Секція: **Математика та статистика**

УДК 517.9

Михалюк І. – ст. гр. ЕТм-51
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОБУДОВА ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ СКІНЧЕННОЇ СТРУНИ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доц. Габрусєв Г. В.

Mykhaliuk I.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

NUMERICAL SOLUTION FOR THE PROBLEM ABOUT A FINITE STRING OSCILLATIONS

Supervisor: Habrusiev H. V.

Ключові слова: коливання, струна, апроксимація, рівняння гіперболічного типу.
Keywords: oscillations, string, approximation, hyperbolic partial differential equation

Розглянемо задачу про коливання струни одиничної довжини, кінці якої жорстко закріплені. Початкове положення струни задано функцією

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 0.5;\\ 2-2x, 0.5\le x\le 1.\end{cases}$$

А початкова швидкість $g(x)=0$.

Як відомо, такий коливний процес описується рівнянням гіперболічного типу [1]. Отже в математичному плані одержуємо наступну крайову задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\le x\le l,\ 0\le t\le T,$$

із початковими умовами

$$u(x,0)=f(x),\ u_t'(x,0)=0,\ 0\le x\le l$$

та граничними умовами

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ 0\le t\le T.$$

Розв'язок задачі будемо проводити наближено із застосування системи комп'ютерної алгебри Mathcad [2].

Побудуємо різницеву схему для розв'язання поставленої задачі. Для цього в області виберемо крок розбиття по осі x $h=0.1$. Згідно із умовою Куранта крок розбиття часового інтервалу τ повинен бути меншим за h. Виберемо $\tau=0.05$. Для прикладу виберемо сітку розміром 10×10. На рисунку 1 зображено основні блоки програми. Функція $\mathrm{pp}(n,\tau,h,y1,y2)$ обчислює значення функції $u(x,t)$ певного часового шару на основі даних попередніх двох шарів (масиви значень $y1$ та $y2$). Функція ж $\mathrm{R1}(m,n,\tau,h,f,g)$ дозволяє розв'язати поставлену задачу шляхом циклічного виклику функції $\mathrm{pp}(n,\tau,h,y1,y2)$.

У результаті виконання програми $R1(m,n,\tau,h,f,g)$ ми одержуємо значення шуканої функції $u(x,t)$ та будуємо її графік (рисунок 2).

Задаємо межі прямокутної області:

$a := 1 \qquad b := 0.5$

Задаємо розміри прямокутної області:

$n := 10 \qquad m := 10$

Обчислюємо крок розбиття:

$i := 0,1..n \qquad h := \frac{a}{n} \qquad h = 0.1$

$j := 0,1..m \qquad \tau := \frac{b}{m} \qquad \tau = 0.05$

Будуємо сітку по x

$i := 0,1..n$

$x_i := i \cdot h$

Задаємо функції $f(x)$ та $g(x)$

$$f(x) := \begin{cases} (2\cdot x) & \text{if } x < 0.5 \\ (2 - 2\cdot x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$g(x) := 0$

Будуємо значення функції на нульовому та першому шарах

$u_{i,0} := f(x_i) \qquad u_{0,j} := 0 \qquad u_{n,j} := 0$

$u_{i,1} := u_{i,0} + \tau \cdot g(x_i)$

```
pp(n,τ,h,y1,y2) :=  γ ← τ/h
                    y3_0 ← 0
                    y3_n ← 0
                    for i ∈ 1,2..n−1
                        y3_i ← 2·(1 − γ^2)·y2_i + γ^2·(y2_{i+1} − y2_{i−1}) − y1_i
                        y3
                    y3
```

```
R1(m,n,τ,h,f,g) :=  t ← 0.05
                    for i ∈ 0..n
                        y1_i ← f(x_i)
                        y1
                    for i ∈ 0..n
                        y2_i ← y1_i + τ·g(x_i)
                        y2
                    for i ∈ 0..n
                        us_{i,0} ← y1_i
                        us_{i,1} ← y2_i
                        us
                    y3 ← pp(n,τ,h,y1,y2)
                    t ← t + τ
                    for k ∈ 2..m
                        for i ∈ 0..n
                            us_{i,k} ← y3_i
                            us
                        for i ∈ 0..n
                            y1_i ← y2_i
                            y2_i ← y3_i
                            y3
                        y3 ← pp(n,τ,h,y1,y2)
                        t ← t + τ
                        y3
                        us
                    us
```

Рис. 1. Програма в середовищі Mathcad.

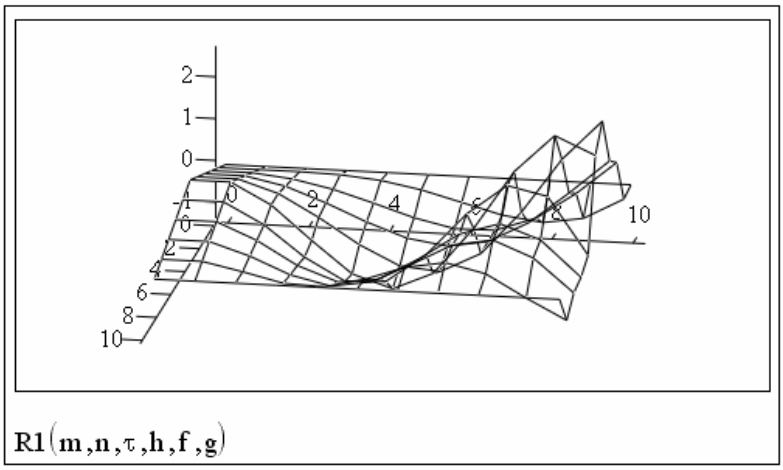

Рис. 2. Поверхня $u(x,t)$.

Література

1. Габрусєв Григорій. Рівняння математичної фізики. Навчальний посібник / Г.В. Габрусєв. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ ім. Івана Пулюя: 2014 – 84 ст.
2. Habrusiev H. Contact interaction of a predeformed plate which lies without friction on rigid base with a parabolic indenter / Hryhorii Habrusiev, Iryna Habrusieva // Scientific Journal of TNTU. — Tern. : TNTU, 2021. — Vol 102. — P. 87–95.