

УДК 539.3

М.Михайлишин, канд.фіз.-мат.наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРИНЦИПУ МАЗІНГА НА ВИПАДОК НЕІЗОТЕРМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НАВАНТАЖЕННЯ

На основі принципу Мазінга отримано формули, які описують діаграми деформування при розвантаженні з розвитком повторних пластичних деформацій при неізотермічних процесах навантаження. Одномірні діаграми узагальнені на випадок складного напруженого стану і можуть використовуватися для моделювання процесів неізотермічного пружнопластичного деформування.

У випадках простих процесів навантаження, а також коли деформування здійснюється по траєкторіях малої кривини достатньо точні результати можна отримати на основі деформаційної пластичності [1-4]. Відомі фізичні співвідношення деформаційної теорії пластичності справедливі тільки тоді, коли в кожному елементі тіла здійснюється процес активного навантаження. Для відслідковування всього процесу деформування необхідно узагальнювати деформаційну теорію пластичності на можливість врахування розвантаження. Справедливе положення [5], що при пружному розвантаженні направляючий тензор напружень співпадає з направляючим тензором пружних деформацій, причому інтенсивності напружень і пружних деформацій зв'язані тоді узагальненим законом Гука. Для ізотермічних процесів навантаження таке узагальнення деформаційної теорії пластичності на основі цього положення проведене в роботі [1], а для неізотермічних - в роботах [3,4]. Показано, що при розвантаженні з можливим розвитком повторних пластичних деформацій або при навантаженні в протилежному напрямку до напрямку початкового навантаження можна використовувати ті ж самі співвідношення деформаційної теорії пластичності, що й при початковому навантаженні, але тепер зв'язують вони між собою не компоненти девіаторів тензорів напружень s_{ij} і деформацій e_{ij} , а компоненти

$$s'_{ij} - s_{ij}, e'_{ij} - e_{ij}, \quad (1)$$

де s'_{ij}, e'_{ij} - девіаторні компоненти тензорів напружень та деформацій, які були зафіксовані в елементі тіла в момент початку розвантаження. Вважається, що інтенсивності величин (1) зв'язані між собою залежністю, яка не залежить від виду напруженого стану і може бути знайдена з експериментальних даних. Для багатьох конструкційних матеріалів ця залежність може бути побудована на основі так званого принципу Мазінга з використанням діаграми початкового деформування матеріалу $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$. Принцип Мазінга справедливий для ізотермічних процесів навантаження. Так як при розвантаженні з розвитком повторних пластичних деформацій при неізотермічних процесах навантаження температура в елементі тіла в кожен момент часу інша, то виникає потреба в узагальненні принципу Мазінга на неізотермічні процеси.

Розглянемо ізотропний матеріал, для якого криві одновісного розтягу і стиску з початкового ненапруженого і недеформованого стану співпадають. При розвантаженні після попереднього пружнопластичного деформування і подальшого навантаження в протилежному напрямку до напрямку початкового деформування (а, можливо, просто розвантаження з розвитком повторних пластичних деформацій), для більшості матеріалів спостерігається ефект Баушінгера. Для врахування цього ефекту при вивченні пружнопластичного деформування при повторних навантаженнях (взагалі у всіх тих випадках, коли здійснюється розвантаження з розвитком повторних пластичних деформацій) можна використовувати принцип Мазінга [1]. Цей принцип стверджує, що якщо крива початкового деформування (наприклад одновісного розтягу)

має вигляд $\sigma = \Phi'(\varepsilon)$, то крива деформування при розвантаженні для матеріалу з ідеальним ефектом Баушінгера буде такою

$$\tilde{\sigma} = 2\Phi'\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right), \quad (2)$$

де

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - \varepsilon, \quad \tilde{\sigma} = \sigma' - \sigma, \quad (3)$$

ε' , σ' - деформація і напруження, які зафіксовані в момент початку розвантаження, ε , σ - біжучі деформація і напруження в процесі розвантаження.

Потрібно відзначити, що крива (2) не залежить від величини попередньої деформації ε' , і якщо покласти в (2) $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - \varepsilon = 2\varepsilon'$, то $\tilde{\sigma}(2\varepsilon') = 2\sigma'$ або $\sigma = -\sigma'$. Це означає, що якщо при повторному навантаженні деформація досягла величини $\varepsilon = -\varepsilon'$, то відповідне значення напруження буде $\sigma = -\sigma'$ (точка D на рис.1), причому σ' і ε' зв'язані рівнянням $\sigma' = \Phi'(\varepsilon')$. Діаграму (2) будують в системі координат $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}$ з початком в точці B , в якій розпочалося розвантаження, і осі якої направлені в протилежному напрямку до осей ε , σ .

Будемо для визначеності надалі криву початкового деформування $\sigma = \Phi'(\varepsilon)$ апроксимувати залежністю

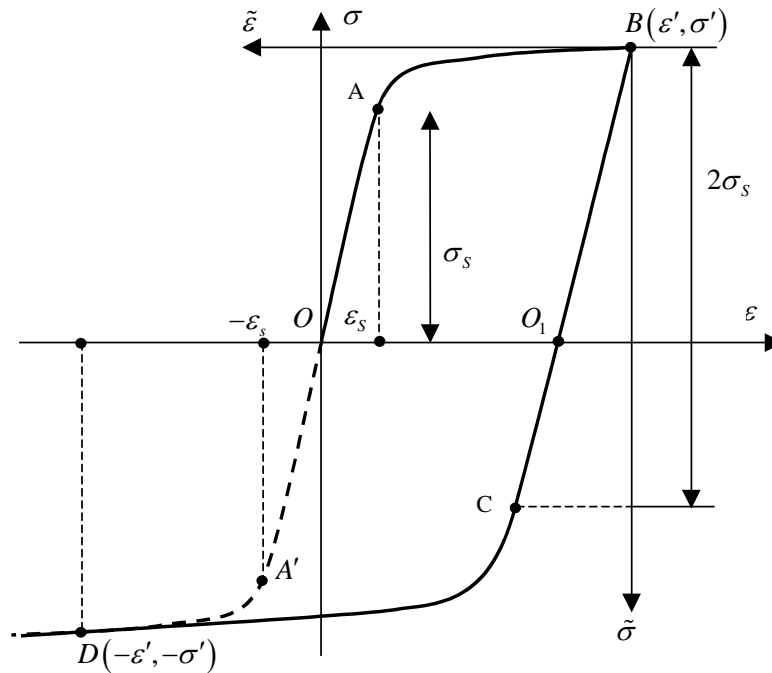


Рисунок 1 - Схематичне зображення процесу пружнопластичного деформування з наступним розвантаженням

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}, \\ \sigma_s \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)^{\gamma_0}, & \varepsilon > \varepsilon_s. \end{cases} \quad (4)$$

Так як криві одновісного розтягу і стиску однакові, то функція (4) повинна бути непарною функцією ε . Тому будемо приймати $\gamma_0 = \frac{1}{n}$, де n - деяке непарне число. На рис.2, для прикладу, наведені віднесені до σ_s криві (4) при різних значеннях n .

Рівняння (1) у випадку початкової залежності (4) прийме вигляд

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} E\tilde{\varepsilon}, & \tilde{\varepsilon} \leq 2\varepsilon_s, \\ 2\sigma_s \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{2\varepsilon_s} \right)^{\gamma_0}, & \tilde{\varepsilon} > 2\varepsilon_s. \end{cases} \quad (5)$$

При переході до складного напруженого стану використовують діаграму деформування матеріалу в координатах інтенсивностей деформацій і напружень $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, яку будують на основі діаграми одновісного розтягу матеріалу [2] і вважають, що вона не залежить від виду напруженого стану. Так як при такому переході залежність $\sigma = E\varepsilon$ на лінійній ділянці переходить у відповідну залежність $\sigma_i = 3G\varepsilon_i$, то діаграму початкового деформування матеріалу апроксимуємо надалі так

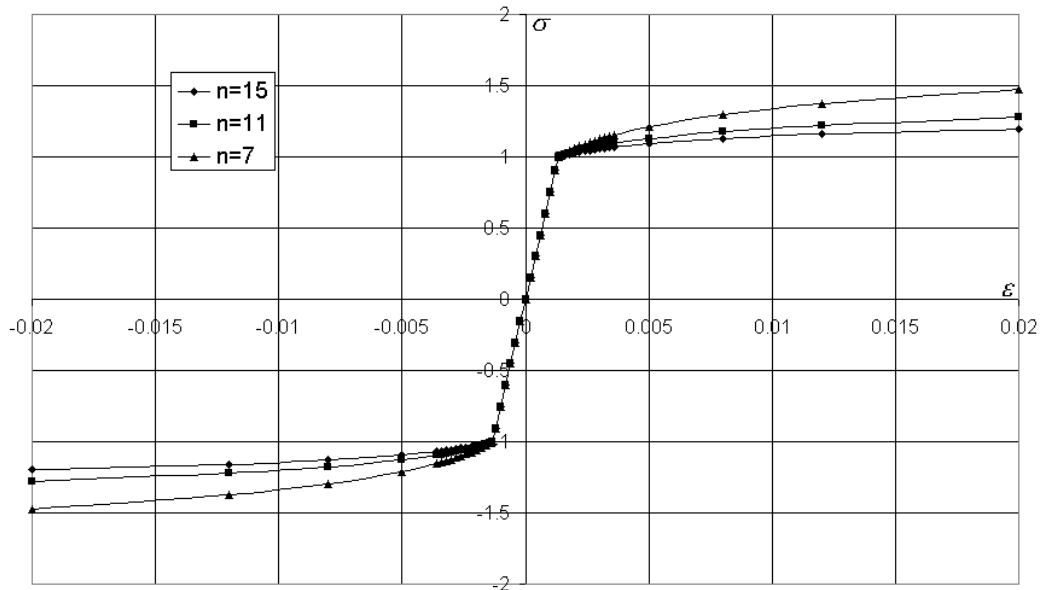


Рисунок 2 - Діаграми деформування (4) при різних значеннях $n = 1/\gamma$.

$$\sigma_i = \begin{cases} 3G\varepsilon_i, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_{is} = \frac{\sigma_s}{3G}, \\ \sigma_s \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{is}} \right)^\gamma, & \varepsilon_i > \varepsilon_{is}, \end{cases} \quad (6)$$

де $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$, $\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$ - інтенсивності напружень та деформацій, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0$ - компоненти девіаторів тензорів напружень та деформацій, G - модуль зсуву матеріалу, причому границя плинності матеріалу σ_s , модуль зсуву G і параметр γ для неізотермічних процесів навантаження можуть залежати від температури.

Тепер розглянемо узагальнення кривої Мазінга (2) при розвантаженні на випадок складного напруженого стану в припущенні, що має місце ізотермічний процес навантаження. Можна показати [1], що таке узагальнення має вигляд

$$\tilde{\sigma}_i = 2\Phi\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{2}\right), \quad (7)$$

де позначено

$$\tilde{\sigma}_i = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{s}_{ij}\tilde{s}_{ij}}, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3}\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{ij}}, \quad (8)$$

$$\tilde{s}_{ij} = s'_{ij} - s_{ij}, \quad \tilde{e}_{ij} = e'_{ij} - e_{ij}, \quad (9)$$

причому штрихом позначено девіаторні компоненти тензорів напружень та деформацій, які були зафіксовані в елементі тіла в момент початку розвантаження, а без штриха – відповідні біжучі компоненти в процесі розвантаження. Отже, залежність (5) для складного напруженого стану, якщо деформування здійснюється при постійній температурі, буде такою

$$\tilde{\sigma}_i = \begin{cases} 3G\tilde{\varepsilon}_i, & \tilde{\varepsilon}_i \leq 2\varepsilon_{is}, \\ 2\sigma_s \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{2\varepsilon_{is}} \right)^\gamma, & \tilde{\varepsilon}_i > 2\varepsilon_{is}. \end{cases} \quad (10)$$

Розглянемо тепер узагальнення принципу Мазінга в одномірному випадку на неізотермічні процеси навантаження. Будемо вважати, що модуль зсуву і границя плинності матеріалу є відомими функціями температури і при довільній постійній температурі має місце принцип Мазінга. Основна трудність застосування цього принципу для неізотермічних процесів полягає в тому, що в процесі розвантаження здійснюється зміна температури в кожному елементі тіла. Так як ми припустили, що принцип Мазінга має місце для довільної постійної температури, то ми повинні вміти, виходячи з даного припущення, трансформувати знайдену криву розвантаження для деякої температури T_0 , яка мала місце в момент початку розвантаження, в криву для біжучої температури T .

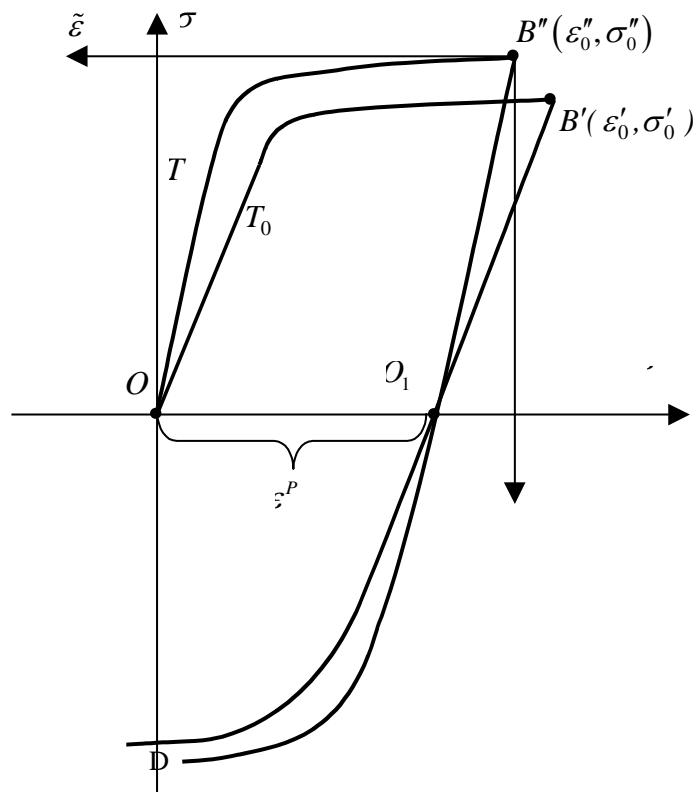


Рисунок 3 - Схематичне зображення залежності діаграми одновісного деформування від температури.

Нехай розвантаження розпочалося при деякій температурі T_0 і при цьому були зафіксовані напруження і деформація відповідно σ'_0 і ε'_0 (точка B' на рис.3), а в елементі досягнута пластична деформація ε^P . Тепер припустимо, що в деякий наступний момент часу температура даного елемента стала T і здійснюється процес розвантаження, для опису якого будемо використовувати принцип Мазінга. Новій

температурі і даній пластичній деформації ε^P на кривій початкового деформування відповідає інша точка B'' з координатами $\sigma_0'', \varepsilon_0''$.

Використовуючи співвідношення

$$\begin{aligned} E_0(\varepsilon_0' - \varepsilon^P) &= \sigma_0', \\ E(\varepsilon_0'' - \varepsilon^P) &= \sigma_0'', \end{aligned} \quad (11)$$

де $E_0 = E(T_0)$, $E = E(T)$, знайдемо

$$\sigma_0'' - \frac{E}{E_0} \sigma_0' = E(\varepsilon_0'' - \varepsilon_0'). \quad (12)$$

Згідно з принципом Мазінга, для температури T можемо записати (див. (2))

$$\sigma_0'' - \sigma = 2\Phi' \left(\frac{\varepsilon_0'' - \varepsilon}{2} \right), \quad (13)$$

де, як і вище, без штрихів позначено біжучі напруження і деформації при даній температурі T . Залежність (13) з використанням (12) можна записати так

$$\tilde{\sigma}_1 = 2\Phi' \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_1 + \frac{1}{E} \left(\sigma_0'' - \frac{E}{E_0} \sigma_0' \right)}{2} \right) - \left(\sigma_0'' - \frac{E}{E_0} \sigma_0' \right), \quad (14)$$

де позначено

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{E}{E_0} \sigma_0' - \sigma, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_0' - \varepsilon. \quad (15)$$

Узагальнення цієї залежності на випадок складного напруженого стану в загальному випадку має вигляд

$$\tilde{\sigma}_{i1} = 2\Phi \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{i1} + \frac{1}{3G(T)} \left(\sigma_i'' - \frac{E}{E_0} \sigma_i' \right)}{2} \right) - \left(\sigma_i'' - \frac{E}{E_0} \sigma_i' \right), \quad (16)$$

причому $\tilde{\sigma}_{i1}$ і $\tilde{\varepsilon}_{i1}$ - визначаються за формулами (8), але обчислюються вони не для величин (9), а для таких -

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{E}{E_0} s'_{ij} - s_{ij}, \quad \tilde{e}_{ij} = e'_{ij} - e_{ij}. \quad (17)$$

Якщо крива початкового деформування описується залежністю (6), то діаграма деформування при розвантаженні і повторному пластичному деформуванні (16) буде такою

$$\tilde{\sigma}_{i1} = \begin{cases} \sigma_s(T) \frac{\tilde{\varepsilon}_{i1}}{\varepsilon_{is}}, & \tilde{\varepsilon}_i \leq \tilde{\varepsilon}_{s1} = 2\varepsilon_{is} - \frac{1}{3G(T)} \left(\sigma_i'' - \frac{E}{E_0} \sigma_i' \right), \\ 2\sigma_s(T) \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{i1} + 2\varepsilon_{is} - \tilde{\varepsilon}_{s1}}{2\varepsilon_{is}} \right)^\gamma - \left(\sigma_i'' - \frac{E}{E_0} \sigma_i' \right), & \tilde{\varepsilon}_i > \tilde{\varepsilon}_{s1}. \end{cases} \quad (18)$$

Зауважимо, що σ_i' - це інтенсивність напружень, яка була зафіксована в даному елементі тіла в момент початку розвантаження, а σ_i'' - відповідна інтенсивність напружень, яка б спостерігалася в даному елементі в момент початку розвантаження при умові, що розвантаження розпочиналося б при такому ж рівні інтенсивності пластичної деформації, але при температурі T , а не T_0 .

Тепер дослідимо випадок, коли після розвантаження з розвитком повторних пластичних деформацій знову спостерігається розвантаження і деформування продовжується в тому напрямку, в якому проходило початкове деформування. В роботі [1] показано, що в одномірному випадку для ізотермічного процесу навантаження тоді теж можна використовувати принцип Мазінга, який записується у формі (2), але $\tilde{\varepsilon}$ і $\tilde{\sigma}$ вводяться тепер так

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon', \quad \tilde{\sigma} = \sigma - \sigma', \quad (19)$$

де, як і раніше, ε' , σ' - деформація і напруження, які зафіксовані в момент початку розвантаження, ε , σ - біжучі деформація і напруження в процесі розвантаження.

Розглянемо знову схематичне представлення процесу деформування в одномірному випадку на рис. 4.

Нехай перше розвантаження розпочалося при $T = T_0$ і йому відповідає точка B' на рисунку. Якщо крива $OA'B''CD'$ відповідає деякій довільній температурі T , то ця крива описується рівнянням (14). Тепер припустимо, що ця крива відповідає температурі T_1 і в цей момент розпочинається розвантаження в точці $D'(\varepsilon'_1, \sigma'_1)$. Очевидно, що координати точки D' в координатах $(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\sigma}_1)$ будуть $(\tilde{\varepsilon}'_1 = \varepsilon'_0 - \varepsilon'_1, \tilde{\sigma}'_1 = \frac{E_1}{E_0} \sigma'_0 - \sigma'_1)$.

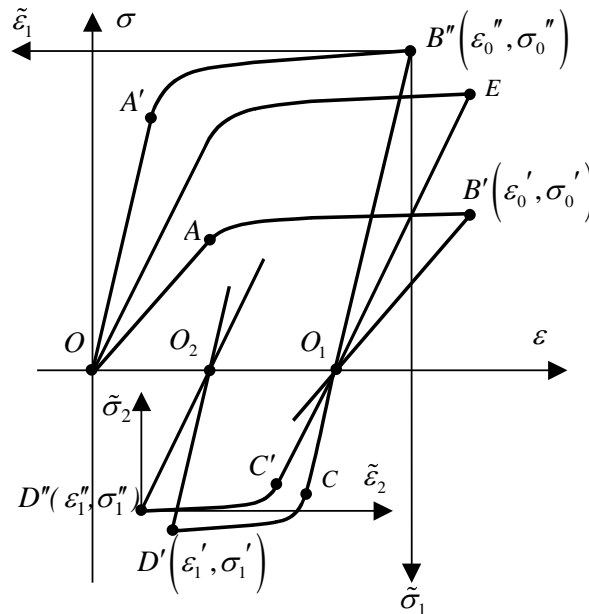


Рисунок 4 - Схематичне зображення процесу повторного розвантаження у випадку неізотермічних процесів навантаження

Тепер нехай в деякий наступний момент часу температура в елементі стала рівною T і цій температурі відповідає крива $OEC'D''$, причому точка $D''(\varepsilon''_1, \sigma''_1)$ - це точка, в якій розпочалося б розвантаження при новій температурі T і тому ж рівні пластичної деформації, який був зафіксований в момент початку розвантаження. Координати точки D'' в координатах $(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\sigma}_1)$, згідно з формулами (15), такі:

$$(\tilde{\varepsilon}''_1 = \varepsilon'_0 - \varepsilon''_1, \tilde{\sigma}''_1 = \frac{E}{E_0} \sigma'_0 - \sigma''_1).$$

Позначимо $E_1 = E(T_1)$. Якщо координати точки E позначити $(\varepsilon'''_0, \sigma'''_0)$, то для точок B'' і E отримаємо формулу, подібну до формули (12), а саме

$$\sigma'''_0 - \frac{E}{E_1} \sigma'''_0 = E(\varepsilon'''_0 - \varepsilon''_0). \quad (20)$$

Тепер запишемо такі очевидні співвідношення

$$\begin{aligned}\sigma_0'' - \sigma_1' &= E_1(\varepsilon_0'' - O_1 O_2 - \varepsilon_1'), \\ \sigma_0''' - \sigma_1'' &= E(\varepsilon_0''' - O_1 O_2 - \varepsilon_1'').\end{aligned}$$

Звідси, а також враховуючи (20), знайдемо

$$\frac{E}{E_1} \sigma_1' - \sigma_1'' = E(\varepsilon_1' - \varepsilon_1''). \quad (21)$$

Рівняння кривої розвантаження з точки D'' при постійній температурі T на основі принципу Мазінга з врахуванням (19) в загальному випадку запишеться так

$$\sigma - \sigma_1'' = 2\Phi' \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_1''}{2} \right), \quad (22)$$

або, враховуючи (21),

$$\tilde{\sigma}_2 = 2\Phi' \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_2 + \varepsilon_1' - \varepsilon_1''}{2} \right) - E(\varepsilon_1' - \varepsilon_1''), \quad (23)$$

де

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon - \varepsilon_1', \quad \tilde{\sigma}_2 = \sigma - \frac{E}{E_1} \sigma_1'. \quad (24)$$

Позначимо пластичну деформацію в точці O_1 через ε_0^p , а в точці O_2 - ε_1^p і зауважимо, що $O_1 O_2 = \varepsilon_0^p - \varepsilon_1^p$. Тоді, використовуючи співвідношення

$$\begin{aligned}E_0(\varepsilon_0' - \varepsilon_0^p) &= \sigma_0', \\ E_1(\varepsilon_1^p - \varepsilon_1') &= -\sigma_1', \\ E(\varepsilon_1^p - \varepsilon_1'') &= -\sigma_1'',\end{aligned} \quad (25)$$

можна показати, що

$$\left(\frac{E}{E_0} \sigma_0' - \sigma_1'' \right) - \frac{E}{E_1} \left(\frac{E}{E_0} \sigma_0' - \sigma_1' \right) = \tilde{\sigma}_1'' - \frac{E}{E_1} \tilde{\sigma}_1' = E(\varepsilon_1' - \varepsilon_1'') \quad (26)$$

і рівняння (23) прийме вигляд

$$\tilde{\sigma}_2 = 2\Phi' \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_2 + \frac{1}{E} \left(\tilde{\sigma}_1'' - \frac{E}{E_1} \tilde{\sigma}_1' \right)}{2} \right) - \left(\tilde{\sigma}_1'' - \frac{E}{E_1} \tilde{\sigma}_1' \right). \quad (27)$$

У випадку складного напруженого стану діаграма деформування при повторному розвантаженні запишеться так

$$\tilde{\sigma}_{i2} = 2\Phi \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{i2} + \frac{1}{3G(T)} \left(\tilde{\sigma}_{i1}'' - \frac{E}{E_1} \tilde{\sigma}_{i1}' \right)}{2} \right) - \left(\tilde{\sigma}_{i1}'' - \frac{E}{E_1} \tilde{\sigma}_{i1}' \right), \quad (28)$$

де, у відповідності з (24), позначено

$$\tilde{\sigma}_{i2} = \sqrt{\frac{3}{2} \left(s_{ij} - \frac{E}{E_1} s_{ij}' \right) \left(s_{ij} - \frac{E}{E_1} s_{ij}' \right)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{i2} = \sqrt{\frac{2}{3} (e_{ij} - e_{ij}') (e_{ij} - e_{ij}')}. \quad (29)$$

Якщо крива початкового деформування описується рівнянням (6), то рівняння (28) запишеться у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{i2} = \begin{cases} \sigma_s(T) \frac{\tilde{\varepsilon}_{i2}}{\varepsilon_{is}}, & \tilde{\varepsilon}_{i2} \leq \tilde{\varepsilon}_{s2} = 2\varepsilon_{is} - \frac{1}{3G(T)} \left(\tilde{\sigma}_{i1}'' - \frac{E}{E_1} \tilde{\sigma}_{i1}' \right), \\ 2\sigma_s(T) \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{i1} + 2\varepsilon_{is} - \tilde{\varepsilon}_{s2}}{2\varepsilon_{is}} \right)^{\gamma} - \left(\tilde{\sigma}_{i1}'' - \frac{E}{E_1} \tilde{\sigma}_{i1}' \right), & \tilde{\varepsilon}_{i2} > \tilde{\varepsilon}_{s2}. \end{cases} \quad (30)$$

Порівняння формул (28) і (16), чи, відповідно, (29) і (18) показує, що вони майже співпадають, за винятком двох відмінностей. Перша з них полягає в тому, що компоненти, для яких обчислюються інтенсивності $\tilde{\sigma}_{i1}$ і $\tilde{\sigma}_{i2}$, відрізняються знаком. Однак ця різниця несуттєва, так як при побудові цих інтенсивностей знак компонентів не впливає на результат. Друга відмінність полягає у формулах для обчислення $\tilde{\varepsilon}_{s1}$ і $\tilde{\varepsilon}_{s2}$. Величина $\tilde{\varepsilon}_{s1}$ обчислюється через звичайні інтенсивності напружень, а $\tilde{\varepsilon}_{s2}$ - через відповідні значення $\tilde{\sigma}_{i1}$. Якщо припустити, що крива початкового деформування є також кривою розвантаження, яке розпочинається при деякій початковій температурі (наприклад температурі середовища) і при цьому всі компоненти тензора напружень нульові, то можна ввести такі величини

$$\tilde{\sigma}_{i0} = \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \left(s_{ij} - \frac{E}{E_c} s'_{ij} \right) \left(s_{ij} - \frac{E}{E_c} s'_{ij} \right)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{i0} = \varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3} (e_{ij} - e'_{ij})(e_{ij} - e'_{ij})}, \quad (31)$$

в яких $s'_{ij} = 0$ і $e'_{ij} = 0$. Очевидно, що тоді можна рівняння всіх кривих знакозмінного деформування записати у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{im} = \begin{cases} \sigma_s(T) \frac{\tilde{\varepsilon}_{im}}{\varepsilon_{is}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{im} \leq \tilde{\varepsilon}_{sm} = 2\varepsilon_{is} - \frac{1}{3G(T)} \left(\tilde{\sigma}_{im-1}'' - \frac{E}{E_{m-1}} \tilde{\sigma}_{im-1}' \right), \\ 2\sigma_s(T) \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{im} + 2\varepsilon_{is} - \tilde{\varepsilon}_{sm}}{2\varepsilon_{is}} \right)^\gamma - \left(\tilde{\sigma}_{im-1}'' - \frac{E}{E_{m-1}} \tilde{\sigma}_{im-1}' \right), \quad \tilde{\varepsilon}_{im} > \tilde{\varepsilon}_{sm}, \quad m=1,2,\dots \end{cases} \quad (32)$$

В загальному випадку узагальнений принцип Мазінга для неізотермічних процесів можна записати так:

$$\tilde{\sigma}_{im} = \alpha_m \Phi \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{im} + \frac{1}{3G(T)} \left(\tilde{\sigma}_{im-1}'' - \frac{E}{E_{m-1}} \tilde{\sigma}_{im-1}' \right)}{\alpha_m} \right) - \left(\tilde{\sigma}_{im-1}'' - \frac{E}{E_{m-1}} \tilde{\sigma}_{im-1}' \right), \quad (33)$$

причому коефіцієнт α_m може залежати від порядкового номера m розвантаження в даній точці і повинен визначатися з експериментальних даних. З допомогою цього коефіцієнта можна описати процеси циклічних навантажень як циклічно зміцнювальних, так і циклічно знеміцнювальних матеріалів.

Розглянемо тепер ситуацію, коли, наприклад, здійснюється пружне розвантаження вздовж вітки $B''O_1C$ і в деякій точці цієї ділянки деформування змінює свій напрямок і продовжується в напрямку до точки B'' (рис.4). Відомо, що після досягнення точки B'' в ізотермічному випадку деформування повинно продовжуватися вздовж лінії $A'B''$ з розвитком пластичних деформацій. Якщо ми будемо відслідковувати деформування на ділянці пружного розвантаження в координатах $\tilde{\varepsilon}_{i1}$, $\tilde{\sigma}_{i1}$, то неможливо визначити момент повернення на криву початкового деформування. Це пов'язано з тим, що при деформуванні в напрямку до точки B'' інтенсивність $\tilde{\varepsilon}_{i1}$ буде зменшуватися і якщо в деякий момент вона почне знову зростати, то це може означати, що необхідно повернутися на криву початкового деформування або ж далі продовжується процес пружного розвантаження, але він знову змінив свій напрямок. За інтенсивністю напружень в неізотермічному випадку також важко визначити, яка ситуація має місце. Тому вважаємо, що для опису процесу деформування в напрямку до точки B'' можна також використати принцип Мазінга, якщо припустити, що зміна напрямку деформування відбулася в точці C . Записавши рівняння Мазінга і перейшовши до нової системи координат з початком в точці, в якій дійсно мала місце зміна напрямку деформування, знайдемо рівняння кривої, яка описує деформування на пружній ділянці з наступним переходом на деформування з

розвитком пластичних деформацій. Узагальнюючи це рівняння на неізотермічні процеси і на випадок складного напруженого стану, знайдемо, що процес деформування також описується рівнянням (33), в якому $\tilde{\sigma}_{im-1}''$ - значення інтенсивності напружень в попередній системі координат в точці виходу на пластичність в цій системі координат при поточній температурі, а $\tilde{\sigma}_{im-1}'$ - значення інтенсивності напружень також в попередній системі координат в момент зміни напрямку деформування. Вважається, що в цей момент температура елемента була T_{m-1} і $E_{m-1} = E(T_{m-1})$. Зауважимо, що значення $\tilde{\sigma}_{im-1}''$ в даному випадку знаходимо з формули (32), якщо прийняти в ній $m = m-1$ і $\tilde{\varepsilon}_{im-1} = \tilde{\varepsilon}_{sm-1}$, тобто

$$\tilde{\sigma}_{im-1}'' = 2\sigma_s(T) - \left(\tilde{\sigma}_{im-2}'' - \frac{E}{E_{m-2}} \tilde{\sigma}_{m-2}' \right). \quad (34)$$

Надалі будемо приймати $m=0$, якщо деформування описується початковою кривою з недеформованого і ненапруженого стану. Процес розвантаження після пластичного деформування і наступного навантаження в протилежному напрямку до початкового описується рівнянням (33) при $m=1$. Якщо знову в елементі деформування з розвитком пластичних деформацій зміниться повторним розвантаженням і навантаженням в тому ж напрямку, що й початкове, то воно описується рівнянням (33) при $m=2$. Таким же рівнянням описується процес повернення на поверхню початкового пластичного деформування, якщо в процесі першого пружного розвантаження змінився напрямок деформування. Якщо ж цей напрямок знову зміниться і повернення на поверхню початкового пластичного деформування не відбулося, то необхідно знову повернутися до попередніх координат при $m=1$. Отже рівняння (33) при парних значеннях m описують деформування в тому ж напрямку, що й початкове, а при непарних – в протилежному. При таких позначеннях приведені напруження і деформації визначаються за формулами

$$\tilde{s}_{ij} = (-1)^m \left(s_{ij} - \frac{E}{E_{m-1}} s'_{ij} \right), \quad \tilde{e}_{ij} = (-1)^m (e_{ij} - e'_{ij}), \quad (35)$$

де штрихом позначені компоненти напружень і деформацій, які були зафіксовані в момент початку розвантаження чи зміни напрямку деформування, а без штриха – відповідні поточні компоненти.

Таким чином, знайдені узагальнення дозволяють описувати процеси неізотермічного пружнопластичного деформування, які можуть супроводжуватися неодноразовими розвантаженнями, змінами напрямку навантаження, поверненнями на поверхню попереднього пластичного деформування з врахуванням ідеального ефекту Баушінгера чи більш складної поведінки матеріалів при циклічних навантаженнях. Отримані діаграми деформування можуть бути використані для вивчення пружнопластичного деформування як на основі теорії малих пружнопластичних деформацій, так і на основі теорії течіння.

Formulas describe the strain diagrams for unloading with evolution of repeated plastic deformations at non-isothermic processes of loading were obtained, basing on the Masing principle. One-dimensional diagrams were generalized in case of complex stress and will be use for modeling of processes of non-isothermic elastoplastic strain.

Література

1. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. –М.: Издательство Московского университета, 1965. –262 с.
2. Термопрочность деталей машин / Под ред И.А.Биргера и Б.Ф.Шорра. –М.: Машиностроение, 1975. –455 с.
3. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. – К.: Наукова думка, 1970. –285 с.
4. Ю.Н.Шевченко, М.Е.Бабешко, Р.Г.Терехов. Термо-вязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наукова думка, 1992. –326 с.

Одержано 09.03.2006 р.