $C\ (5;\ 2)$;
24. $A\ (2;\ 6)$, $B\ (4;\ -2)$, $C\ (6;\ 2)$;
25. $A\ (-3;\ 2)$, $B\ (1;\ -1)$, $C\ (5;\ 4)$;
26. $A\ (-4;\ 3)$, $B\ (3;\ -3)$, $C\ (2;\ 1)$;
27. $A\ (2;\ 5)$, $B\ (3;\ -4)$, $C\ (4;\ 1)$;
28. $A\ (1;\ 6)$, $B\ (2;\ -5)$, $C\ (3;\ 4)$;
29. $A\ (-5;\ 2)$, $B\ (0;\ -3)$, $C\ (1;\ 6)$;
30. $A\ (2;\ 4)$, $B\ (3;\ -1)$, $C\ (6;\ 0)$.

2. Світловий промінь, рівняння якого $y = x + 5$, падає на скляну пластинку товщиною 1см. Показник заломлення скла дорівнює 2. Знайти рівняння променя в пластинці і після виходу з неї, довжину шляху пройденого променем у середині пластинки і зміщення променя при

виході з пластинки (за вісь абсцис прийняти проекцію променя на поверхню пластинки, а за вісь ординат – нормаль до поверхні).

Відповідь: $y=\sqrt{7}(x+5)$; $y+1=x+5+\frac{1}{\sqrt{7}}$; $\sqrt{\frac{8}{7}}$; $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

3. Необхідно встановити межі ділянки землі за трьома збереженими стовпами: один – в центрі ділянки і по одному – на двох протилежних межах. Скласти рівняння прямих, які відображають межі ділянки на площині якщо на плані координати стовпів: $M(1,\ 6)$ - в центрі, $A\,(5,\ 9)$, $B\,(3,\ 0)$ - на сторонах.

Відповідь: $x+2y-23=0$, $x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$, $2x-y+14=0$.

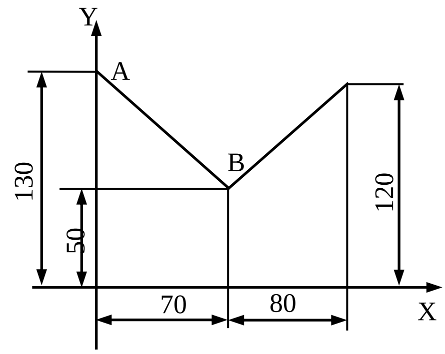
4. Між пунктами А і Б проходить шосейна дорога. На плані місцевості ці пункти мають координати $(2,\ 4)$ та $(16,\ 0)$ (розміри в км). Завод С з координатами $(10,\ 14)$ в тій же системі координат треба з'єднати найкоротшою дорогою з цим шосе. Знайти на шосе точку входження в нього дороги і довжину дороги.

Відповідь: $\left(\frac{358}{53},\ \frac{140}{53}\right)$, $L=12$ км.

5. Струмінь води витікає з конічного наконечника зі швидкістю ϑ під кутом α до горизонту. Скласти рівняння струменя, якщо початок системи координат розташовано в початку витікання струменя, а напрямок осі OX горизонтально.

Відповідь: $y=x\ tg\alpha-\frac{gx^2}{2\vartheta\ \cos^2\alpha}$.

6. Перевірити, чи перпендикулярні грані AB і BC показані на малюнку, якщо він правильно виконаний за вказаними розмірами деталі.



7. На плані гористої місцевості задано дві точки $A(2,\ 2)$ і $B(16,\ 4)$. Через ці точки проходять дві прямі, які перетинаються в точці $D(10,\ 10)$. Точки А і В потрібно з'єднати тунелем так, щоб він складався з дуги кола, яке проходить через точку $M\,(8,\ 6)$ і відрізків прямих як дотичних до цього кола. Визначити рівняння кола.

Відповідь: $\left(x-10^2\right)+\left(y-2-2\sqrt{6}\right)^2=2\left(4-\sqrt{6}\right)^2$.

8. Параболічне дзеркало рефлектора Сімеїзської обсерваторії (в Криму) має діаметр 1,02 м і відстань від фокуса до вершини 5 м. Знайти глибину параболічної виїмки, яку зроблено при виготовленні дзеркала з плоского скла.

Відповідь: 13 мм.

9. Сталевий міст має вигляд параболічної арки. Проліт арки – 29,9 м, висота – 67 м. Скласти рівняння арки, прийнявши за вісь OX дотичну в вершині, а за вісь OY – вісь симетрії параболи. Побудувати фокус і директрису параболи.
Відповідь: Рівняння параболи $x^2 = 3{,}2y$, рівняння директриси $y = -0{,}4$ м.

10. Стержень довжиною 60 см і масою 5 кг підвішено за кінці на двох шнурах. Один з цих шнурів не може витримати натягу, який перевищує 200 Н. На якій відстані від відповідного кінця стержня можна прикріпити до нього вантаж в 100 кг.
Відповідь: На відстані не ближче, ніж 49,25 см від кінця більш слабкого шнура.

11. Матеріальна точка M рухалась під дією деякої сили по колу $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$. Дія сили припинилась в момент, коли положення точки визначалось координатами $(2, 1)$. Визначити подальшу траєкторію руху точки.
Відповідь: $3x - 4y - 2 = 0$.

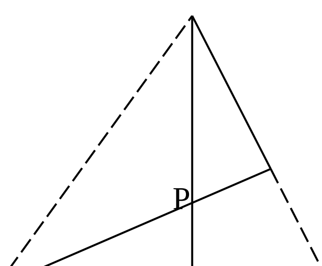
12. Точка M рухалась по колу $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 28 = 0$. Потім зірвалася з неї і при подальшому вільному русі перетнула вісь OY в точці $A(0, 9)$. Визначити точку кола, з якої зірвалась точка M.
Відповідь: $(3, 3)$.

13. Хлопчик кидає м'яч нагору під кутом 70° до горизонту і попадає у відкрите вікно, що розташоване на 9,6 *м* вище його плеча. М'яч влітає у вікно горизонтально. Необхідно визначити з якою швидкістю вилетів м'яч з руки хлопчика та траєкторію м'яча?

14. На плані гористої місцевості задано дві точки: $A(2, 2)$ і $B(16, 4)$. Через ці точки проходить дві прямі, які перетинаються в т. $D(10, 10)$. Точки A і B треба з'єднати тунелем так, щоб він складався з дуги кола, яке проходить через т. $M(8, 6)$, і відрізків прямих як дотичних до цього кола. Визначити рівняння кола.
Відповідь: $(x-10)^2 + \left(y - 2 - 2\sqrt{6}\right)^2 = 2\left(4 - \sqrt{6}\right)^2$.

15. В посудину налита рідина. Посудину приведено в рівномірний обертовий рух з кутовою швидкістю ω навколо деякої осі. Визначити форму поверхні рідини.
Відповідь: Параболоїд обертання.

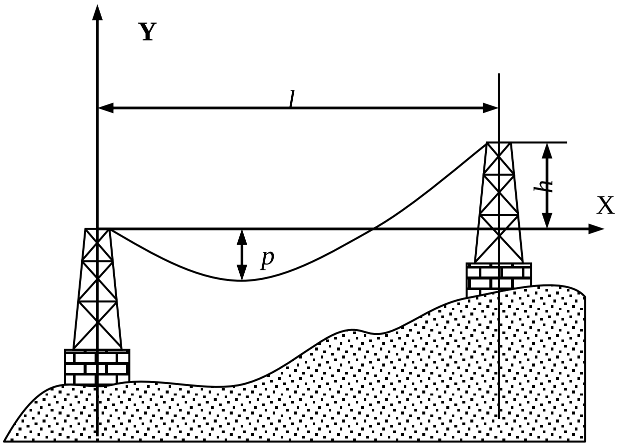
16. Механізм складається з чотирьох попарно рівних ланок AB, CD, AD, BC, шарнірно з'єднаних між собою. Нехай ланка



AB закріплена так, що ланки AD і BC обертаються навколо нерухомих центрів A і B. Визначити геометричне місце точок перетину малих ланок.

Відповідь: Гіпербола з фокусами в точках A і B.

17. Вивести рівняння параболи, утвореної прогином лінії передачі струму високої напруги за даними ескіза, зображеного на малюнку.



Позначення: $p=1$м – стріла прогину; $l=100$ м – довжина прольоту; $h=24$ м – різниця висот точок підвісу провода. Знайти також абсциси x_1 і x_2 (найнижчі точки параболи і другої точки її перетину з віссю OX). За початок координат прийняти ліву точку провисання.

18. В геодезії прийнято, що земний еліпсоїд (еліпсоїд Красовського) має параметри: більша піввісь $a=6378245$м, стиск $\alpha=\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{1}{298{,}3}$. Скласти рівняння земного еліпсоїда.

19. Скласти рівняння миттєвої осі обертання твердого тіла (геометричного місця точок тіла, які в даний момент мають нульову швидкість) навколо нерухомої точки і визначити поверхні, утворені рухом миттєвої гвинтової осі (аксоїди), в нерухомій і рухомій системах координат.

Відповідь. а) в нерухомій системі $\dfrac{x}{\omega_x}=\dfrac{y}{\omega_y}=\dfrac{z}{\omega_z}$;

б) в рухомій системі $\dfrac{x'}{\omega_{x'}}=\dfrac{y'}{\omega_{y'}}=\dfrac{z'}{\omega_{z'}}$. Проекції кутової швидкості змінюються із змінною часу. Миттєва вісь у різні моменти часу займає різні положення як в нерухомому просторі $OXYZ$, так і в самому тілі, тобто в системі $OX'Y'Z'$. Переміщуючись в нерухомому просторі і в обертовому тілі, миттєва вісь описує в них деякі лінійчаті поверхні. Миттєва вісь, яка утворює ці лінійчаті поверхні завжди проходять через нерухому точку O, тому поверхні будуть конічними з вершиною в точці O. Поверхня, одержана рухом миттєвої осі в нерухомому просторі, утворює нерухомий аксоїд, а в обертовому тілі – рухомий аксоїд. Виключаючи час з рівнянь миттєвої осі, одержуються рівняння цих аксоїдів, як рівняння конусів.

20. Потрібно з'єднати під прямим кутом дві циліндричні труби з діаметром 10 см. Визначити вид кривої в площині по розрізу, щоб отримати при зварці потрібне коліно. Написати рівняння цієї кривої до згину і після нього.

Відповідь: $y = 5\sin\frac{x}{5};\quad 2x^2 + y^2 = 50$.

21. У прожекторах, дзеркальних телескопах, фарах автомашин застосовуються параболічні дзеркала, в яких використовується оптична властивість параболи: дотична до параболи є бісектрисою кута між фокальним радіусом точки дотику і перпендикуляром, опущеним з неї на директрису. Довести цю властивість.

22. Струмінь фонтана витікає з отвору зі швидкістю ϑ під кутом α до горизонту по кривій $y = tg\alpha + \frac{gx^2}{2\vartheta^2}$. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням цього струменя навколо осі OY, побудувати цю поверхню.

Відповідь. $y - tg\alpha = \frac{g}{2\vartheta^2}\left(x^2 + z^2\right)$.

23. Визначити рівняння орбіти штучного супутника землі, якщо найвища точка орбіти над Землею 5000 км, а найнижча 300 км. Землю вважати кулею радіуса 6370 км.

Відповідь: $\frac{x^2}{9020^2} + \frac{y^2}{2290^2} = 1$.

24. Дзеркальна поверхня прожектора утворена обертанням параболи навколо її осі симетрії. Діаметр дзеркала 80 см, глибина 10 см. Скласти рівняння поверхні, вибравши систему координат так, щоб її початок співпадав з вершиною параболи, вісь ординат проходила би по дотичній до неї, а вісь абсцис – через фокус параболи в напрямку від вершини.

Відповідь: $160x - y^2 - z^2 = 0$.

25. Написати рівняння прямолінійних твірних, на яких розташовані балки металічної опори, виготовленої у вигляді однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, якщо ці твірні перетинаються в точці $A(2, 4, 4)$.

Відповідь: $x + y - z - 2 = 0,\quad x - y + z - 2 = 0$ і $3x + y - 3z + 2 = 0,\quad x - 3y + z + 6 = 0$.

26. Стальний трос, підвішаний за два кінці на однаковій висоті, має форму дуги параболи. Відстань між точками кріплення кінців 20 м. Розмір прогину троса на віддалі двох метрів від точки кріплення дорівнює 13 см. Визначити розмір прогину троса посередині між кріпленнями.

Відповідь: $\approx 0{,}36$ м.

27. Камінь, кинутий під кутом до горизонту досяг найбільшої висоти 4 м. Описавши гіперболічну траєкторію, він упав на відстані 32 м. На якій висоті знаходився камінь на віддалі 8 м від точки кидання по горизонталі. Відповідь: 3 м.

28. Ракета, запущена у вертикальному напрямку, рухається з прискоренням $2g$ протягом 50 сек. роботи двигуна під кутом 45^0 до горизонту. Нехтуючи опором повітря і зміною величини g з висотою визначити:
а) траєкторію ракети за час всього польоту;
б) максимальну висоту, якої досягла ракета;
в) повний час польоту від моменту запуску до повернення на Землю.

29. Міномет, встановлений на відстані 8100 м від вертикального обриву висотою 105 м. Необхідно мінометним вогнем вразити цілі, сховані за обривом. Як близько до основи обриву можуть “підібратися” міни, якщо їх початкова швидкість складає 300 м/сек.

30. Частка з масою m рухається в ділянці простору, де на неї діє сила, пропорційна швидкості частки і перпендикуляру одночасно двом напрямкам – вектору швидкості й осі OZ. У початковий момент швидкість частки дорівнює V_0 і лежить у площині XOY. Показати, що частка рухається по круговій орбіті і знайти радіус цієї орбіти (коефіцієнт пропорційності у виразі для сили через швидкість дорівнює β, тобто $F = \beta V$).

4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1 Похідна

Основним поняттям диференціального числення є поняття похідної. Оволодіння технікою диференціювання є необхідною умовою подальшого засвоєння курсу математичного аналізу та застосування його методів до розв'язання технічних задач.

Перш за все потрібно вивчити таблицю похідних основних елементарних функцій, правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій, а також правило диференціювання складної функції (суперпозиції функції).

Дамо означення похідної функції $y=f(x)$, яка є визначеною і неперервною на деякому інтервалі (a,b).

Похідною функції $y=f(x)$, називається границя відношення приросту функції до приросту аргумента за умови, що приріст аргумента прямує до нуля:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо похідна існує для всіх $x\in(a,b)$, то функція $f(x)$ називається диференційованою на інтервалі (a,b). Операція знаходження похідної називається **диференціюванням.**

Основні правила диференціювання функцій

1. Похідна сталої величини дорівнює нулю: $(C)'=0$;

   Нехай маємо дві функції $u=u(x)$, $v=v(x)$, тоді

2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
3. $(uv)'=u'v+uv'$;

   Наслідок 1. $(cv)'=cv'$;

   Наслідок 2. $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$;

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

   Наслідок 1. $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{cv'}{v^2}$;

Диференціювання складної функції. Нехай маємо складну функцію $y=f(\varphi(x))$, тоді $y'=f'(t)\cdot\varphi'(x)$, де $t=\varphi(x)$ або $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$, $(y'_x=y'_t\cdot t'_x)$, після знаходження похідної $f(t)$ потрібно замість t підставити $\varphi(x)$.

Правила обчислення похідної складної функції поширюються на композицію скінченого числа функцій. Наприклад: $r(y(x(t)))$; $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{dr}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$.

Похідні основних елементарних функцій

1) $C'=0$**,** де C - стала;

2) $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, α - будь-яке число;

3) $x' = 1$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $(\sin x)' = \cos x$;

5) $(\cos x)' = -\sin x$;

6) $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

7) $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;

9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;

10) $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

11) $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

12) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $a > 0$ і $a \neq 1$;

13) $\left(e^x\right)' = e^x$;

14) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$, $x > 0$;

15) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$;

Похідні гіперболічних функцій:

16) $(sh\, x)' = ch\, x$;

17) $(ch\, x)' = sh\, x$

18) $(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$;

19) $(cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$;

Зауваження. Нагадаємо, що

$$sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad th\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x}, \quad cth\, x = \frac{ch\, x}{sh\, x}, \quad ch^2 x - sh^2 x = 1.$$

4.2 Диференціал. Похідні вищих порядків

Головна, лінійна відносно приросту незалежної змінної, частина приросту функції називається **диференціалом** функції:

$$dy = y'\Delta x.$$

Диференціал незалежної змінної x дорівнює її приросту: $dx = \Delta x$. Отже,

$$dy = y'dx, \qquad (1)$$

тобто диференціал функції дорівнює її похідній, помноженій на диференціал незалежної змінної.

З формули (1) випливає, що $y' = \frac{dy}{dx}$.

Таким чином, похідну $f'(x)$ можна розглядати як відношення диференціалу функції до диференціалу незалежної змінної.

При знаходженні диференціал складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, $dy = f(u)du$ слід відмітити, що форма диференціалу не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною змінною, чи функцією іншого аргументу. Ця властивість називається інваріантністю форми диференціалу.

Геометричний зміст диференціалу такий: значення диференціалу дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в даній точці.

Застосування диференціалу до наближених обчислень грунтується на заміні приросту функції її диференціалом, тобто на використанні наближеної формули:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

4.3 Рівняння дотичної та нормалі до кривої

Нехай функція $f(x)$ диференційована в точці x, тоді рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_1, y_1)$ має вигляд:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Нормаллю до кривої в даній точці називається пряма, яка проходить через дану точку, перпендикулярно до дотичної в цій точці.

З означення нормалі випливає, що $k_H = -\frac{1}{k_Д}$, отже, рівняння нормалі має вигляд $y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$.

Задачі про найбільші та найменші значення величин

У багатьох геометричних, фізичних і технічних задачах потрібно знати найбільше чи найменше значення величини, пов’язаної функціональною залежністю з іншою величиною.

Для розв’язування такої задачі слід, виходячи з умови, вибрати незалежну змінну і виразити досліджувану величину через цю змінну, потім знайти шукане найбільше чи найменше значення одержаної функції. Інтервал зміни незалежної змінної, який може бути скінченним чи нескінченним також визначається з умови задачі.

Задача 4.1. Насос подає воду в циліндричний бак, діаметр якого 6 дм. Висота підйому води збільшується на 1 дм за секунду. Знайти швидкість наповнення баку.

Розв’язання. Шукана швидкість є швидкість зміни об’єму води за одиницю часу.

$$\vartheta_{цил.} = \pi\, r^2 h \tag{1}$$

де $h(t)$ – є функцією від t

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dh} \cdot \frac{dh}{dt},\ \text{за умовою задачі}\ \frac{dh}{dt} = 1\ дм/с.$$

Диференціюємо рівність (1) по t, $\frac{d\vartheta}{dt}=\pi \quad r^2 \quad дм^3/c,$

$\frac{d\vartheta}{dt}=\pi \quad \cdot \quad 3^2=9\pi \quad \left(дм^3/c\right).$

Відповідь: $\frac{d\vartheta}{dt}=9\pi \quad дм^3/c$.

Задача 4.2. Штучні супутники Землі рухаються по еліптичних орбітах навколо Землі. Віддаль r супутника від центру Землі може бути наближено виражена рівнянням $r=a\left(1-\varepsilon\cos M-\frac{\varepsilon^2}{2}(\cos\ 2M-1)\right)$, де $M=\frac{2\pi}{T}(t-t_n)$; де $t-$ час руху супутника; $T-$ період обертання штучного супутника Землі; t_n-час проходження його через перігей; $a-$більша піввісь орбіти; $\varepsilon-$її ексцентриситет. Знайти радіальну швидкість супутника, тобто швидкість зміни відстані r штучного супутника від центру землі.

Розв'язання.

$$r=a\left(1-\varepsilon\ \cos\frac{2\pi}{T}\ (t-t_n)-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\cos\ 2\cdot\frac{2\pi}{T}(t-t_n)-1\right)\right). \tag{1}$$

Швидкість зміни відстані r знаходимо, як першу похідну (1) за часом

$$\frac{dr}{dt}=a\left(\varepsilon\ \sin\ \frac{2\pi}{T}(t-t_n)\cdot\frac{2\pi}{T}-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(-\sin 2\ \frac{2\pi}{T}(t-t_n)\right)\cdot\frac{4\pi}{T}\right)$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{2a\pi\varepsilon}{T}\ (\sin M+\varepsilon\ \sin 2M)=\frac{2a\pi\varepsilon}{T}(\sin\ M+2\varepsilon\ \sin\ M\ \cos\ M\ )=$$

$$=\frac{2a\pi\varepsilon}{T}\sin M\ (1+2\ \varepsilon\ \cos\ M).$$

Відповідь: $\frac{dr}{dt}=\frac{2\alpha\pi\varepsilon}{T}\sin M\ (1+2\varepsilon\cos M)$.

Задача 4.3. Куля радіусом 2 см охолоджена, внаслідок чого об'єм зменшився на $0{,}16$ $см^3$. Знайти зменшення радіуса кулі.

Розв'язання. Об'єм кулі є функцією його радиуса і визначається за формулою $\vartheta=\frac{4}{3}\pi R^3$. Знайдемо диференціал $d\vartheta=\frac{4}{3}\pi\cdot R^2\ dR=4\pi\ R^2\ dR,$ звідки випливає, що $dR=\frac{d\vartheta}{4\pi R^2}$. Обчислимо dR при $d\vartheta-0{,}16$ $см^2$ і $R=2$ см; $dR=-\frac{0{,}16}{16\pi}=-\frac{0{,}001}{\pi}=-0{,}0032$ (см).

Відповідь: Зменшення радіуса 0,0032 (см).

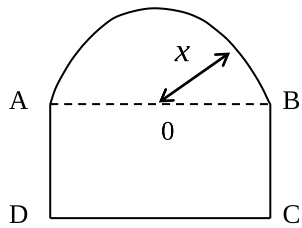
Задача 4.4. Доцентрове прискорення тіла, яке рухається рівномірно по колу радіуса R з лінійною швидкістю ϑ, знаходиться за формулою $a=\frac{\vartheta^2}{R}$. Знайти наближено зміну прискорення при зміні швидкості ϑ від $\vartheta=4\,м/с$. Радіус обертання $R=0{,}5$ м.

Розв'язання. Для визначення зміни прискорення при збільшенні швидкості від $\vartheta = 4\,м/с$ до $\vartheta = 4{,}08\,м/с$ знайдемо диференціал da, обчислимо його при $\vartheta = 4\,м/с$ і $d\vartheta = 0{,}08\,м/с$, $da = \frac{2}{R}\,\vartheta\, d\,\vartheta = \frac{2\cdot 4\cdot 0{,}08}{0{,}5} = 1{,}28\ \left(м/с^2\right)$. Наближене значення доцентрового прискорення обчислюємо за формулою $a\,(4{,}08) \approx a\,(4) + da = 32 + 1{,}28 = 33{,}28\ \left(м/с^2\right)$.

Відповідь: Доцентрове прискорення $33{,}28\ м/с^2$.

Задача 4.5. На малюнку зображено переріз тунелю , який має форму прямокутника, завершеного півколом. Площа перерізу тунелю $S = 357\ м^2$. Якою повинна бути ширина $AB = 2x$ і висота $AD = y$, щоб периметр перерізу був найменшим? Знайти найменший периметр перерізу тунелю при даній площі.

Розв'язання. Нехай $OB = x,\ AD = y$, тоді периметр $p = 2x + 2y + \pi x$, а площа перерізу тунелю $S = 2xy + 0{,}5\pi x^2$, звідки $y = \frac{2S - \pi x^2}{4x}$ і тоді



$p = 2x + \pi x + 2y,\quad p = (2+\pi)x + 2y;$

$p = (2+\pi)x + 2\cdot\frac{2S - \pi x^2}{4x} = (2+\pi)x + \frac{2S - \pi x^2}{2x}.$

Знайдемо першу похідну $p' = 2 + \pi + \frac{-2\pi x\cdot 2x - \left(2S - \pi x^2\right)\cdot 2}{4x^2} = 2 + \pi - \pi - \frac{S}{x^2} + \frac{\pi}{2} = 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{S}{x^2}$. Знайдемо критичні точки $p' = 0;\quad 2 + \frac{\pi}{2} - \frac{S}{x^2} = 0;\quad \frac{S}{x^2} = 2 + \frac{\pi}{2};\quad \frac{S}{x^2} = \frac{4+\pi}{2}.$

$$x^2 = \frac{2S}{4+\pi},\qquad x = \sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\pi}}\,.$$

Знайдемо другу похідну $p'' = \left(2 + \frac{\pi}{2} - \frac{S}{x^2}\right)' = -\left(-\frac{S\cdot 2x}{x^4}\right) = \frac{2S}{x^3}$.

Друга похідна обчислена в критичній т. першого роду $x = \sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\pi}}$ $\quad p''\left(\sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\pi}}\right) = \frac{2S}{\left(\sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\pi}}\right)^3} = 2\sqrt{\frac{(2+0{,}5\pi)^3}{S}} > 0,$ а це означає, що в цій точці функція має мінімум.

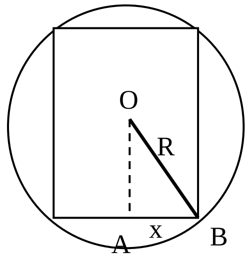
$$y = \frac{2S - \pi\, x^2}{4x};\qquad y = \frac{2S - \frac{\pi\, S}{2+0{,}5\pi}}{4\sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\,\pi}}} = \frac{4S + \pi\, S - \pi\, S}{(2+0{,}5\pi)\cdot 4\sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\,\pi}}} = \frac{S}{\sqrt{S\cdot(2+0{,}5\,\pi)}} = \sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\,\pi}}$$

При $S = 357\ м^2,\ x = 10\ м,\ \mathrm{y} = 10\ \mathrm{м}$ шуканий найменший периметр перерізу тунелю

$$P = (2+\pi)\sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\,\pi}} + 2\sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\,\pi}} = \sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\pi}}\ (2+\pi+2) = (4+\pi)\sqrt{\frac{S}{2+0{,}5\,\pi}};$$

Відповідь: $P=(4+\pi)\sqrt{\dfrac{357}{2+0,5\pi}}\approx 71,4$ *м.*

Задача 4.6. Знайти радіус основи циліндра найбільшого об'єму, вписаного в кулю з радіусом R.



Розв'язання. Нехай $x-$радіус циліндра.
З $\Delta\ OAB$: $\dfrac{h}{2}=\sqrt{R^2-x^2}$; $h=2\sqrt{R^2-x^2}$;

$$\vartheta_ц(x)=\pi x^2\cdot 2\sqrt{R^2\ x^2}=2\pi x^2\sqrt{R^2-x^2};$$

$$\vartheta(x)=2\pi x^2\sqrt{R^2-x^2};\quad \vartheta'(x)=2\pi\left(2x\sqrt{R^2-x^2}+x^2\frac{1-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)=2\pi\left(\frac{2x\left(R^2-x^2\right)-x^3}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)=$$

$$=2\pi\frac{2R^2x-2x^3-x^3}{\sqrt{R^2-x^2}}=2\pi\frac{2R^2x-3x^3}{\sqrt{R^2-x^2}};$$

Знайдемо критичні точки

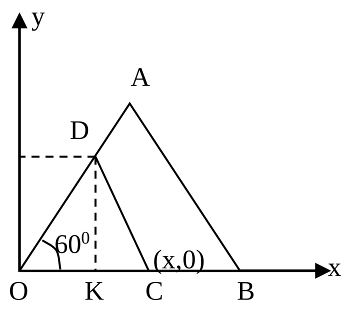
$$2R^2x-3x^3=0;\quad x\left(2R^2-3x^2\right)=0;\quad 3x^2=2R^2;\quad x^2=\frac{2}{3}R^2;\quad x=\sqrt{\frac{2}{3}}R;$$

$$\vartheta'\left(x<\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)>0;\ \vartheta'\left(x>\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)<0, \text{ отже } x=\sqrt{\frac{2}{3}}R \text{ є т. max.}$$

Отже, при $r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}R$ об'єм циліндра, вписаного в кулю радіуса R, буде найбільшим.

Задача 4.7. Деталь має форму рівностороннього трикутника з стороною a. Знайти довжину найменшого відрізка, який ділить рівносторонній трикутник на дві рівновеликі частини.

Розв'язання.



Т. $C(x;0)$, т. D лежить на стороні OA, рівняння якої знаходиться у вигляді $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$, $y'(x_0)=tg\,60^0=\sqrt{3}$, $y-0=\sqrt{3}\,(x-0)$, $y=\sqrt{3}x\ (OA)$, координати т. D матимуть вигляд $\left(u;\sqrt{3}u\right)$. Використаємо формулу для обчислення площі рівностороннього трикутника $S_{\Delta OAB}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{\Delta OCD}=\dfrac{1}{2}OC\cdot DK$, де DK є ординатою т. D, $DK=\sqrt{3}u$. $S_{\Delta OCD}=\dfrac{1}{2}x\cdot\sqrt{3}u=\dfrac{1}{2}S_{\Delta OAB}$; $\dfrac{1}{2}x\sqrt{3}u=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$x\sqrt{3}u=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $xu=\dfrac{a^2}{4}$; $x=\dfrac{a^2}{4u}$.

Знайдемо довжину відрізка CD, яка буде функцією від u $|CD|=\sqrt{(x-u)^2+\left(0-\sqrt{3}u\right)^2}=\sqrt{(x-u)^2+3u^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{4u}-u\right)^2+3u^2}$, де $u>0$. Задача звелася до знаходження найменшого значення функції $f(u)=\sqrt{\left(\frac{a^2}{4u}-u\right)^2+3u^2}$, $u>0$, $f'(u)=\dfrac{2\left(\frac{a^2}{4u}-u\right)\cdot\left(-\frac{a^2}{4u^2}-1\right)+6u}{2\sqrt{\left(\frac{a^2}{4u}-u\right)^2+3u^2}}=$

$$=\frac{2\left(-\frac{a^4}{16u^3}+\frac{u\,a^2}{4u^2}-\frac{a^2}{4u}+u\right)+6u}{2\sqrt{\left(\frac{a^2}{4u}-u\right)^2+3u^2}}=0;$$

$$\frac{2\left(-a^4+4u^2a^2-4u^2a^2+16u^4\right)}{16u^3}+6u=\frac{-a^4+16u^4+48u^4}{8u^3}=\frac{8u^4-\frac{a^4}{8}}{8u^3}=\frac{u^4-\frac{a^4}{64}}{u^3}=0;$$

$u^4=\frac{a^4}{64}$; $u^2=\frac{a^2}{8}$; $u=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ у цій точці мінімум, а отже і найменше значення на проміжку $(0;+\infty)$.

Відповідь: Довжина найменшого відрізка $|CD|=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Задача 4.8. Мідний кубик з ребром 4 см піддали рівномірному шліфуванню з усіх боків. Визначити, на скільки скоротиться ребро кубика, якщо його маса зменшиться на 0,88 г (густина міді $8{,}9\ г/см^3$).

Розв'язання. x – ребро кубика, тоді його маса $m=8{,}9x^3$. Покладемо $x_0=4$ і використаємо $\Delta f(x_0)\approx df(x_0)=f'(x_0)\,\Delta x$.

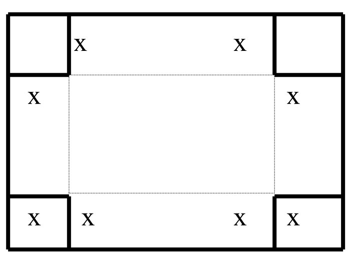
Дістанемо: $\Delta m(x_0)\approx m'(x_0)\,\Delta x$, де Δx – шукана величина. $\Delta m(x_0)=0{,}88$ (за умовою), $m'=3\cdot 8{,}9x^2=26{,}7x^2$; $m'(4)=427{,}2.$

$\Delta x=\frac{\Delta m(x_0)}{m'(x_0)}$; $\Delta x\approx\frac{0{,}88}{4\cdot 27{,}2}\approx 0{,}002$ (см).

Відповідь: Ребро кубика скоротиться на 0,002 (см).

Задача 4.9. З прямокутного листа жерсті зі сторонами a і b виготовляють деталь у вигляді прямокутної відкритої коробки, вирізуючи по кутах листа рівні квадрати і згинаючи краї, що утворилися. Якою повинна бути сторона кожного квадрата, щоб об'єм утвореної коробки був найбільшим?

Розв'язання. Позначимо сторону вирізуваного квадрата через x. Тоді об'єм коробки рівний $V=x(a-2x)(b-2x)=$ $=4x^3-2(a+b)x^2+abx.$ Так як $V\ge 0$, то $x\ge 0,\ a-2x\ge 0, b-2x\ge 0,$ звідси одержуємо $0\le x\le c,$ де c менше з чисел $a/2$ і $b/2$. Потрібно знайти значення x, при якому функція V має найбільше значення на відрізку $[0;c]$, рівна



нулю, крім того, вона є неперервною і невід'ємною в усіх внутрішніх точках цього відрізка.

Звідси випливає, що найбільше значення функції існує і досягається функцією у внутрішній точці. Отже, найбільшим значенням буде один з максимумів функції. Знайдемо похідну функції V:

$$V' = 12x^2 - 4(a+b)x + ab; \quad 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0;$$

$$x_1 = \frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}, \; x_2 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Дослідимо, чи належить значення x_1 і x_2 інтервалу $(0;c)$.

Припустимо, для визначеності, що $a \geq b$. Тоді

$\sqrt{a^2-ab+b^2} = \sqrt{a(a-b)+b^2 \geq b}$, тобто $x_1 \geq \frac{b+b+b}{6} = \frac{b}{2}$, $\quad x_1 \in (0;c)$, $\quad x_2 \geq \frac{a+b-b}{6} = \frac{a}{6}$;

Згідно з доведеним максимум функції існує і він досягається в точці x_2. При $a = b$ коробка найбільшого об'єму буде, якщо взяти $x = a/6$. Об'єм коробки, в цьому випадку, рівний:

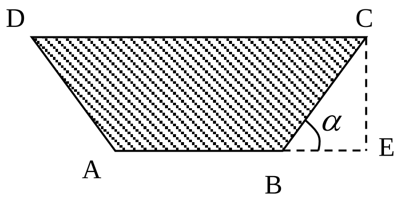
$$V = \frac{2a^3}{27}.$$

Відповідь: Сторона квадрату $\frac{a}{6}$.

Задача 4.10. Переріз зрошувального каналу має форму рівнобічної трапеції, бічні сторони якої рівні меншій основі. При якому куті нахилу бічних сторін цієї трапеції переріз каналу буде мати найбільшу площу?

Розв'язання. Нехай бічні сторони і менша основа рівні a.

$$S_{тр} = \frac{|AB|+|DC|}{2} \cdot |CE|;$$



Розглянемо ΔBEC; $\frac{BE}{BC} = \cos\alpha$; $BE = a\cos\alpha$;

$DC = AB + 2BE = a + 2a\cos\alpha$; $\frac{CE}{BC} = \sin\alpha$;

$CE = BC\sin\alpha$; $CE = a\sin\alpha$.

$$S\text{тр} = \frac{\mathrm{a}+\mathrm{a}+2\,\mathrm{a}\cos\alpha}{2} \cdot a\sin\alpha = \frac{2a+2a\cos\alpha}{2} \cdot a\sin\alpha = a^2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right).$$

Дослідимо S як функцію від α на екстремум:

$S'(\alpha) = a^2\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha \cdot 2\right) = a^2(\cos\alpha + \cos 2\alpha)$. Знаходимо критичні точки $S = 0$;

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0;$$

$2\cos\frac{3}{2}\alpha \cos\frac{\alpha}{2} = 0$; оскільки $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, тому якщо $\cos\frac{3}{2}\alpha = 0$,

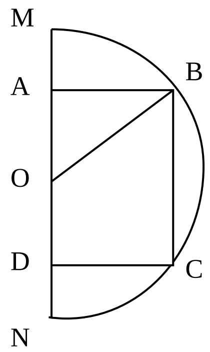
то $\frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$, або $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Доведемо, що при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ функція S досягає найбільшого значення на відрізку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$S'' = a^2\ (-\sin - 2\sin 2\alpha);$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(-\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{2}{3}\pi\right) = a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) = -a^2\,\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0,$$ тому при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ маємо max. $S_{\max} = S\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\sin\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{3}\pi\right) = a^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,a^2.$

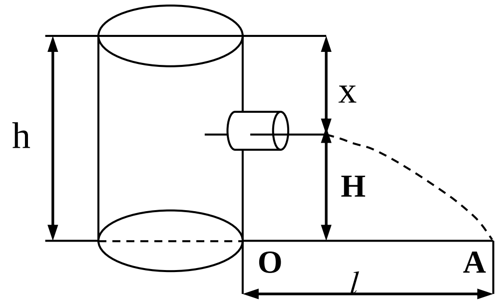
Задача 4.11. Деталь має форму сфери, площа поверхні якої дорівнює 27π. Знайти висоту циліндра найбільшого об'єму, вписаного в цю сферу.



Розв'язання. Нехай циліндр утворено в результаті обертання прямокутника $ABCD$ навколо діаметра MN. Поклавши $AD = x$, запишемо об'єм V циліндра як функцію від x. Маємо $S_{сфери} = 4\pi OB^2$, тобто $4\pi\, OB^2 = 27\pi$, звідки $OB^2 = 27/4$. Далі із трикутника AOB дістаємо $AB^2 = OB^2 - OA^2$, тобто $AB^2 = \dfrac{27}{4} - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{27 - x^2}{4}$. Згідно з формулою

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$, об'єм циліндра $V(x) = \pi AB^2 \cdot AD = \pi\dfrac{(27 - x^2)}{4}x = \dfrac{\pi}{4}(27x - x^3)$. За змістом задачі $0 < x < 2OB$, тобто $0 < x < 3\sqrt{3}$. Маємо $(x) = \dfrac{\pi}{4}(27 - 3x^2) = \dfrac{3}{4}\pi(9 - x^2)$; $V(x) = 0$, якщо $9 - x^2 = 0$. Звідси знаходимо $x = 3$ (оскільки $x > 0$). Якщо $0 < x < 3$, то $V'(x) > 0$, а якщо $3 < x < 3\sqrt{3}$, то $V'(x) < 0$. Отже, $x = 3-$ точка максимуму. Оскільки функція $V(x)$ визначена для будь-якого x і на всій числовій прямій має одну критичну точку, робимо висновок, що при $x = 3$функція $V(x)$ досягає найбільшого значення.

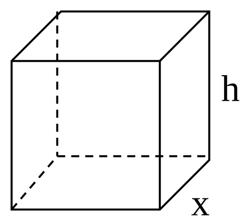
Задача 4.12. Посудина з вертикальною стінкою і висотою h стоїть на горизонтальній площині. На якій глибині треба розмістити отвір, щоб дальність вильоту води з отвору була найбільшою (швидкість рідини, що витікає за законом Торрічеллі дорівнює $\sqrt{2gx}$, де $x-$ глибина розміщення отвору, $q-$ прискорення вільного падіння)?



Розв'язання. Позначимо через H відстань отвору в посудині від горизонтальної площини, а через $l-$відстань т. A від стіни посудини. Тоді $l = \vartheta t$, де $t-$ час вильоту води з отвору на площину (в точку A), $\vartheta-$швидкість.

З курсу фізики відомо, що $t=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$, або $t=\sqrt{\dfrac{2\,(h-x)}{g}}$. Швидкість рідини, що витікає за законом Торрічеллі дорівнює $\vartheta=\sqrt{2gx}$, тоді $l\,(x)=\sqrt{2\,gx}\cdot\sqrt{\dfrac{2\,(h-x)}{q}}$; або $l(x)=2\sqrt{\dfrac{qx(h-x)}{q}}=2\sqrt{x\,(h-x)},\ \ 0<x<h$. Знайдемо похідну $l'\,(x)=2\,\dfrac{(h-2x)}{2\sqrt{x(h-x)}}=\dfrac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}$, прирівняємо похідну до нуля $\dfrac{h-2x}{\sqrt{x\,(h-x)}}=0;\ \ h-2x=0;\ 2x=h;\ x=\dfrac{h}{2}$, оскільки це єдина критична точка, то ця точка і є шуканою.

Задача 4.13. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом $\vartheta=32\,\text{м}^3$ так, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.



Розв'язання. Позначимо довжину сторони основи через x, а довжину висоти через y $\vartheta_{пр}=S_{осн}\cdot h$; $S_{осн}=S_{кв}=x^2$; $\vartheta=x^2\cdot h=32$; $h=\dfrac{32}{x^2}$. Площа бічної поверхні басейну разом з площею дна дорівнює $S=x^2+4xh$.

Підставимо в останню рівність замість $h=\dfrac{32}{x^2}$, одержимо $S(x)=x^2+4x\cdot\dfrac{32}{x^2}$; $S(x)=x^2+\dfrac{128}{x}$. Знайдемо похідну від цієї функції $S'(x)=2x-\dfrac{128}{x^2}$; $S'(x)=0$; $2x-\dfrac{128}{x^2}=0$; $\dfrac{2x^3-128}{x^2}=0$; $2x^3-128=0$; $2x^3=128$; $x^3=64$; $x=4$, оскільки в даному випадку існує тільки одна стаціонарна точка, то знайдена точка і є точкою мінімуму. Отже, найменші розміри басейну заданого об'єму $\vartheta=32\,м^3$ такі: $x=4\ м,\quad h=2\,м.$

Задача 4.14. Швидкість сигналізації по підводному кабелю пропорційна виразу $x^2\ln(x^{-1})$, де x - відношення радіуса металевого осердя кабеля до товщини його ізоляційної оболонки. Яким повинно бути це відношення, щоб швидкість сигналізації була найбільшою?

Розв'язання. Потрібно знайти найбільше значення функції $y=x^2\ln(x^{-1})$ на інтервалі $(0;\infty)$.

$$y'=2x\ln(x^{-1})+x^2\cdot\frac{1}{x^{-1}}(-1)x^{-2}=2x\ln\frac{1}{x}-x=x\left(2\ln\frac{1}{x}-1\right).$$

Так як $x>0,\ y'=0$ при $2\ln\dfrac{1}{x}-1=0,\ \ln\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{x}=e^{\frac{1}{2}},\ x=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}},\ x=e^{-\frac{1}{2}}$. Неважко переконатися, що при переході через цю точку похідна змінює знак з "+" на "-".

Отже, в точці $x = e^{-\frac{1}{2}}$ функція має максимум, причому він буде найбільшим значенням функції, оскільки функція не має інших екстремумів на інтервалі $(0;\infty)$. Таким чином, шукана величина знайдена.

Відповідь: $x = e^{-\frac{1}{2}}$

Задача 4.15. Дощова крапля, початкова маса якої m_0 падає під дією сил тяжіння, рівномірно випаровуючись, так що зменшення маси пропорційне часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Через скільки секунд після початку падіння кінетична енергія краплі буде найбільшою і яка її величина? (Опором повітря нехтуємо).

Розв'язання. Кінетична енергія краплі рівна $K = \dfrac{m\vartheta^2}{2}$. За умовою $m = m_0 - kt$, а $\vartheta = gt$, оскільки крапля падає під дією сили тяжіння з початковою нульовою швидкістю

$$K = \frac{1}{2}(m_0 - kt)\,g^2 t^2 = \frac{g^2}{2}\left(m_0 t^2 - kt^3\right);$$

$$K'_t = \frac{g^2}{2}\left(2m_0 t - 3kt^2\right);\ \left(2m_0 t - 3kt^2\right) = t\left(2m_0 - 3kt\right) = 0;\ t_1 = 0,\ t_2 = \frac{2m_0}{3k}.$$

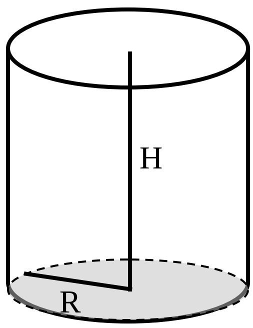
При $t_1 = 0$, очевидно, функція має мінімум.

$$\frac{d^2 K}{dt^2} = \frac{g^2}{2}\left(2m_0 - 6kt\right);\quad \left.\frac{d^2 K}{dt^2}\right|_{t=t_2} = \frac{g^2}{2}\left(-2m_0\right) < 0.$$

Отже, в момент часу t_2 кінетична енергія має максимум, тобто буде найбільшою. При цьому вона рівна

$$K = 2g^2 m_0^3 \Big| (27k^2).$$

Задача 4.16. Якими повинні бути розміри (радіус основи R та висота H) відкритого зверху циліндричного баку максимальної ємності, якщо на його виготовлення виділено S = 27π ≈ 84,82 м² матеріалу?



Розв'язання. **Об'єм баку V = πR²H, а на його виготовлення піде матеріал площею**

$$S = \pi R^2 + 2\pi RH. \qquad (1)$$

З рівняння (1) визначаємо висоту баку:

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R}. \qquad (2)$$

Тоді його об'єм

$$V = \pi R^2 \frac{S - \pi R^2}{2\pi R} = \frac{SR - \pi R^3}{2} = V(R). \qquad (3)$$

Знайдемо значення R, при якому об'єм V(R) згідно (3), буде максимальним. Знаходимо похідну:

$V' = \dfrac{1}{2}\left(S - 3\pi R^2\right)$, знаходимо критичні точки $V'=0$. (4)

$$S-3\pi R^2=0,\; R=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}=\sqrt{\frac{27\pi}{3\pi}}=3\text{ м.} \qquad (5)$$

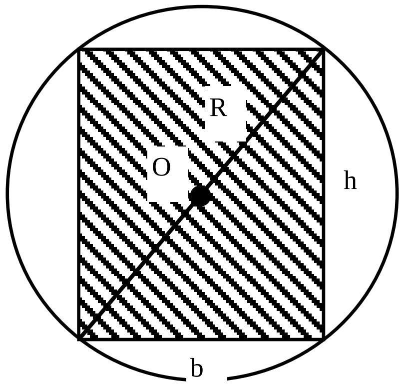
Оскільки $V^{//}=-3\pi R<0$, то у випадку значення R = 3 об'єм буде максимальним.

Висота бака знаходиться згідно (2)

$$H=\frac{S-\pi R^2}{2\pi R}=\frac{S-\pi\frac{S}{3\pi}}{2\pi\sqrt{S/(3\pi)}}=3\text{ м.}$$

Відповідь: Бак максимальної ємності буде мати радіус основи R = 3м та висоту H = 3м.

Задача 4.17. Відомо, що міцність бруса з прямокутним перерізом пропорційна його ширині b і квадрату висоти h. Знайти розміри бруса найбільшої міцності, який можна вирізати з колоди радіусом R = $2\sqrt{3}$ дм.



Розв'язання. **Міцність бруса N = kh^2b, де k – коефіцієнт пропорційності, k > 0.**

Згідно рисунку: $h^2+b^2=4R^2$ або $h^2=4R^2-b^2$. Тоді $N=k(4R^2-b^2)b$. Знайдемо екстремум функції міцності бруса N=N(b): $N'(b)=k(4R^2-3b^2)$.

Знаходимо критичні точки:

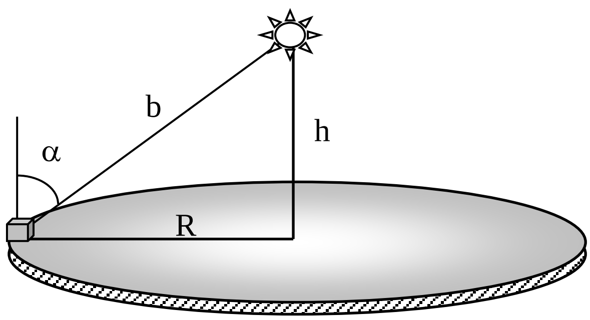
якщо $N'(b)=0$, то $0=4R^2-3b^2$. Звідки $b=2R/\sqrt{3}$,

$b=\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$=4 дм. Тоді $h=\sqrt{4R^2-b^2}=\sqrt{4R^2-4R^2/3}=2R\sqrt{2/3}=b\sqrt{2}$, h = $4\sqrt{2}$ дм.

Оскільки $N''=-6kb<0$, то відповідно при знайдених значеннях b та h міцність бруса буде максимальною.

Відповідь: За умови, що b = 4 дм та h = $4\sqrt{2}$ дм міцність бруса буде максимальною.

Задача 4.18. Лампа висить над центром круглого стола радіусом R. За якої висоти лампи над столом h освітленість предмета, що лежить на його краю буде найкращою? (Освітленість прямо пропорційна косинусу кута падіння променів світла і обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла).



Розв'язання. Освітленість L, згідно з умовою задачі, прямо пропорційна косинусу кута падіння променів світла α і обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла b.

Згідно рисунку: $cos(\alpha)=\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$, $b=\sqrt{R^2+h^2}$. (1)

Тоді освітленість згідно умови: $L=A\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\cdot\frac{1}{R^2+h^2}$, де A – const. (2)

Знайдемо екстремум функції $L=L(h)$:

$$L'(h) = \frac{A}{\left(R^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{3 \cdot h^2}{R^2 + h^2}\right). \qquad (3)$$

Знайдемо критичні точки: $L' = 0$, то $1 - \dfrac{3 \cdot h^2}{R^2 + h^2} = 0$ або $3h^2 = R^2 + h^2$.

Звідки $h = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Друга похідна від *L(h)*:

$$L''(h) = -9Ah\left(R^2 + h^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 15Ah^3\left(R^2 + h^2\right)^{-\frac{7}{2}} = \frac{3Ah}{\left(R^2 + h^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{5 \cdot h^2}{R^2 + h^2} - 3\right). \qquad (4)$$

При $h = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ друга похідна

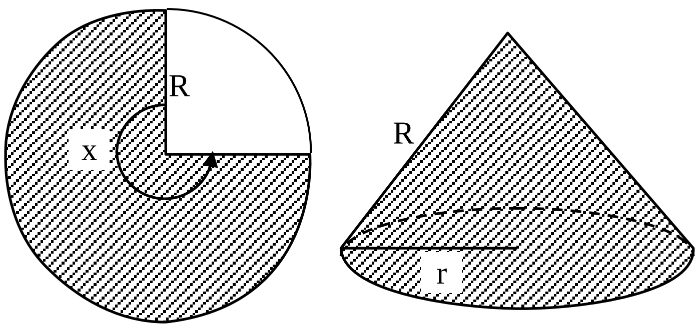
$$\Lambda'' = \frac{3AR}{\sqrt{2}\left(R^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{5 \cdot \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}{R^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} - 3\right). \qquad (5)$$

Знак у формулі (5) визначається другим множником $\left(\dfrac{5 \cdot \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}{R^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} - 3\right) = \dfrac{5}{3} - 3 < 0$.

Оскільки $\Lambda''\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) < 0$, то, відповідно, при знайденому значенні висоти лампи h освітленість предмета, що лежить на краю стола буде найкращою.

Відповідь: Висота лампи, за якої освітленість предмета буде найбільшою $h = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

Задача 4.19. З круга радіуса R вирізається сектор, а з частини, що залишилася склеюємо конус. Необхідно визначити кут вирізаного сектора так, щоб об’єм конуса був найбільшим.



Розвязання. Приймемо за незалежну змінну x не кут сектора, а його доповнення до 2π. Отже, на проміжку (0; 2π) існує значення x, за якого цей об’єм буде найбільшим.

При склеюванні в конус твірна його рівна R, довжина основи – Rx, радіус основи $r = \dfrac{Rx}{2\pi}$. Об’єм конуса висоти H з площею основи S: $V = \dfrac{1}{3}SH$. Висота конуса $H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

Площа основи $S = \pi \cdot r^2 = \pi \dfrac{R^2 x^2}{4\pi^2}$.

Отже, об’єм конуса: $V(x) = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{R^2 x^2}{4\pi^2} \dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \dfrac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

Під час знаходження найбільшого значення цієї функції можна не звертати уваги на постійний множник $\dfrac{R^3}{24\pi^2}$. Вираз, що залишився $x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ - додатна функція і досягає найбільшого значення в тих самих точках, що і його квадрат.

Тож ми можемо досліджувати функцію $f(x) = 4\pi^2 x^4 - x^6$ на проміжку (0; 2π). Знайдемо першу похідну: $f'(x) = 16\pi^2 x^3 - 6x^5$.

Знаходимо критичні точки: прирівнюємо до нуля $f'(x)$: $0 = 16\pi^2 x^3 - 6x^5$. Отримуємо три значення: $x_1 = 0$, $x_2 = -2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $x_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Перші два значення не належать проміжку (0; 2π). Залишається значення $x_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Дослідимо цю критичну точку :

Друга похідна від *f(x)*: $f''(x) = 48\pi^2 x^2 - 30x^5$.

$$f''(x_3) = 48\pi^2\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - 30\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^5 = \pi^4\left(\frac{384}{3} - \frac{640}{3}\right) < 0.$$

Отже при x_3 буде найбільший об’єм конуса. Тоді кут вирізаного сектора $2\pi - 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}} = 2\pi\left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Відповідь: Кут вирізаного сектора $2\pi\left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Із круглої колоди, діаметр якої d, потрібно вирізати балку з прямокутним поперечним перерізом. Якими повинні бути ширина і висота цього перерізу, щоб балка виявила найбільший опір на згин? Опір балки на згин Q пропорційний добутку ширини x його поперечного перерізу і квадрату його висоти y, тобто $Q = kxy^2,\ k = const$.
2. Посудина з вертикальними стінками висотою H, наповнена нев'язкою рідиною, стоїть на горизонтальній площині. Визначити місце знаходження отвору, при якому далекість струменя буде найбільшою, якщо швидкість рідини, яка витікає за законом Торрічеллі, дорівнює $\sqrt{2gx}$, де $x -$ відстань від отвору до поверхні рідини; $g -$ прискорення вільного падіння.
3. Потрібно виготовити відкритий циліндричний бак місткістю V. Вартість $1м^2$ матеріалу, з якого виготовляється дно бака, становить P_1 грн., а вартість $1м^2$ матеріалу, який іде на стінки бака, - P_2 грн. При якому відношенні радіуса дна до висоти бака витрати на матеріал будуть мінімальними?
4. Із фігури, обмеженої кривою $y = 3\sqrt{x}$ і прямих $x = 4,\ y = 0$, вирізати прямокутник з найбільшою площею.
5. При якому куті нахилу бічних сторін рівнобедреної трапеції площа її буде найбільшою, якщо бічні сторони дорівнюють b, а менша основа a?
6. Знайти висоту прямого кругового конуса з найменшим об'ємом, описаного навколо кулі радіусом R.
7. Канал, ширина якого a м, під прямим кутом впадає в інший канал шириною b м. Визначити найбільшу довжину балок, які можна сплавляти по цій системі каналів.
8. Пункт B розташований на відстані 60 км від залізниці. Відстань по залізниці від пункту A до найближчої до пункту B точки C становить 285 км. На якій відстані від точки C треба побудувати станцію, від якої прокладуть шосе до пункту B, щоб витрачати найменший час на поїздки між пунктами A і B, якщо швидкість руху по залізниці дорівнює 52км/год, а швидкість руху по шосе – 20 км/год?
9. Із всіх конусів з даною бічною поверхнею S знайти той, у якого об'єм найбільший.
10. Із жерсті круглої форми вирізано сектор, а з тієї частини, що залишилася, склеєно конічну лійку. Який кут повинен мати вирізаний сектор, щоб об'єм лійки був найбільшим?
11. Із всіх циліндрів, вписаних у даний конус, знайти той, у якого бічна поверхня найбільша. Висота конуса H, радіус основи R.
12. Лампа висить над центром круглого стола радіусом r. При якій висоті лампи над столом освітленість предмета, що лежить на краю стола, буде найкращою? (Освітленість прямо пропорційна косинусу кута падіння променів світла і обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла).

13. На прямолінійному відрізку AB, що сполучає два джерела світла A (силою p) і B (силою q), зайти точку M, яка освітлюється найслабше, якщо $|AB| = a$. (Освітленість обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла).
14. Із круглої колоди діаметром α треба вирізати балку з прямокутним перерізом. Якими повинні бути ширина b і висота h цього перерізу, щоб балка, перебуваючи горизонтально розташованою і рівномірно навантаженою, мала найменший прогин? (Величина прогину обернено пропорційна добутку ширини b поперечного перерізу і кубу висоти h).
15. Смуга жерсті шириною a, яка має прямокутну форму, повинна бути зігнута у вигляді відкритого кругового циліндричного жолоба так, щоб його переріз мав форму сегмента. Яким повинен бути центральний кут φ, який спирається на дугу цього сегмента, щоб місткість жолоба була найбільшою?
16. З корабля, який стоїть на якорі за 9 км від берега, потрібно послати гінця в табір, розташований на відстані 15 км від найближчої до корабля точки берега. Швидкість посильного при рухові пішки – 5 км/год, а на човні – 4км/год. В якому місці він повинен пристати до берега, щоб попасти в табір за найкоротший час?
17. Колода довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ якого дорівнюють 2 м і 1 м. Потрібно вирубати з колоди балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якої співпадала б з віссю колоди, а об'єм був би найбільшим. Якими повинні бути розміри балки?
18. Визначити найбільшу площу прямокутника, вписаного в півкруг радіусом a.
19. Дротом, довжина якого l м, необхідно обгородити клумбу, яка має форму кругового сектора. Яким повинен бути радіус круга, щоб площа клумби була найбільшою?
20. Знайти висоту конуса з найбільшим об'ємом, який можна вписати в кулю радіусом R.
21. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $2p$. Якою повинна бути його основа, щоб об'єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо його основи, був найбільшим?
22. Потрібно виготовити конічну воронку з твірною, що дорівнює 20 см. Якою повинна бути висота воронки, щоб її об'єм був найменшим?
23. Знайти співвідношення між радіусом R і висотою H циліндра, який при даному об'ємі V має найменшу повну поверхню.
24. У рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α вписати паралелограм з найбільшою площею так, щоб одна з його сторін лежала на основі, а друга на бічній стороні трикутника. Знайти довжини сторін паралелограма.
25. Полотняний намет об'ємом V має форму прямого конуса. Яким повинно бути відношення висоти конуса до радіуса його основи, щоб на намет пішла найменша кількість полотна?
26. Якими повинні бути розміри циліндра, який має бути об'єм V, щоб на його виготовлення використовувалось найменше матеріалу?

27. Міцність балки прямокутного перерізу пропорційна її ширині та квадрату висоти. З циліндричного стовбура діаметром d необхідно вирізати балку найбільшої міцності. Визначити ширину та висоту балки.
28. На відстані $AB = b$ від лінійної магістралі ON розміщений завод B. Від якого місця D магістралі необхідно робити прямолінійне відгалуження DB, щоб вартість проведення водогону до заводу була найменшою?
29. Вантаж вагою P, який лежить на горизонтальній площині, потрібно зрушити з місця прикладеною до нього силою F. Сила тертя пропорційна силі, яка придавлює тіло до площини і направлена проти зрушуючої сили. Коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт тертя) дорівнює κ. Під яким кутом φ до горизонту треба прикласти силу F, щоб її величина виявилась найменшою? Визначити найменшу величину зрушуючої сили.
30. Потрібно виготовити ящик з кришкою, об'єм якого дорівнював би 72 см^3, причому сторони основи відносились би, як 1:2. Якими повинні бути розміри всіх сторін, щоб повна поверхня ящика була найменшою?

ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии.-М., 1975.
2. Бермант А.Ф., Арамович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов.-М., 1971.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М., 1980.
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии.-М., 1975.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.-М., 1974.
6. Пискунов Н.В. Дифференциальное и интегральное исчесления.-Т1,2.-М., 1976.
7. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія.-Львів, 2002.

ЗМІСТ