

**ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
ТОНКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗА УМОВ
ПЛАСТИЧНОСТІ ТА СТАЦІОНАРНОЇ ПОВЗУЧОСТІ**

На підставі синтезної теорії незворотної деформації досліджується напружено-деформований стан тонкої циліндричної оболонки, що перебуває під дією внутрішнього тиску за умов "миттєвої" пластичної деформації та стаціонарної повзучості.

Умовні позначення

$\sigma_1, \sigma_2, \tau_{13}$ - компоненти тензора напружень (меридіональне, колове та дотичне);

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - компоненти тензора деформацій;

T - інтенсивність напружень;

$\varepsilon_S, \varepsilon_R$ - відносні видовження серединної поверхні циліндричної оболонки у меридіональному та коловому напрямках;

χ_S - зміна кривизни серединної поверхні у меридіональному напрямі;

u, w - переміщення серединної поверхні оболонки;

N_1, N_2, Q, M_1, M_2 - зусилля та моменти;

q - навантаження, що діє на серединну поверхню оболонки у нормальному напрямі;

R - радіус серединної поверхні оболонки;

h - товщина оболонки;

L - довжина циліндричної оболонки;

E - модуль пружності;

μ - коефіцієнт Пуассона;

σ_T - границя текучості;

λ - гомологічна температура;

t - час.

Велика кількість сучасного обладнання містить металоконструкції, які повинні спроектуватися та виготовлятися так, щоб загалом воно надійно працювало за умов високих напружень та температур. Тому залишаються актуальними завдання розрахунку напружено-деформаційних полів при виникненні незворотної деформації.

Розглядаючи деформування оболонки, вважаємо, що виконуються припущення Кірхгофа-Лява [1]. Тоді тривимірна задача зводиться до двовимірної, тобто просторовому тілу ставиться у відповідність серединна поверхня оболонки, напружений стан якої визначають: σ_1 – меридіональне, σ_2 – колове та дотичне τ_{13} напруження. Вісь OZ спрямована вздовж вісі оболонки, вісь OX – за радіусом. Ненульовими компонентами тензора деформацій є ε_1 - відносне видовження твірної циліндра, ε_2 - тангенціальна складова, які визначаються сумою пружної та непружної складових.

Для такого напружено-деформованого стану визначальні співвідношення синтезної теорії незворотної деформації за умов простого навантаження зберігають пропорційність тензорів деформацій та напружень, одночасно описуючи як пластичну деформацію, так і стаціонарну повзучість [2,3].

Прирости компонент тензора деформацій шукають, підсумовуючи відповідні величини:

$$\begin{aligned}d\varepsilon_1 &= \xi_{11}d\sigma_1 + \xi_{12}d\sigma_2 + \xi_{13}d\tau_{13} + \xi_{14}dt; \\d\varepsilon_2 &= \xi_{12}d\sigma_1 + \xi_{22}d\sigma_2 + \xi_{23}d\tau_{13} + \xi_{24}dt,\end{aligned}\tag{1}$$

де ξ_{kl} ($k = \overline{1,2}; l = \overline{1,4}$) – змінні “параметри пружності” :

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= \frac{1}{E} + (2\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cdot \varphi_1; \quad \xi_{22} = \frac{1}{E} + (2\sigma_2 - \sigma_1)^2 \cdot \varphi_1; \quad \xi_{12} = -\frac{\nu}{E} + (2\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (2\sigma_2 - \sigma_1) \cdot \varphi_1; \\ \xi_{13} &= 6\tau_{13} \cdot (2\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \varphi_1; \quad \xi_{23} = 6\tau_{13} \cdot (2\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \varphi_1; \\ \xi_{14} &= (2\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \varphi_2; \quad \xi_{24} = (2\sigma_2 - \sigma_1) \cdot \varphi_2; \\ \varphi_1 &= \frac{a}{6T^4 \sigma_T^2} \left[\frac{1}{3} \sqrt{T^2 - \sigma_T^2} (2T^2 + \sigma_T^2) + \frac{\sigma_T^4}{T} \ln \frac{\sigma_T}{T + \sqrt{T^2 - \sigma_T^2}} \right]; \quad \varphi_2 = k(\lambda)(T^5 \varphi_1 - \varphi_3); \\ \varphi_3 &= \frac{a}{6T^4 \sigma_T^2} \left[T \sqrt{T^2 - \sigma_T^2} + \frac{\sigma_T^4}{T} \ln \frac{\sigma_T}{T + \sqrt{T^2 - \sigma_T^2}} \right]; \quad T = (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau_{13}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

де a та $k(\lambda)$ - параметри синтезної моделі [3,4].

Зауважимо, що для “миттєвої” пластичної деформації $\xi_{14} = 0$, $\xi_{24} = 0$, а в умовах повзучості ненульовими змінними “параметрами пружності” є ξ_{14} та ξ_{24} .

Обернені до (1) рівності виглядають так:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= \eta_{22} d\varepsilon_1 + \eta_{12} d\varepsilon_2 + \eta_{13} d\tau_{13} + \eta_{14} dt; \\ d\sigma_2 &= \eta_{12} d\varepsilon_1 + \eta_{11} d\varepsilon_2 + \eta_{23} d\tau_{13} + \eta_{24} dt, \end{aligned} \quad (2)$$

в яких

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \frac{\xi_{11}}{\theta}, \quad \eta_{12} = -\frac{\xi_{12}}{\theta}, \quad \eta_{22} = \frac{\xi_{22}}{\theta}, \quad \xi_{13} = \frac{1}{\theta}(\xi_{12}\xi_{23} - \xi_{22}\xi_{13}), \quad \theta = \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2, \\ \xi_{23} &= \frac{1}{\theta}(\xi_{12}\xi_{13} - \xi_{11}\xi_{23}), \quad \xi_{14} = \frac{1}{\theta}(\xi_{12}\xi_{24} - \xi_{22}\xi_{14}), \quad \xi_{24} = \frac{1}{\theta}(\xi_{12}\xi_{14} - \xi_{11}\xi_{24}). \end{aligned}$$

Для циліндричної оболонки при осесиметричному навантаженні виконуються рівності [1]:

$$\Delta \varepsilon_1 = \Delta \varepsilon_s + z \Delta \chi_s, \quad \Delta \varepsilon_2 = \Delta \varepsilon_s, \quad (3)$$

Зв'язок між приростами зусиль, моментів та деформацій серединної поверхні виглядає так:

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= b_{22} \Delta \varepsilon_s + b_{12} \Delta \varepsilon_r + k_2 \Delta \chi_s + \Delta c_1 + \Delta g_1, \\ \Delta N_2 &= b_{12} \Delta \varepsilon_s + b_{11} \Delta \varepsilon_r + k_1 \Delta \chi_s + \Delta c_2 + \Delta g_2, \\ \Delta M_1 &= k_2 \Delta \varepsilon_s + k_1 \Delta \varepsilon_r + k_3 \Delta \chi_s + \Delta c_3 + \Delta g_3. \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta_{ij} dz, \quad k_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta_{12} z dz, \quad k_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta_{22} z^2 dz, \quad \Delta c_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta_{i3} \Delta \tau_{13} dz, \\ \Delta c_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta_{13} \Delta \tau_{13} z dz, \quad \Delta g_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta_{i4} \Delta t dz, \quad \Delta g_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta_{14} \Delta t z dz, \quad i, j = \overline{1,2}. \end{aligned}$$

Приріст перерізного зусилля ΔQ пов'язаний з дотичним напруженням $\Delta \tau_{13}$ наступним співвідношенням

$$\Delta \tau_{13} = \frac{3}{2h} \Delta Q \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \quad (5)$$

Використовуючи рівняння рівноваги для приростів зусиль та моментів оболонки

$$\frac{d \Delta N_1}{dx} = 0, \quad \frac{d \Delta Q}{dx} - \frac{1}{R} \Delta N_2 + \Delta q_n = 0, \quad \frac{d \Delta M_1}{dx} - Q = 0, \quad (6)$$

зв'язок між приростами відносних видовжень (у меридіональному і коловому напрямках) та переміщень (u і w) серединної поверхні оболонки

$$\Delta \varepsilon_s = \frac{d \Delta u}{dx}, \quad \Delta \varepsilon_r = \frac{\Delta w}{R}, \quad \chi_s = \frac{d^2 \Delta w}{dx^2}, \quad \Delta v = \frac{d \Delta w}{dx},$$

а також (4), (5), отримаємо систему диференціальних рівнянь щодо змінних $Y^T = \{\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta Q, \Delta M_1\}$:

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A\bar{Y} + \bar{F}. \quad (7)$$

Ненульові елементи матриці A та вектора \bar{F} виражаються так:

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{b_{12} k_3 - k_2 k_1}{R \delta}, \quad a_{14} = \frac{c_1 k_3 - k_2 c_3}{\delta}, \quad a_{15} = \frac{k_2}{\delta}, \quad a_{23} = \frac{b_{12} k_2 - k_1 b_{22}}{R \delta}, \\ a_{24} &= \frac{c_1 k_2 - b_{22} c_3}{\delta}, \quad a_{25} = \frac{b_{22}}{\delta}, \quad a_{32} = 1, \quad a_{43} = \frac{b_{21} a_{13} - k_1 a_{23}}{R} + \frac{b_{11}}{R^2}, \\ a_{44} &= \frac{b_{21} a_{14} - k_1 a_{24} + c_2}{R}, \quad a_{45} = \frac{b_{21} a_{15} - k_1 a_{25}}{R}, \quad a_{54} = 1, \\ f_1 &= \frac{-k_2 \Delta g_3 + k_3 \Delta g_1}{\delta}, \quad f_2 = \frac{k_2 \Delta g_1 - b_{22} \Delta g_3}{\delta}, \quad f_3 = 0, \\ f_4 &= \frac{b_{21} f_1 - k_1 f_2 + \Delta g_2}{R} - \Delta q_n, \quad f_5 = 0, \quad \delta = k_2^2 - b_{22} k_3. \end{aligned}$$

Доповнюючи систему рівнянь (7) граничними умовами, відповідно, жорстко закріпленого та вільного контура

$$\begin{aligned} x = 0, \quad \Delta u = \Delta v = \Delta w = 0, \\ x = L, \quad \Delta Q = \Delta M_1 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

сформулюємо крайову задачу, яка описує осесиметричний в'язкопружно-пластичний стан циліндричної оболонки.

Критерієм досягнення пластичної деформації є рівність $T = \sigma_T$.

Для знаходження полів напружень та деформацій у кожній точці оболонки застосуємо метод змінних параметрів пружності [5], розподілюючи процес навантаження на етапи. Напруження та деформації на деякому n -му етапі складаються із суми відповідних величин на $(n-1)$ -му та їх приростів (2) на n -му етапі навантаження. Змінні "параметри пружності" на кожному етапі коректуються методом послідовних наближень. Крайова задача (7), (8) за допомогою методу стрільби зводиться до задачі Коші. Остання розв'язується методом Гіра [6].

Розрахунки виконувалися для оболонки, виготовленої з нержавіючої сталі 316, при $R = 50$ мм, $h = 1$ мм, $L = 400$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ Мпа, $\mu = 0,2$, $\lambda = 0,45$. Параметри моделі визначалися на підставі експериментальних даних – одновісному розтязі за умов пластичності та повзучості [4].

Розподіл напружень та деформацій на товщині та довжині твірної оболонки при навантаженні внутрішнім тиском $q = 4,7$ МПа поданий на рис.1. Цифрами 1 – 5 позначені криві, обчислені у точках твірної оболонки: $x/L = 0; 0,05; 0,3; 0,45; 0,9$. Пластична деформація починає розвиватися у точках жорстко закріпленого краю $(h/2; 0)$ та $(-h/2; 0)$. Із зростанням навантаження пластична область поширюється на товщині оболонки, піднімаючись вздовж твірної. На рис.2 поданий розподіл напружень σ_1 , σ_2 та деформацій ε_1 вздовж твірної на внутрішньому контурі оболонки ($z = -h/2$).

Криві 1 ($q = 3,1$ МПа) - відповідають пружному стану оболонки (пластична зона відсутня), криві 2 ($q = 4,7$ МПа) відображають появу пластичної зони, криві 3 подають розподіл напружень та деформацій за умов повзучості протягом 20 год. при постійному тиску $q = 4,7$ МПа.

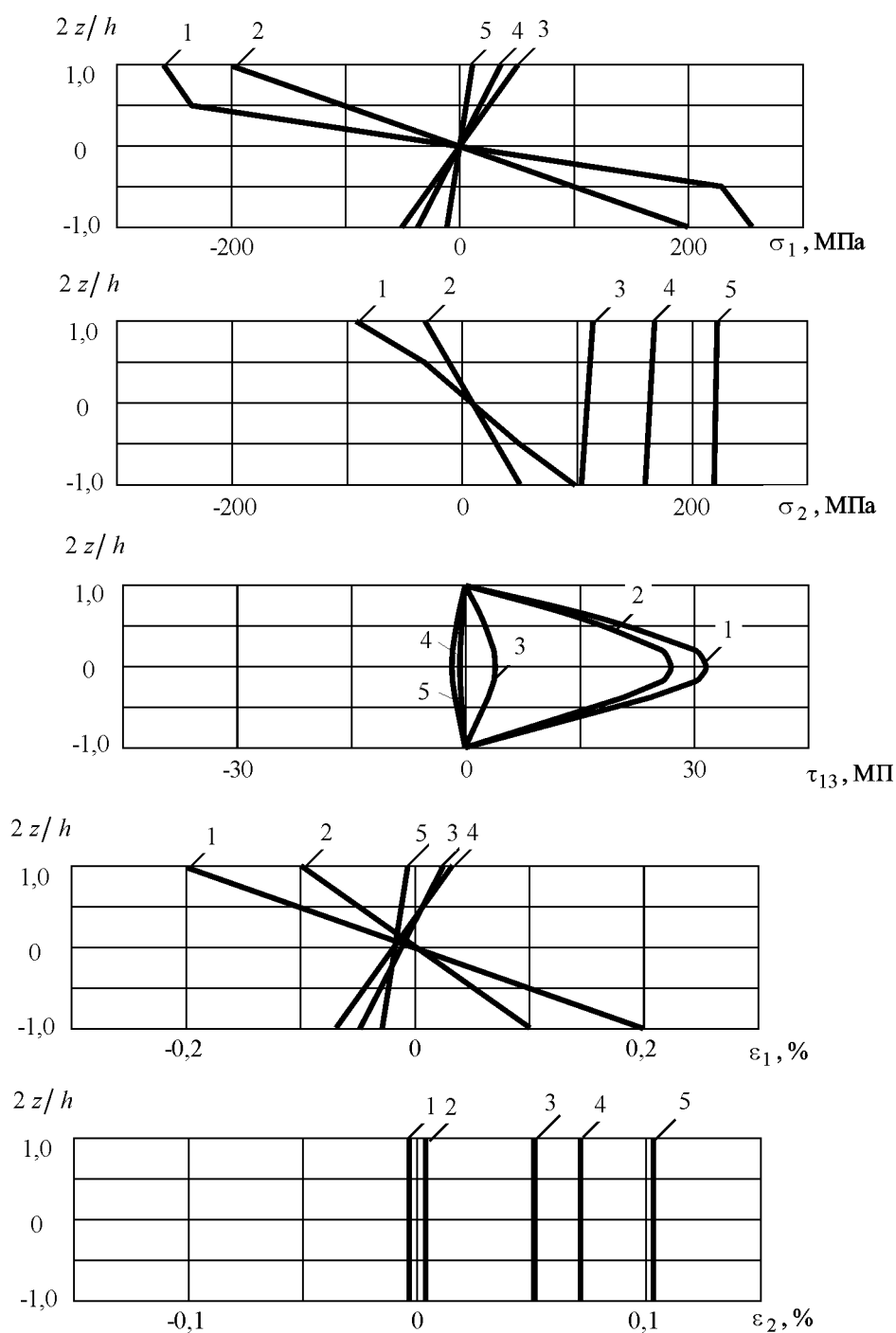


Рис.1. Напружено-деформований стан оболонки при появі пластичної зони.

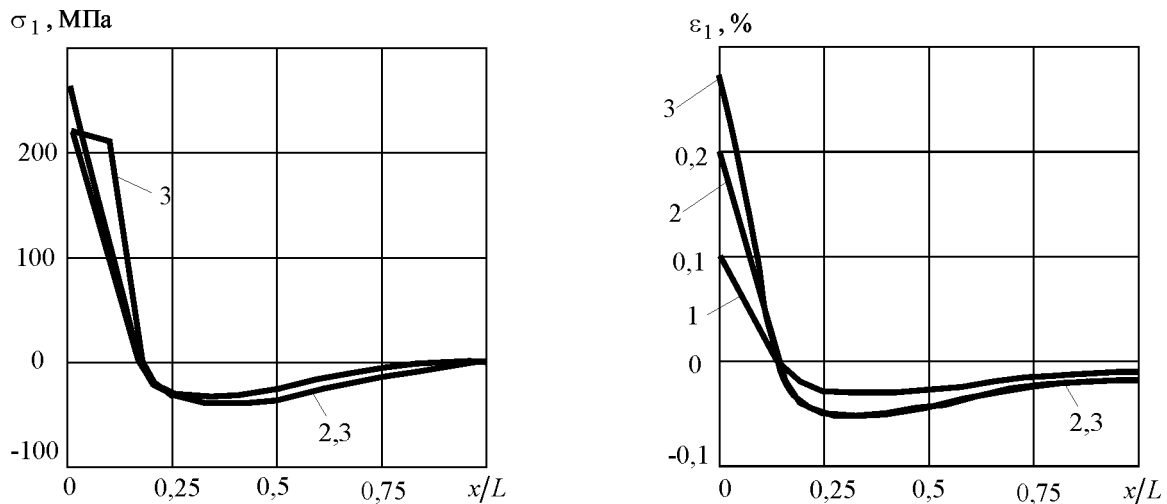


Рис.2. Розподіл напружень та деформацій в оболонці в умовах повзучості.

За умов повзучості відбувається перерозподіл напружень внаслідок їх релаксації, до 2% за 1 годину. Однак незворотна деформація ε_1 збільшується.

Висновки.

Для дослідження пружно-в'язкопластичного стану тонкої циліндричної оболонки використовується синтезна теорія незворотної деформації. Спираючись на метод змінних параметрів пружності, а також рівняння рівноваги та сумісності деформацій побудована та розв'язана система диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформований стан оболонки з урахуванням незворотної деформації пластичності та повзучості.

For research of a condition of a thin cylindrical shell the theory of irreciprocal deformation will be used synthesis. By a method of variable parameters of resiliency, using equilibrium equations and compatibility of deformations, the system of differential equations is constructed, which one describe tight - strained state of a shell with allowance for deformations of a plasticity and creep.

Література

1. Лурье А.И. Статика упругих тонкостенных оболочек. – М.: ОГИЗ, 1947. – 252с.
2. Андрусик Я.Ф., Русинко К.Н. Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при нагружении в трехмерном подпространстве пятимерного пространства девиаторов //Изв. РАН. Сер. МТТ. 1993. №27, с.92-101.
3. Слюсарчук Ю.М. Узагальнення синтезної теорії незворотної деформації для опису температурно-силових умов навантаження // Тез. Доп. 3-го Міжнар. симпоз. українських інженерів-механіків у Львові. 21-23 травня 1997р. Львів. 1997, С.31-32.
4. Русинко К.Н. Особенности неупругой деформации твердых тел. –Львов: Вища шк., 1986. – 152с.
5. Биргер И.А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. - № 2. – С.113-119.
6. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. – Киев: Наук. думка, 1986. – 584 с.

Одержано 20.12.2001 р.