УДК 536.2
Шимків Р. – ст. гр. МАм – 51
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО НЕОДНОРІДНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Шелестовський Б.Г.

Shymkiv R.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

CAUCHI PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL INHOMOGENEOUS WAVE EQUATION

Supervisor: Shelestovsky B.

Ключові слова: диференціальне рівняння, граничні умови, задача Коші.
Key words: differential equation, boundary conditions, Cauchi problem.

Побудуємо розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = \varphi(x),\; u_t(x,0) = \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

Задачу розбиваємо на дві: 1) задача Коші для однорідного рівняння

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \tag{3}$$

з заданими початковими умовами

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x). \tag{4}$$

2) задача Коші для вихідного рівняння

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x,t) \tag{5}$$

з нульовими початковими умовами

$$w(x,0) = 0,\; w_t(x,0) = 0. \tag{6}$$

Це означає, що

$$u = v + w. \tag{7}$$

Розв'язок задачі 1 запишемо за формулою д'Аламбера

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha. \tag{8}$$

Щоб розв'язати задачу 2, уведемо функцію $W(x,t,\tau)$, що задовольняє однорідне рівняння (3) для $t > \tau$ і початкову умову

$$W(x,\tau,\tau) = 0,\; W_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau). \tag{9}$$

Розв'язок цієї задачі запишемо за формулою д'Аламбера

$$W(x,t,\tau)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(x',\tau)\,dx', \tag{10}$$

і шуканий розв'язок задачі Коші 2 буде таким:

$$w(x,t)=\int\limits_0^t W(x,t,\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Справді, за правилом диференціювання за параметром інтеграла зі змінною верхньою межею знаходимо

$$w(x,t)=\int\limits_0^t W_t(x,t,\tau)\,d\tau+W(x,t,\tau),$$

за першою з умов (9) одержимо

$$w_t(x,t)=\int\limits_0^t W_t(x,t,\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

З формул (11) та (12) безпосередньо випливає, що $w(x,t)$ задовольняє початкові умови (6). Знову диференціюючи (12) по t і використовуючи другу з умов (9), маємо

$$w_{tt}=W_t(x,t,t)+\int\limits_0^t W_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau=f(x,t)+\int\limits_0^t W_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Обчислимо w_{xx}. Операцію диференціювання можна виконати під знаком інтеграла, тому

$$w_{xx}=\int\limits_0^t W_{xx}(x,t,\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Підставимо (13), (14) у (5)

$$f(x,t)+\int\limits_0^t W_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau-a^2\int\limits_0^t W_{xx}(x,t,\tau)\,d\tau=f(x,t)+\int\limits_0^t\left(W_{tt}-a^2W_{xx}\right)d\tau=f(x,t), \tag{15}$$

оскільки $W_{tt}-a^2W_{xx}=0$. Отже,

$$w(x,t)=\int\limits_0^t W(x,t,\tau)\,d\tau=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(x',\tau)\,dx'\,d\tau \tag{16}$$

– це розв'язок задачі Коші 2.

Нехай

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} b\cos x, \ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \ \ \textit{для всіх інших } x; \end{cases} \quad \psi(x)=0. \tag{17}$$

Тоді,

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{b}{2}\cos(x-at), \ \textit{при} \ \ -\dfrac{\pi}{2}\le x-at\le\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{b}{2}\cos(x+at), \ \textit{при} \ \ -\dfrac{\pi}{2}\le x+at\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0, \qquad\qquad\qquad \textit{для всіх інших } \ x. \end{cases} \tag{18}$$